Chapitre 6

Convergence faible*

Nous introduisons ici un autre mode de convergence, appelée convergence faible* dans le dual E' d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$. Ce mode de convergence s'appliquera notamment aux espaces de Lebesgue $L^p(X)$ pour $1 < p \leq \infty$ qui sont le dual de $L^q(X)$ (avec $q = p/(p-1)$ si $p < \infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$) ou encore de l'espace des mesures de Radon bornées $\mathcal{M}(\Omega)$ qui est le dual de $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

6.1 Définitions et premières propriétés

Définition 6.1.1. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E' converge faible* vers f dans E', et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, si

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \text{pour tout } x \in E.$$

La limite faible* est toujours unique car si f et g sont deux limites faible* de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $\langle f - g, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, puis par passage au sup en x, il vient d'après la définition de la norme dans E' que $\|f - g\|_{E'} = 0$, soit $f = g$.

Exemple 6.1.2.

1. Si $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, d'après le Théorème de Riesz (Théorème 5.1.3), la convergence faible* $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$ dans H signifie que

$$\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle \quad \text{pour tout } y \in H.$$

2. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini et $1 < p \leq \infty$, d'après le Théorème 5.2.3, la convergence faible* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^p(X)$ s'écrit

$$\int_X f_n g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu, \qquad \text{pour tout } g \in L^q(X)$$

où $q = p/(p-1)$ si $p < \infty$ et $q = 1$ si $p = \infty$.

3. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, la converge faible* vers $\lambda_n \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ signifie que

$$\int_\Omega f \, d\lambda_n \to \int_\Omega f \, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Le résultat suivant montre que la convergence faible* fournit effectivement une notion plus faible de convergence que celle pour la topologie de la norme.

Proposition 6.1.3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E' qui converge (fortement) vers f, i.e., $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$, alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E'.*

Démonstration. Si $x \in E$, par définition de la norme dans E',

$$|\langle f_n, x\rangle - \langle f, x\rangle| = |\langle f_n - f, x\rangle| \leq \|f_n - f\|_{E'}\|x\|_E \to 0,$$

ce qui établit le résultat. □

Comme le montre le résultat suivant, la réciproque est en général fausse.

Définition 6.1.4. Soit H un espace de Hilbert. On dit que la famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H si elle est

i) *orthornormée :* pour tout $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$;

ii) *totale :* $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ est dense dans H, *i.e.*, tout élément de H est la limite d'une suite de combinaisons linéaires d'éléments de $\mathrm{Vect}(\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}})$.

Notons que le principe d'orthogonalisation de Gram-Schmidt montre que tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Proposition 6.1.5. *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de H. Alors $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ faible* dans H.*

Démonstration. Le fait que $\|e_n\|_H = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ résulte du fait que la base est orthonormée.

Notons $F_n := \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ qui est un sous espace fermé (car de dimension fini) de E. Par conséquent, la projection orthogonale $P_n(x)$ d'un élément $x \in H$ sur F_n est bien définie. Par ailleurs, on a

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

En effet, $P_n(x) \in F_n$ et pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$\langle x - P_n(x), e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle + \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle\langle e_i, e_j\rangle = 0$$

car $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$. Ceci montre que $\langle x - P_n(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in F_n$ et d'après la Proposition 5.1.2, que $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$. Par ailleurs, le fait que la base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ est orthonormée montre que

$$\|P_n(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2.$$

Une nouvelle application de la Proposition 5.1.2 montre que $x = P_n(x) + x - P_n(x)$ avec $P_n(x) \in F_n$ et $x - P_n(x) \in F_n^\perp$ et, d'après Pythagore, on a que

$$\|x\|^2 = \|P_n(x)\|^2 + \|x - P_n(x)\|^2 \geq \sum_{i=0}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient l'inégalité de Bessel

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

La série précédente étant convergente, son terme général tend vers zéro, soit $\langle x, e_n \rangle \to 0$, ce qui montre bien que $e_n \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ faible* dans H. $\square$

Le résultat précédent nous fournit un cas de suite faiblement convergente qui ne converge pas fortement. Toutefois, en dimension finie, les deux notions de convergence coïncident.

Proposition 6.1.6. *Soient E un espace de dimension finie et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors $f_n \to f$ fortement dans E'.*

Démonstration. Soit $d = \dim(E) = \dim(E')$, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d)$ une base de E et $(e_1^*, \ldots, e_d^*)$ la base de E' duale de $\mathcal{B}$ (i.e. $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{ij}$ pour tout $1 \leq i, j \leq d$). Toutes les normes étant équivalentes en dimension finie, on considère la norme suivante sur E' :

$$\|f\|^2 := \sum_{i=1}^{d} f_i^2, \qquad \text{où } f = \sum_{i=1}^{d} f_i e_i^*.$$

Comme $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', on a en particulier que $(f_n)_i = \langle f_n, e_i \rangle \to \langle f, e_i \rangle = f_i$ pour tout $i = 1, \ldots, d$, et donc

$$\|f_n - f\|^2 = \sum_{i=1}^{d} |(f_n)_i - f_i|^2 \to 0$$

car la somme est finie. $\square$

6.2 Propriétés de compacité

Nous nous intéressons à présent aux propriétés de bornitude et compacité. Rappelons un résultat classique des espaces métriques complets.

Théorème 6.2.1 (Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet.*

(i) Pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denses dans X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X ;

(ii) Pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vide dans X, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans X.

Démonstration. L'énoncé (ii) suit de (i) par passage au complémentaire. On montre donc (i). Notons $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, il s'agit de montrer que $\overline{G} = X$, *i.e.*, pour tout $x_0 \in X$ et tout $r_0 > 0$,

$$B(x_0, r_0) \cap G \neq \emptyset. \tag{6.2.1}$$

Puisque U_0 est un ouvert dense, il existe un $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_0$ et, ce dernier ensemble étant ouvert, il existe un $0 < r_1 < r_0/2$ tel que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_0$. Par récurrence, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ ayant les propriétés

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap U_n, \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n \geq m$, alors $x_n \in B(x_m, r_m)$ et donc $d(x_n, x_m) < r_m < r_0/2^m$. Par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d) complet, et donc il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Or $x_n \in B(x_m, r_m)$ pour tout $n \geq m$ et donc $x \in \overline{B}(x_m, r_m) \subset U_m$ par construction. Finalement, on obtient que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$ et donc (6.2.1) est vérifié. $\square$

Les résultat suivant permet de passer d'une majoration ponctuelle à une majoration uniforme.

Théorème 6.2.2 (**Banach-Steinhaus**). *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Si $(T_i)_{i\in I}$ est une famille dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F < +\infty \qquad \textit{pour tout } x \in E,$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n := \{x \in E : \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|_F \leq n\}$. Comme T_i est continue, $x \mapsto \|T_i(x)\|_F$ l'est également et donc $\{x \in E : \|T_i(x)\|_F \leq n\}$ est fermé pour tout $i \in I$. En écrivant que $X_n = \bigcap_{i\in I}\{x \in E : \|T_i(x)\|_F \leq n\}$, on obtient ainsi que X_n est fermé. Par ailleurs, par hypothèse, on a

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

L'ensemble E étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{n_0} n'est pas d'intérieur vide. Il existe donc un $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$, soit $\|T_i(x)\|_F \leq n_0$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et tout $i \in I$. Si $x \in \overline{B}(0, 1)$, alors $x_0 + r_0 x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et donc

$$\|T_i(x)\|_F \leq \frac{1}{r_0}(n_0 + \|T_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|T_i(x_0)\|_F\right).$$

Par passage au sup en x dans le membre de gauche, il vient

$$\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|T_i(x_0)\|_F\right),$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 6.2.3. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E' telle que $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors*

i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' ;

ii) $\|f\|_{E'} \leq \liminf_n \|f_n\|_{E'}$;

iii) si $x_n \to x$ fortement dans E, alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Démonstration. Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ faible* dans E', alors pour tout $x \in E$, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ et donc la suite numérique $(\langle f_n, x\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle f_n, x\rangle| < +\infty \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

Le Théorème de Banach-Steinhaus montre alors que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty,$$

ce qui établit i). En ce qui concerne ii), on écrit que pour tout $x \in E$,

$$\langle f, x\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f_n, x\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'} \|x\|_E.$$

On divise ensuite par $\|x\|_E$ puis on passe au sup en $x \in E$,

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\langle f, x\rangle}{\|x\|_E} \leq \liminf_{n\to+\infty} \|f_n\|_{E'}.$$

Enfin, si $x_n \to x$ fortement dans E, alors

$$\begin{aligned} |\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| &\leq |\langle f_n, x_n - x\rangle| + |\langle f_n - f, x\rangle \\ &\leq \|f_n\|_{E'} \|x_n - x\|_E + |\langle f_n - f, x\rangle|. \end{aligned}$$

D'après i), la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E' par une constante $M > 0$ (indépendante de n), donc

$$|\langle f_n, x_n\rangle - \langle f, x\rangle| \leq M\|x_n - x\|_E + |\langle f_n - f, x\rangle| \to 0,$$

ce qui montre iii) et conclut la preuve de la Proposition. □

Le résultat suivant est l'un des résultats fondamentaux sur la convergence faible*. Il assure, dans le dual d'un espace séparable, que toute suite bornée est faible* séquentiellement relativement compacte.

Théorème 6.2.4. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach séparable. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de E', i.e.,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{E'} < +\infty,$$

alors on peut en extraire une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faible vers un élément $f \in E'$.*

Démonstration. Soit $D = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans E. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonale. Comme la suite numérique $(\langle f_n, x_0\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_0) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_0(n)}, x_0\rangle \to L(x_0).$$

Par récurrence, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $L(x_0), \dots, L(x_k) \in \mathbb{R}$, tels que pour tout $0 \leq j \leq k$,

$$\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_j(n)}, x_j\rangle \to L(x_j).$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}, x_{k+1}\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, une nouvelle application du Théorème de Bolzano-Weierstrass assure l'existence d'une extraction $\sigma_{k+1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et d'un réel $L(x_{k+1}) \in \mathbb{R}$, tels que

$$\langle f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k\circ\sigma_{k+1}(n)}, x_{k+1}\rangle \to L(x_{k+1}).$$

On définit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par $\sigma(n) := \sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_n(n)$ de sorte que la sous-suite diagonale $(x_{\sigma(n)})_{n\geq k}$ est une sous-suite de $(x_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)})_{n\geq k}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle \to L(x_k).$$

Montrons que, pour tout $x \in E$ et pour la sous-suite sélectionnée précedemment, il existe un $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\geq n(x)}$ converge. Soit donc $x \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un x_k tel que $\|x - x_k\|_E \leq \varepsilon$. Par conséquent, pour tout m, $n \geq k$,

$$\begin{aligned}|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| &\leq |\langle f_{\sigma(n)}, x - x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| + |\langle f_{\sigma(m)}, x - x_k\rangle| \\ &\leq (\|f_{\sigma(m)}\|_{E'} + \|f_{\sigma(n)}\|_{E'})\|x - x_k\|_E + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|.\end{aligned}$$

Comme la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément bornée par une constante $M > 0$,

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \leq 2M\varepsilon + |\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle|.$$

Comme la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est de Cauchy et donc il existe un $N_k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N_k$, $|\langle f_{\sigma(n)}, x_k\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x_k\rangle| \leq \varepsilon$. On en déduit donc que pour tout m, $n \geq n(x) := \max(N_k, k)$,

$$|\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle - \langle f_{\sigma(m)}, x\rangle| \leq (2M + 1)\varepsilon,$$

ce qui prouve que la suite $(\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle)_{n\geq n(x)}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc qu'elle converge vers un réel noté $L(x)$.

On montre enfin que l'application $x \mapsto L(x)$ est linéaire et comme

$$|L(x)| = \lim_{n\to+\infty} |\langle f_{\sigma(n)}, x\rangle| \leq M\|x\|_E,$$

elle est continue et donc $L \in E'$, ce qui montre que $f_{\sigma(n)} \overset{*}{\rightharpoonup} L$ faible* dans E'. □

Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, le résultat précédent s'applique en particulier aux espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ pour tout $1 < p \leq \infty$ car il s'agit de l'espace dual de $L^q(\Omega)$ pour un certain $1 \leq q < \infty$ qui est séparable en vertu de la Proposition 4.4.1. Il en est de même de l'espace des mesures de Radon bornées $\mathcal{M}(\Omega)$ qui est le dual de l'espace séparable $\mathcal{C}_0(\Omega)$ d'après la Proposition 3.1.4.

6.3 Convergence faible

On suppose ici que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré σ-fini. L'espace $L^1(X)$ n'étant pas un espace dual, la notion de convergence faible* ne s'applique pas dans cet espace. On lui préférera la notion de convergence faible dont voici la définition dans un espace de Banach général E.

Définition 6.3.1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \text{pour tout } f \in E'.$$

Une limite faible, quand elle existe, est toujours unique comme conséquence du théorème de Hahn-Banach sous forme analytique qui permet de calculer la norme dans E par dualité :

$$\|x\|_E = \max_{f\in E', \|f\|_{E'}\le 1} \langle f, x\rangle.$$

Par ailleurs, nous avons des propriétés similaires à la convergence faible* résumées dans la proposition suivante dont la démonstration est similaire à celle de la proposition 6.2.3.

Proposition 6.3.2. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E telle que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, alors :*

i) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E ;
ii) $\|x\|_E \le \liminf_n \|x_n\|_E$;
iii) si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Le cas qui nous intéressera particulièment ici est celui de $E = L^1(X)$ (dont le dual peut être identifié à $L^\infty(X)$), une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $L^1(X)$ converge faiblement vers $f \in L^1(X)$ si

$$\int_X f_n g \, d\mu \to \int_X f g \, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^\infty(X).$$

Il est immédiat de voir ici que la limite faible est unique car si f_1 et $f_2 \in L^1(X)$ sont deux limites faibles, on a pour tout $g \in L^\infty(X)$ que

$$\int_X (f_1 - f_2) g \, d\mu = 0,$$

puis en prenant $g = \frac{f_1-f_2}{|f_1-f_2|}\chi_{\{f_1\neq f_2\}} \in L^\infty(X)$ que $\|f_1 - f_2\|_{L^1(X)} = 0$, soit $f_1 = f_2$.

Dans l'espace L^1, il n'y a pas d'espoir d'avoir un résultat général de compacité faible, similaire au théorème 6.2.4, comme cela peut être le cas dans L^p pour $p > 1$.

Exemple 6.3.3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $L^1([0,1])$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \le 1 \end{cases}$$

alors on a $\|f_n\|_1 = 1$. Supposons, par l'absurde, que pour une sous-suite toujours notée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1([0,1])$. Comme en particulier, $1 \in L^\infty([0,1])$, il vient que

$$1 = \int_0^1 f_n\,dx \to \int_0^1 f\,dx,$$

ce qui montre que $\int_0^1 f\,dx = 1$. Par ailleurs, si I est un intervalle fermé contenu dans $]0,1]$, alors il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_n = 0$ p.p. sur I, pour tout $n \geq n_0$. En choisissant $g = \chi_I \in L^\infty([0,1])$ comme fonction test, il vient

$$0 = \int_I f_n\,dx \to \int_I f\,dx.$$

En choisissant $I = [1/k, 1]$, on obtient que $\int_{1/k}^1 f\,dx = 0$ pour tout $k \geq 1$, puis par passage à la limite quand $k \to +\infty$ et par convergence dominée, $\int_0^1 f\,dx = 0$, ce qui est impossible.

L'obstruction typique à la convergence faible dans L^1 est le fait que les suites ont tendance à se concentrer pour former à la limite une mesure à la place d'une fonction intégrable. Pour éviter de type de phénomène, on introduit la notion suivante d'équi-intégrabilité qui assure que la suite ne se concentre pas sur des ensembles de mesure arbitrairement petite.

Définition 6.3.4. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $L^1(X)$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équi-intégrable* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$A \in \mathcal{A},\ \mu(A) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n|\,d\mu \leq \varepsilon.$$

Pour simplifier, nous nous plaçons dans le cadre d'un espace mesuré de mesure finie. Si $\mu(X) = +\infty$ (ce qui est par exemple le cas pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$), il faut de plus s'assurer que la masse de la suite de fonctions ne s'échappe pas à l'infini, i.e., pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $E \subset X$ tel que $\mu(E) < +\infty$ et

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{X\setminus E} |f_n|\,d\mu \leq \varepsilon.$$

Le résultat suivant caractérise les suites faiblement convergentes dans L^1.

Théorème 6.3.5 (Dunford-Pettis). *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < \infty$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée d'élements de $L^1(X)$.*

(i) Si $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(X)$ pour une fonction $f \in L^1(X)$, alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable.

(ii) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, alors il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f \in L^1(X)$ telle que $f_{\sigma(n)} \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^1(X)$.

Remarquons toutefois que l'espace $L^1(\Omega)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{M}(\Omega)$ en identifiant $f \in L^1(\Omega)$ avec la mesure $\mu = f\mathcal{L}^N$. Par conséquent, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de fonctions dans $L^1(\Omega)$, alors il existe une sous-suite extraite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une mesure de Radon bornée $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)} g \, dx \to \int_\Omega g \, d\mu.$$

Notons si Ω est borné et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équi-intégrable, la mesure μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et le Théorème de Radon-Nikodým assure l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^1(\Omega)$ telle que $\mu = f\mathcal{L}^N$. Dans ce cas, on en déduit que pour tout $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_{\sigma(n)} g \, dx \to \int_\Omega f g \, dx.$$