TD3: Mesures de Radon

Exercice 1. L'objet de cet exercice est de montrer l'existence et l'unicité d'une mesure de Radon positive $\mathcal{L}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ satisfaisant

1. $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$;
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}^N(x+B) = \mathcal{L}^N(B)$.

La mesure $\mathcal{L}^N$ s'appelle la mesure de Lebesgue.

Partie I. Préliminaire sur l'intégrale de Riemann

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$.

1. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$.
2. Pour tout $1 \le i \le N$ et pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, on définit
$$F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) := \int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_N)\, dt.$$
Montrer que $F_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^{N-1})$.
3. Montrer que la limite
$$I = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{2^{nN}} f\left(\frac{i_1}{2^n}, \dots, \frac{i_N}{2^n}\right)$$
existe.
4. Montrer que
$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, \dots, x_N)\, dx_N \right) dx_{N-1} \right) \cdots dx_2 \right) dx_1,$$
où l'ordre d'intégration peut être arbitrairement changé.

La valeur de la limite ci-dessus, sera notée
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx$$
et n'est autre que l'intégrale de f au sens de Riemann sur $\mathbb{R}^N$.

Partie II. Construction de la mesure de Lebesgue

1. Montrer qu'il existe une unique mesure de Radon positive $\mathcal{L}^N$ telle que
$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mathcal{L}^N \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N),$$
où le membre de gauche représente l'intégrale de Riemann de f, et le membre de droite représente l'intégrale de f au sens de Lebesgue par rapport à la mesure $\mathcal{L}^N$.

2. Soient $a < b$ des réels. Construire une suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n = 1$ dans $[a+1/n, b-1/n]$ et $\varphi_n = 0$ dans $\mathbb{R} \setminus [a,b]$.
3. Montrer que si $a_i < b_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$, alors
$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) \leq \mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right).$$
4. Montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,N\}$ et tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L}^N(\{x_i = a\}) = 0$. En déduire que
$$\mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) = \mathcal{L}^N\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right).$$
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{L}^N(x+V) = \mathcal{L}^N(V)$. En déduire que $\mathcal{L}^N(x+B) = \mathcal{L}^N(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.
6. Montrer que si λ est une mesure de Radon positive invariante par translation qui satisfait $\lambda([0,1]^N) = 1$, alors $\lambda = \mathcal{L}^N$. (On pourra utiliser le fait que si deux mesures Boréliennes coïncident sur les cubes, alors ces deux mesures sont égales).