TD4: Espaces de Lebesgue

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p_0 < \infty$.

1. Montrer que si $f \in L^{p_0}(X) \cap L^\infty(X)$, alors
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$
2. Soit $f \in L^p(X)$ pour tout $p \in [p_0, \infty[$ telle que $\|f\|_p \to \infty$ quand $p \to \infty$. Montrer que $f \notin L^\infty(X)$.
3. Soit $f \in L^p(X)$ pour tout $p \in [p_0, \infty[$ telle que $f \notin L^\infty(X)$. Montrer que $\|f\|_p \to \infty$ quand $p \to \infty$.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité, i.e. $\mu(X) = 1$. Soit $f : X \to [0, +\infty[$ une fonction dans $L^1(X)$.

1. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que si $\mu(\{f > 0\}) < 1$, alors $\|f\|_p \to 0$ quand $p \to 0$.
2. Montrer que
$$\lim_{p \to 0} \int_X f^p \, d\mu = \mu(\{f > 0\}).$$
3. Montrer que pour tout $p \in]0, 1[$ et pour tout $y \in]0, +\infty[$,
$$\frac{|y^p - 1|}{p} \leq y + |\log y|.$$
4. On suppose dorénavant que $f > 0$ sur X et que $\ln f \in L^1(X)$. Montrer que
$$\lim_{p \to 0} \int_X \frac{f^p - 1}{p} \, d\mu = \int_X \ln f \, d\mu.$$
5. Montrer que
$$\lim_{p \to 0} \|f\|_p = \exp\left(\int_X \ln f \, d\mu \right).$$

Exercice 3. (Continuité de la translation dans $L^p(\mathbb{R}^N)$). On se place dans l'espace mesuré $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mathcal{L}^N)$. Soit $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^N$, on définit la translation de f par
$$\tau_h f(x) := f(x - h) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$
Montrer que
$$\lim_{\|h\| \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$

Exercice 4. (Inégalité de Jensen). Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de probabilité et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe (avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$).

1. Montrer que
$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(s)}{u - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$
pour tout $a \leq s < t < u \leq b$.

2. En déduire que φ et continue et que pour tout $s \in [a, b]$, il existe $\beta_s \in \mathbb{R}$ tel que
$$\varphi(t) \geq \varphi(s) + \beta_s(t - s) \quad \text{pour tout } t \in [a, b].$$

3. Soit $f : X \to [a, b]$ telle que $f \in L^1(X)$. Montrer que $\varphi \circ f$ est mesurable et que
$$\varphi\left(\int_X f \, d\mu\right) \leq \int_X \varphi \circ f \, d\mu.$$