Université Paris Saclay — Master 1
Année 2020-2021 — Analyse, Mathématiques Générales II

TD5: Dualité dans les L^p

Dans les exercices qui suivent, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace mesuré.

Exercice 1. Soient $0 < \alpha < \beta < \infty$ et $a \in L^\infty(X)$ tels que $\alpha \leq a(x) \leq \beta$ pour μ-presque tout $x \in X$.

1. Montrer que l'application

$$(u, v) \in L^2(X) \times L^2(X) \mapsto \langle u, v \rangle := \int_X auv \, d\mu$$

définit un produit scalaire sur $L^2(X)$ équivalent au produit scalaire canonique.

2. Soit $b \in L^2(X)$, on pose

$$\Phi(u) = \int_X (au^2 + bu) \, d\mu \quad \text{pour tout } u \in L^2(X).$$

Vérifier que Φ est bien définie et continue.

3. Soit G un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(X)$. Le problème

$$\inf\{\Phi(u) : u \in G\}$$

admet-il une solution ? Est-elle unique ? Peut-on la caractériser ?

Exercice 2. Pour $u_0 \in L^2(X)$, on considère l'ensemble

$$C := \{u \in L^2(X) : \ u \geq u_0\}.$$

1. Montrer que C est un convexe fermé de $L^2(X)$ et donner une formule pour la projection orthogonale P_C sur C.
2. Mêmes questions avec $C := \{u \in L^2(X) : \ u_1 \geq u \geq u_0\}$ où u_1 est une fonction de $L^2(X)$.

Exercice 3. (Dual de $L^p(X)$ pour $0 < p < 1$).

1. Pour tout $0 < p < 1$, on définit

$$d(f, g) = \int_X |f - g|^p \, d\mu.$$

Montrer que d est une distance sur $L^p(X)$ et que $L^p(X)$ est un espace métrique complet.

2. On suppose maintenant que $X = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}([0, 1])$ et $\mu = \mathcal{L}^1$. Soient $V \subset L^p([0, 1])$ un ouvert convexe de $L^p(X)$ contenant 0, $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset V$, et $f \in L^p([0, 1])$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^{p-1} d(f, 0) < r$.

3. Montrer qu'il existe des points $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ tels que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|^p \, dt = n^{-1} d(f, 0).$$

4. Soit $g_i := n f \mathbf{1}_{(x_{i-1}, x_i]}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $g_i \in V$ et que

$$d(g_i, 0) = n^{p-1} d(f, 0) < r.$$

5. Montrer que $f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g_i \in V$ et en déduire que $V = L^p([0,1])$.
6. En déduire que $(L^p([0,1]))' = \{0\}$.