

# Chapitre 1

## Eléments de théorie géométrique de la mesure

Dans ce chapitre, on considère  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert et on désigne par  $\mathcal{B}(\Omega)$  la tribu Borélienne sur  $\Omega$ .

### 1.1 Les mesures de Radon

**Définition 1.1.1.** On dit que  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  est une *mesure Borélienne positive* si

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (ii) pour toute suite  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de Boréliens deux à deux disjoints,

$$\mu \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} B_j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j).$$

Si de plus  $\mu(K) < \infty$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ , on dit que  $\mu$  est une *mesure de Radon positive*.

On notera par la suite  $\mathcal{L}^N$  la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^N$  qui est une mesure de Radon positive. Les mesures de Radon positives jouissent de propriétés de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par la mesure d'ouverts ou de fermés.

**Proposition 1.1.2.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon positive sur  $\Omega$ . Alors, pour tout Borélien  $A \subset \Omega$

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compact}\}, \\ &= \inf\{\mu(U) : A \subset U \subset \Omega, U \text{ ouvert}\}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On suppose tout d'abord que  $\mu(A) < \infty$  et on pose  $\nu(B) := \mu(A \cap B)$  pour tout Borélien  $B \subset \mathbb{R}^N$ , ce qui définit une mesure Borélienne finie sur  $\mathbb{R}^N$ .

On considère la famille

$$\mathcal{F} := \left\{ B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \right\}.$$

La famille  $\mathcal{F}$  contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que  $\mathcal{F}$  est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'éléments de  $\mathcal{F}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un ensemble fermé  $C_n \subset B_n$  tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

L'ensemble  $C := \bigcap_n C_n$  est fermé et

$$\nu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \setminus C\right) = \nu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \setminus \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon,$$

ce qui montre que  $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$ . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=0}^m C_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) \\ &\leq \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour  $m$  assez grand, on a donc en posant  $C' := \bigcup_{n=0}^m C_n$

$$\nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \setminus C'\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre,  $C'$  étant fermé, que  $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$ .

Comme tout ouvert de  $\mathbb{R}^N$  peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles fermés, on en déduit que  $\mathcal{F}$  contient tous les ouverts de  $\mathbb{R}^N$ .

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} : {}^c B \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que  $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}$  est stable par union dénombrable. Par conséquent,  $\mathcal{G}$  est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans  $\mathcal{G}$ , on en déduit que la tribu  $\mathcal{G}$  contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout  $B \subset \mathbb{R}^N$  Borélien et tout  $\varepsilon > 0$  il existe un ensemble fermé  $C \subset B$  tel que  $\nu(B \setminus C) < \varepsilon$ . En particulier, pour  $B = A$ , on obtient un fermé  $C \subset A$  tel que  $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $K_n := C \cap \overline{B}(0, n)$  qui est un compact inclu dans  $A$ . Comme  $\mu(C) \leq \mu(A) < \infty$ , on a  $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$ . Pour  $n$  assez grand, on obtient donc un compact  $K_n \subset A$  tel que  $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$ .

Si  $\mu(A) = \infty$ , on décompose  $A = \bigcup_j (A \cap C_j)$  où  $C_j = \{x \in \mathbb{R}^N : j \leq |x| < j+1\}$ . Comme  $\mu$  est une mesure de Radon,  $\mu(A \cap C_j) < \infty$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . Par ce qui a été montré précédemment, il existe un compact  $K_j \subset A \cap C_j$  tel que  $\mu(K_j) \geq \mu(A \cap C_j) - 2^{-j}$ . Par convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{j=0}^n K_j\right) = \mu\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(K_j) \geq \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mu(A \cap C_j) - 2^{-j}) = \infty = \mu(A).$$

Comme  $\bigcup_{j=0}^n K_j$  est compact, on obtient ainsi l'approximation intérieure par des compacts.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. Soit  $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite exhaustive d'ouverts relativement compacts dans  $\Omega$  tels que  $\overline{\omega_n} \subset \omega_{n+1}$  et  $\bigcup_n \omega_n = \Omega$ . L'ensemble  $\omega_n \setminus A$  étant un Borélien de mesure finie (car  $\mu$  est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé  $C_n \subset \omega_n \setminus A$  tel que  $\mu((\omega_n \setminus A) \setminus C_n) < \varepsilon/2^n$ . Posons  $U_n = \omega_n \setminus C_n$  qui est un ouvert avec  $\omega_n \cap A \subset U_n$  et tel que  $\mu(U_n \setminus A) < \varepsilon/2^n$ . Si on pose  $U := \bigcup_n U_n$  qui est un ouvert, on obtient que  $A \subset U$  et  $\mu(U \setminus A) \leq \sum_n \mu(U_n \setminus A) < \varepsilon$ .  $\square$

Soit  $\lambda$  une mesure de Radon positive sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . On rappelle que le *support* de  $\lambda$  est donné par

$$\text{Supp}(\lambda) := \{x \in \Omega : \lambda(B_\varrho(x)) > 0 \text{ pour tout } \varrho > 0\}.$$

**Lemme 1.1.3.** *L'ensemble  $\text{Supp}(\lambda)$  est fermé dans  $\Omega$  et  $\lambda(\Omega \setminus \text{Supp}(\lambda)) = 0$ .*

*Démonstration.* Si  $x \notin \text{Supp}(\lambda)$ , alors il existe  $\varrho > 0$  tel que  $B_\varrho(x) \subset \Omega$  et  $\lambda(B_\varrho(x)) = 0$ . Par conséquent, si  $y \in B_\varrho(x)$  alors il existe  $R > 0$  tel que  $B_R(y) \subset B_\varrho(x)$  de sorte que  $\lambda(B_R(y)) \leq \lambda(B_\varrho(x)) = 0$ . Par conséquent  $B_\varrho(x) \subset \Omega \setminus \text{Supp}(\lambda)$ , ce qui montre que  $\Omega \setminus \text{Supp}(\lambda)$  est ouvert et donc que  $\text{Supp}(\lambda)$  est fermé dans  $\Omega$ .

Par ailleurs, soit  $K$  un compact contenu dans  $\Omega \setminus \text{Supp}(\lambda)$ . Par compacité, il existe un nombre fini de points  $x_1, \dots, x_m \in K$  et  $r_1, \dots, r_m \in (0, \text{dist}(K, \partial\Omega))$  tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^m B_{r_i}(x_i), \quad \lambda(B_{r_i}(x_i)) = 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m.$$

Par conséquent,  $\lambda(K) \leq \sum_{i=1}^m \lambda(B_{r_i}(x_i)) = 0$ . Par passage au supremum parmi tous les compacts  $K \subset \Omega \setminus \text{Supp}(\lambda)$ , on en déduit que  $\lambda(\Omega \setminus \text{Supp}(\lambda)) = 0$ .  $\square$

**Définition 1.1.4.** On dit que  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^d$  est une *mesure de Radon vectorielle* si

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (ii) pour toute suite  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de Boréliens deux à deux disjoints, la série vectorielle  $\sum_j \mu(B_j)$  converge et sa somme est donnée par

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu(B_j) = \mu \left( \bigcup_{j=0}^{\infty} B_j \right).$$

On définit, pour tout  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ , la *variation* de  $\mu$  par

$$|\mu|(B) = \sup \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\mu(B_j)| : B_j \in \mathcal{B}(\Omega), B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pour tout } i \neq j, B = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_j \right\}.$$

**Proposition 1.1.5.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon vectorielle, alors  $|\mu|$  est une mesure positive finie qui satisfait*

$$|\mu(B)| \leq |\mu|(B) \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}(\Omega).$$

*Démonstration.* Par définition de  $|\mu|$ , on a bien l'inégalité  $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$  pour tout  $B \in \mathcal{B}(\Omega)$ .

Montrons tout d'abord que  $|\mu|$  est une mesure Borélienne. Il est clair que  $|\mu|(\emptyset) = 0$ . Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Boréliens deux à deux disjoints contenus dans  $\Omega$  et posons  $A := \bigcup_n A_n$ . Si  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  désigne une partition Borélienne de  $A$ , alors pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $(A_n \cap B_j)_{n \in \mathbb{N}}$  est une partition Borélienne de  $B_j$  et il vient que  $\mu(B_j) = \sum_n \mu(A_n \cap B_j)$  et donc

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\mu(B_j)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\mu(A_n \cap B_j)| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\mu(A_n \cap B_j)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n).$$

Par passage au supremum parmi toutes les partitions Boréliennes  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $A$ , il vient

$$|\mu|(A) \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n).$$

Pour montrer l'autre inégalité, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , soit  $(E_j^n)_{j \in \mathbb{N}}$  une partition Borélienne de  $A_n$  telle que

$$|\mu|(A_n) \leq \sum_{j=0}^{\infty} |\mu(E_j^n)| + 2^{-n}\varepsilon.$$

Comme  $(E_j^n)_{(j,n) \in \mathbb{N}^2}$  est une partition Borélienne de  $A$ , il vient

$$|\mu|(A) \geq \sum_{j,n=0}^{\infty} |\mu(E_j^n)| = \sum_{n=0}^{\infty} |\mu|(A_n) - 2\varepsilon$$

et l'inégalité vient par passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour établir que  $|\mu|$  est une mesure finie, il suffit de considérer le cas  $d = 1$ . Supposons que  $|\mu|(\Omega) = \infty$ , on peut alors trouver une partition Borélienne  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\Omega$  telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(X_n)| \geq 2(|\mu(\Omega)| + 1).$$

Soient  $E_1 = \bigcup_{\mu(X_n) \geq 0} X_n$  et  $E_2 = \bigcup_{\mu(X_n) < 0} X_n$  de sorte que  $\Omega = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ,  $\mu(E_1) \geq 0$ ,  $\mu(E_2) \leq 0$  et  $|\mu(E_1)| + |\mu(E_2)| \geq 2(|\mu(\Omega)| + 1)$ . Il existe donc  $i_0 = 1$  ou  $2$  tel que  $|\mu(E_{i_0})| \geq |\mu(\Omega)| + 1$  et on pose  $E = E_{i_0}$ ,  $F = \Omega \setminus E$ . On a donc  $|\mu|(E) \geq |\mu(E)| > 1$ ,  $|\mu|(F) \geq |\mu(F)| = |\mu(\Omega) - \mu(E)| \geq |\mu(E)| - |\mu(\Omega)| > 1$ . Comme  $\infty = |\mu|(\Omega) = |\mu|(E) + |\mu|(F)$ , il vient que  $|\mu|(E) = \infty$  ou  $|\mu|(F) = \infty$ . Supposons sans restreindre la généralité que  $|\mu|(F) = \infty$  et posons  $Y_0 = E$ . On reproduit l'argument précédent avec  $F$  au lieu de  $\Omega$  (remarquons que nous n'avons pas utilisé le fait que  $\Omega$  est ouvert). On construit alors par récurrence une suite  $(Y_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de Boréliens deux à deux disjoints tels que  $|\mu(Y_j)| > 1$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  ce qui montre que la série de terme général  $(\mu(Y_j))_{j \in \mathbb{N}}$  ne peut pas être convergente. On aboutit donc à une contradiction qui montre bien que  $|\mu|(\Omega) < \infty$ .  $\square$

Un exemple typique de mesure vectorielle est celui des mesures à densité.

**Définition 1.1.6.** Soit  $\lambda$  une mesure de Radon positive sur  $\Omega$  et  $f \in L^1_\lambda(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . On définit la mesure de Radon vectorielle  $\mu := f\lambda$  par

$$\mu(A) = \int_A f d\lambda \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

On montre effectivement que  $f\lambda$  est une mesure de Radon vectorielle par convergence dominée. Le résultat suivant détermine la mesure variation d'une mesure à densité.

**Proposition 1.1.7.** Soit  $\mu = f\lambda$  la mesure vectorielle définie précédemment. Alors, la mesure variation de  $\mu$  est donnée par  $|\mu| = |f|\lambda$ , i.e.

$$|\mu|(A) = \int_A |f| d\lambda \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}(\Omega).$$

*Démonstration.* L'inégalité  $|\mu| \leq |f|\lambda$  est immédiate. Pour montrer l'inégalité opposée, on considère un sous-ensemble  $D = \{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  dénombrable et dense dans la sphère  $\mathbb{S}^{N-1} = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1\}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \Omega$ , on définit

$$\sigma(x) := \min\{k \in \mathbb{N} : f(x) \cdot z_k \geq (1 - \varepsilon)|f(x)|\}$$

et on pose  $A_k = \sigma^{-1}(\{k\}) \cap A$  où  $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ . Comme

$$A_k = \{x \in A : f(x) \cdot z_k \geq (1 - \varepsilon)|f(x)|\}$$

et  $f$  est une fonction Borélienne, il vient que  $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  forme une partition Borélienne de  $A$ . Par conséquent,

$$(1 - \varepsilon) \int_A |f| d\lambda = \sum_{k \in \mathbb{N}} (1 - \varepsilon) \int_{A_k} |f| d\lambda \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k \cdot f(x) \lambda(A_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} z_k \cdot \mu(A_k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\mu(A_k)| \leq |\mu|(A),$$

ce qui conclut la preuve du résultat.  $\square$

Si  $d = 1$ , on parle aussi de mesure de Radon réelle. On pose alors

$$\mu^\pm := \frac{|\mu| \pm \mu}{2}$$

qui définissent des mesures positives finies qui satisfont

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

L'intégration d'une fonction Borélienne positive (ou  $|\mu|$ -intégrable)  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  par rapport à  $\mu$  est alors définie par

$$\int_\Omega f d\mu := \int_\Omega f d\mu^+ - \int_\Omega f d\mu^-.$$

Si  $d \geq 2$  et  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  est une mesure de Radon vectorielle, on définit l'intégrale

$$\int_\Omega f d\mu := \left( \int_\Omega f d\mu_1, \dots, \int_\Omega f d\mu_d \right).$$

On a toujours l'inégalité

$$\left| \int_\Omega f d\mu \right| \leq \int_\Omega |f| d|\mu|.$$

## 1.2 Les mesures de Radon par dualité

On désigne par  $\mathcal{C}_c(\Omega)$  l'ensemble des fonctions continues à support compact inclus dans  $\Omega$ . Toute mesure de Radon positive  $\mu$  définit une forme linéaire sur  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ . En effet, l'intégrale

$$\int_\Omega f d\mu$$

est bien définie puisque, en notant  $K = \text{Supp}(f)$  le support (compact) de  $f$ , on a

$$\int_K |f| d\mu \leq \mu(K) \max_K |f| < \infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \mapsto \int_\Omega f d\mu$$

définit une forme linéaire positive  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ , *i.e.*,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ et tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (1.2.1)$$

$$L(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega) \text{ avec } f \geq 0. \quad (1.2.2)$$

Nous allons en fait montrer que toute forme linéaire positive sur l'espace  $\mathcal{C}_c(\Omega)$  peut être représentée de façon unique par une telle mesure.

**Théorème 1.2.1 (Théorème de représentation de Riesz).** *Soit  $L : \mathcal{C}_c(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire positive (i.e. qui satisfait (1.2.1) et (1.2.2)). Il existe une unique mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\Omega$  telle que*

$$L(f) = \int_{\Omega} f d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega). \quad (1.2.3)$$

Pour tout ouvert  $V \subset \Omega$ , on définit

$$\mu^*(V) := \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1]), \text{Supp}(f) \subset V\}. \quad (1.2.4)$$

Si  $U \subset V$ , alors  $\mu^*(U) \leq \mu^*(V)$  de sorte que l'on peut étendre  $\mu^*$  à n'importe quel ensemble  $E \subset \Omega$  en posant

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu^*(V) : E \subset V \subset \Omega \text{ ouvert}\}.$$

La propriété de croissance de  $\mu^*$  reste vraie au sens où  $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$  pour tout  $E \subset F$ .

**Lemme 1.2.2.** *Pour tout compact  $K \subset \Omega$ , on a*

$$\mu^*(K) = \inf\{L(g) : g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1]), g = 1 \text{ sur } K\}.$$

*En particulier,  $\mu^*(K) < \infty$ . De plus, pour tout ouvert  $U \subset \Omega$ ,*

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) : K \subset U, K \text{ compact}\}.$$

*Démonstration.* Soient  $K \subset \Omega$  un compact et  $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  telle que  $g = 1$  sur  $K$ . Pour tout  $0 < t < 1$ , l'ensemble  $V_t := \{g > t\}$ , qui est ouvert, satisfait  $K \subset V_t$  et  $f \leq t^{-1}g$  pour tout  $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  avec  $\text{Supp}(f) \subset V_t$ . Par conséquent, la croissance de  $L$  montre que

$$\mu^*(K) \leq \mu^*(V_t) = \sup\{L(f) : f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1]) \text{ tel que } \text{Supp}(f) \subset V_t\} \leq t^{-1}L(g) < \infty.$$

En faisant tendre  $t \rightarrow 1^-$ , on obtient  $\mu(K) \leq L(g)$  et donc, par passage à l'infimum en  $g$ ,

$$\mu^*(K) \leq \inf\{L(g) : g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1]), g = 1 \text{ sur } K\}.$$

L'autre inégalité se montre en considérant un ouvert arbitraire  $U \subset \Omega$  contenant  $K$ . Si  $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  est une fonction telle que  $\text{Supp}(f) \subset U$  et  $f = 1$  sur  $K$ , il vient par définition de  $\mu^*$  sur les ouverts que

$$\inf\{L(g) : g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1]), g = 1 \text{ sur } K\} \leq L(f) \leq \mu^*(U),$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à  $U$ , que

$$\inf\{L(g) : g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1]), g = 1 \text{ sur } K\} \leq \mu^*(K).$$

Pour établir la propriété de régularité intérieure sur les ouverts, considérons un ouvert  $U \subset \Omega$ . Alors, par définition de  $\mu^*$  sur les ouverts, pour tout  $\alpha < \mu^*(U)$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  telle que  $\text{Supp}(f) \subset U$  et  $\alpha < L(f)$ . Soit  $K = \text{Supp}(f)$  et  $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  telle que  $g = 1$  sur  $K$ . Comme  $f \leq g$  sur  $\Omega$ , on a  $L(f) \leq L(g)$ , puis par passage à l'infimum par rapport à  $g$ , on obtient que  $L(f) \leq \mu^*(K)$ . Ceci montre l'existence d'un compact  $K \subset U$  tel que  $\alpha < \mu^*(K)$ .  $\square$

A ce stade, nous avons défini une fonction d'ensembles  $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$  qui est finie sur les compacts, qui satisfait, par définition, la propriété de régularité extérieure

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(V) : E \subset V \subset \Omega \text{ ouvert}\} \quad \text{pour tout } E \in \mathcal{P}(\Omega) \quad (1.2.5)$$

et la propriété de régularité intérieure

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) : K \subset U, K \text{ compact}\} \quad \text{pour tout ouvert } U \subset \Omega. \quad (1.2.6)$$

**Lemme 1.2.3.** *La fonction d'ensemble  $\mu^*$  est une mesure extérieure.*

*Démonstration.* On a évidemment que  $\mu^*(\emptyset) = 0$  et  $\mu^*$  est une fonction croissante d'ensemble, i.e. si  $E \subset F$ , alors  $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ . Il s'agit à présent de montrer que  $\mu^*$  est dénombrablement sous-additive, i.e., pour toute suite  $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-ensembles de  $\Omega$ , on a

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Montrons d'abord que si  $V_1$  et  $V_2$  sont des ouverts de  $\Omega$ ,

$$\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2). \quad (1.2.7)$$

Soit  $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  avec  $\text{Supp}(g) \subset V_1 \cup V_2$ . Soient  $f_1$  et  $f_2 \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  telles que  $\text{Supp}(f_1) \subset V_1$ ,  $\text{Supp}(f_2) \subset V_2$  et  $f_1 + f_2 = 1$  sur  $\text{Supp}(g)$ . Par conséquent, pour  $i = 1, 2$ ,  $f_i g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ ,  $\text{Supp}(f_i) \subset V_i$  et  $g = f_1 g + f_2 g$  de sorte que, par linéarité de  $L$  et la définition de  $\mu^*$ ,

$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2).$$

Par passage au supremum en  $g$ , on obtient  $\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$ .

Si  $\mu(E_n) = \infty$  pour un certain  $n \geq 1$ , alors le résultat suit. Sinon, si  $\mu(E_n) < \infty$  pour tout  $n$ , alors quelque soit  $\varepsilon > 0$  il existe un ouvert  $V_n$  tel que  $E_n \subset V_n$  et  $\mu^*(V_n) < \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$ . On définit  $V := \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$  et on considère  $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  avec  $\text{Supp}(f) \subset V$ . Comme  $\text{Supp}(f)$  est compact, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^p V_n$ . En itérant (1.2.7), il vient

$$L(f) \leq \mu^* \left( \bigcup_{n=1}^p V_n \right) \leq \sum_{n=1}^p \mu^*(V_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quelque soit  $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  avec  $\text{Supp}(f) \subset V$ , et  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset V$ , on en déduit que

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right) \leq \mu^*(V) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

ce qui montre la dénombrable sous-additivité, le paramètre  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire.  $\square$

D'après le Théorème de Carathéodory (voir le Théorème 3.1.3), la classe  $\mathcal{A}$  des ensembles  $\mu^*$ -mesurables, i.e., l'ensemble des parties  $A \subset \Omega$  qui satisfont

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{pour tout } E \subset \Omega,$$

est une tribu sur  $\Omega$ , et la restriction  $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$  de  $\mu^*$  à cette tribu est une mesure. De plus, pour tout  $A, B \subset \Omega$  avec  $\text{dist}(A, B) > 0$ , on a

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

En effet, par sous-additivité de  $\mu^*$ , il suffit de montrer que  $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ . Soit  $W \subset \Omega$  un ouvert tel que  $A \cup B \subset W$ . Comme  $\text{dist}(A, B) > 0$ , il existe des ouverts  $U$  et  $V$  tels que  $A \subset U$ ,  $B \subset V$ ,  $U \cup V \subset W$  et  $U \cap V = \emptyset$ . Par définition de  $\mu^*$  sur les ouverts, on a

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U \cup V) \geq \mu^*(U) + \mu^*(V) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts  $W \supset A \cup B$ , on obtient le résultat voulu. Une application immédiate de la Proposition 3.1.4 montre que  $\mathcal{B}(\Omega) \subset \mathcal{A}$ . Par conséquent, la restriction

de  $\mu$  à  $\mathcal{B}(\Omega)$  est une mesure Borélienne. Comme par le Lemme 1.2.2, on a  $\mu(K) = \mu^*(K) < \infty$  (puisque les compacts sont Boréliens), on en déduit que  $\mu$  est une mesure de Radon positive.

Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve du Théorème de Représentation de Riesz.

*Démonstration du Théorème 1.2.1.* Il reste à établir la propriété de représentation (1.2.3). Soit  $f \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ , par linéarité de  $L$ , il suffit d'établir que

$$L(f) \leq \int_{\Omega} f d\mu. \quad (1.2.8)$$

Soit  $K := \text{Supp}(f)$  et  $[a, b]$  un intervalle compact de  $\mathbb{R}$  qui contient  $f(K)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  tels que  $y_0 < a = y_1 < \dots < y_n = b$  et  $\max_{1 \leq i \leq n} (y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$ . On définit, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$

$$B_i := f^{-1}([y_{i-1}, y_i]) \cap K.$$

Comme  $f$  est continue, les ensembles  $B_i$  constituent une partition Borélienne de  $K$ . D'après la propriété de régularité extérieure (1.2.5), il existe un ouvert  $V_i$  contenant  $B_i$  tel que  $\mu(V_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$ . Par ailleurs, l'ouvert  $W_i = f^{-1}([y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon])$  contenant  $B_i$ , on obtient en posant  $U_i = V_i \cap W_i$  un ouvert contenant  $B_i$  et satisfaisant

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sup_{U_i} f \leq y_i + \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Comme  $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$  est un recouvrement ouvert du compact  $K$ , on peut trouver une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, *i.e.* des fonctions  $h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  telles que  $\text{Supp}(h_i) \subset U_i$  et  $\sum_{i=1}^n h_i = 1$  sur  $K$ . Par conséquent,  $f = \sum_{i=1}^n h_i f$  et  $0 \leq h_i f \leq (y_i + \varepsilon)h_i$  dans  $\Omega$ , puis par linéarité et croissance de  $L$ , il vient

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon)L(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon)L(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n L(h_i).$$

Comme  $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  est telle que  $\sum_{i=1}^n h_i = 1$  sur  $K$ , le Lemme 1.2.2 montre que

$$\sum_{i=1}^n L(h_i) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) \geq \mu(K).$$

Par ailleurs, la définition de  $\mu^*$  sur les ouverts (et donc de  $\mu$ ) montre  $L(h_i) \leq \mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$ , de sorte que

$$L(f) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \left( \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n} \right) - |a| \mu(K).$$

Comme  $\{B_1, \dots, B_n\}$  est une partition de  $K$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} L(f) &\leq \sum_{i=1}^n y_i \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + \mu(K)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\ &= \int_{\Omega} f d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)), \end{aligned}$$



ce qui prouve (1.2.8), le paramètre  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire.

Établissons enfin l'unicité. Soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux mesures de Radon positives satisfaisant la conclusion du Théorème de Représentation de Riesz. Par les propriétés de régularité (1.2.5) et (1.2.6), il suffit d'établir que  $\mu_1(K) = \mu_2(K)$  pour tout compact  $K \subset \Omega$ . Soit  $\varepsilon > 0$  et  $K \subset \Omega$  un compact. D'après (1.2.5), il existe un ouvert  $V$  contenant  $K$  tel que  $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$ . Par le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction  $f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$  telle que  $f = 1$  sur  $K$  et  $\text{Supp}(f) \subset V$  d'où  $\chi_K \leq f \leq \chi_V$ . Il vient alors

$$\mu_1(K) = \int_{\Omega} \chi_K d\mu_1 \leq \int_{\Omega} f d\mu_1 = L(f) = \int_{\Omega} f d\mu_2 \leq \int_{\Omega} \chi_V d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Donc  $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$  et en échangeant les rôles de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  on en déduit que cette inégalité est une égalité.  $\square$

Pour étendre ce résultat à des formes linéaires non nécessairement signées, il est nécessaire d'imposer une propriété de continuité. L'espace  $\mathcal{C}_c(\Omega; \mathbb{R}^d)$  n'étant pas un Banach, il convient de le fermer pour la topologie de la norme uniforme sur  $\overline{\Omega}$ . On définit alors

$$\mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d) = \overline{\mathcal{C}_c(\Omega; \mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{\infty}}$$

qui est alors un espace de Banach séparable. Par ailleurs une fonction  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d)$  si et seulement si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  est continue et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un compact  $K_{\varepsilon} \subset \Omega$  tel que  $|f| < \varepsilon$  sur  $\Omega \setminus K_{\varepsilon}$  ( $f$  tend vers 0 sur le bord de  $\Omega$ ).

**Définition 1.2.4.** L'espace des mesures de Radon bornées sur  $\Omega$ , noté  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , est le dual topologique de l'espace de Banach  $\mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ .

Grâce au Théorème de Représentation de Riesz (Théorème 1.2.1), on peut caractériser l'espace des mesures de Radon bornées.

**Théorème 1.2.5.** *Pour tout  $L \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , il existe une unique mesure de Radon vectorielle  $\mu$  sur  $\Omega$  telle que*

$$L(f) = \int_{\Omega} f \cdot d\mu := \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} f_j d\mu_j \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

De plus, en notant  $|\mu|$  la mesure variation de  $\mu$ , on a

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)} = |\mu|(\Omega).$$

Commençons par établir que toute forme linéaire continue sur  $\mathcal{C}_0(\Omega) = \mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R})$  (pour  $d = 1$ ) peut s'écrire comme la différence entre deux formes linéaires positives.

**Lemme 1.2.6.** *Pour tout  $L \in \mathcal{M}(\Omega)$ , il existe des formes linéaires continues positives  $L^+$  et  $L^-$  sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$  telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

*Démonstration.* Définissons le cône  $\mathcal{C}^+ := \{f \in \mathcal{C}_0(\Omega) : f \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$  et pour tout  $f \in \mathcal{C}^+$ ,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : g \in \mathcal{C}^+, g \leq f\}.$$

**Étape 1 :**  $L^+$  est positive et finie sur  $\mathcal{C}^+$ . Soit  $f \in \mathcal{C}^+$ , comme  $0 \in \mathcal{C}^+$ , on a  $L^+(f) \geq 0$ . Soit maintenant  $g \in \mathcal{C}^+$  telle que  $0 \leq g \leq f$ . Par continuité de  $L$ , on a  $L(g) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|g\|_{\infty} \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|f\|_{\infty}$ , et par passage au sup en  $g$ , on obtient que  $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|f\|_{\infty} < \infty$ .

**Étape 2 :**  $L^+$  est additive sur  $\mathcal{C}^+$ . Soient  $f_1$  et  $f_2 \in \mathcal{C}^+$  et  $g \in \mathcal{C}^+$  telles que  $0 \leq g \leq f_1 + f_2$ . On décompose  $g$  comme  $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$ , où  $\min(f_1, g) \leq f_1$  et  $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$ . Comme  $\min(f_1, g)$  et  $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$ , alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au supremum en  $g$ ,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité, on se donne un  $\varepsilon > 0$ . Par définition de  $L^+$ , il existe  $g_1$  et  $g_2 \in \mathcal{C}^+$  tels que  $0 \leq g_i \leq f_i$  et  $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$  pour  $i = 1, 2$ . Comme  $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$ , il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résultat suit par passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Étape 3 :** *Définition et additivité de  $L^+$  sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ .* Soit  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ , on décompose  $f$  comme la différence entre sa partie positive et négative  $f = f^+ - f^-$  avec  $f^\pm \in \mathcal{C}^+$ . On pose alors  $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$ . Si  $f$  et  $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ , alors  $(f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$  de sorte que  $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$ . D'où, par additivité de  $L^+$  sur  $\mathcal{C}^+$ ,

$$L^+((f + g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f + g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc  $L^+(f + g) = L^+(f) + L^+(g)$ . En particulier, comme  $(-f)^\pm = f^\mp$ , alors  $L^+(-f) = -L^+(f)$ .

**Étape 4 :**  $L^+$  est continue sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ . Soit  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ . Comme  $L^+$  est positive, alors  $L^+(|f| \pm f) \geq 0$ , donc par additivité de  $L^+$  sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ ,  $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$ , i.e.,  $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$ . Soient maintenant  $f_1$  et  $f_2 \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ , alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

**Étape 5 :**  $L^+$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ . L'additivité de  $L^+$  montre que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L^+(nf) = nL^+(f)$ . Comme  $L^+(-f) = -L^+(f)$ , l'identité précédente a en fait lieu pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Si  $r = p/q \in \mathbb{Q}$  avec  $p, q \in \mathbb{Z}$  et  $q \neq 0$ , alors  $pL^+(f) = L^+(pf) = L^+(qrf) = qL^+(rf)$ , d'où  $L^+(rf) = rL^+(f)$ . La continuité de  $L^+$  et la densité  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  implique que  $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Étape 6 :**  $L^-$  est une forme linéaire continue positive sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ . On définit  $L^- := L^+ - L$ . Alors  $L^-$  est clairement une forme linéaire continue sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ . De plus, par définition de  $L^+$ ,  $L^+(f) \geq L(f)$  pour tout  $f \in \mathcal{C}^+$ , ce qui montre que  $L^-$  est également positive.  $\square$

*Démonstration du Théorème 1.2.5.* Si  $d = 1$ , d'après le Lemme 1.2.6, on peut décomposer  $L \in \mathcal{M}(\Omega)$  comme  $L = L^+ - L^-$  où  $L^\pm$  sont des formes linéaires continues positives sur  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ . D'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe deux mesures de Radon positives  $\mu^\pm$  telles que

$$L^\pm(f) = \int_\Omega f d\mu^\pm \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

De plus, par définition de  $\mu^\pm$  sur les ouverts (voir (1.2.4)) et par définition de la norme dans  $\mathcal{M}(\Omega)$ , on a

$$\mu^\pm(\Omega) = \sup_{f \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])} L^\pm(f) \leq \|L^\pm\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < \infty,$$

ce qui montre que  $\mu^\pm$  sont des mesures finies. Par conséquent, en posant  $\mu := \mu^+ - \mu^-$ ,  $\mu$  définit une mesure de réelle telle que

$$L(f) = \int_{\Omega} f d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Cette inégalité peut être étendue à toute fonction  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$  par densité de  $\mathcal{C}_c(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ , par continuité de  $L$  et par convergence dominée.

Si  $d \geq 2$ , on applique l'argument précédent aux formes linéaires continues  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega) \mapsto L_j(f) := L(fe_j)$ , pour tout  $1 \leq j \leq d$ , où  $e_j$  désigne le  $j$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ . On montre alors l'existence de mesures de Radon réelles  $\mu_j$  sur  $\Omega$  telles que  $L_j(f) = \int_{\Omega} f d\mu_j$  pour tout  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ . On pose alors  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  qui définit une mesure de Radon vectorielle et qui satisfait, pour tout  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d)$

$$L(f) = L\left(\sum_{j=1}^d f_j e_j\right) = \sum_{j=1}^d L(f_j e_j) = \sum_{j=1}^d L_j(f_j) = \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} f_j d\mu_j = \int_{\Omega} f \cdot d\mu.$$

Si  $f \in \mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d)$  est telle que  $\|f\|_{\infty} \leq 1$ , alors on a

$$|L(f)| \leq \int_{\Omega} |f| d|\mu| \leq |\mu|(\Omega),$$

puis par passage au supremum par rapport à  $f$ ,  $\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \leq |\mu|(\Omega)$ . Réciproquement, soit  $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  une partition Borélienne de  $\Omega$ . On pose

$$f := \sum_{i \in \mathbb{N}, |\mu(B_i)| > 0} \frac{\mu(B_i)}{|\mu(B_i)|} \chi_{B_i}.$$

Comme  $|\mu|$  est une mesure finie et  $|f| \leq 1$ , on en déduit que  $f \in L^1_{|\mu|}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . Par densité de  $\mathcal{C}_c(\Omega; \mathbb{R}^d)$  dans  $L^1_{|\mu|}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; \mathbb{R}^d)$  telle que  $|g| \leq 1$  et  $\int_{\Omega} |f - g| d|\mu| \leq \varepsilon$ . Par conséquent

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \geq \int_{\Omega} g \cdot d\mu \geq \int_{\Omega} f \cdot d\mu - \varepsilon = \sum_{i \in \mathbb{N}} |\mu(B_i)| - \varepsilon.$$

Par passage au supremum parmi toutes les partitions Boréliennes de  $\Omega$ , il vient

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \geq |\mu|(\Omega) - \varepsilon,$$

ce qui implique,  $\varepsilon > 0$  étant arbitraire, que  $\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \geq |\mu|(\Omega)$ .

Concernant l'unicité, soient  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux mesures vectorielles telles que

$$\int_{\Omega} f d\mu_1 = \int_{\Omega} f d\mu_2 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

On pose  $\lambda := |\mu_1| + |\mu_2|$  et on considère un Borélien  $A \subset \Omega$ . Par densité de  $\mathcal{C}_c(\Omega)$  dans  $L^1_{\lambda}(\Omega)$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction  $f_{\varepsilon} \in \mathcal{C}_c(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} |f_{\varepsilon} - \chi_A| d\lambda \leq \varepsilon.$$

On en déduit alors que

$$\int_{\Omega} |f_{\varepsilon} - \chi_A| d|\mu_1| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |f_{\varepsilon} - \chi_A| d|\mu_2| \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite dans

$$\int_{\Omega} f_{\varepsilon} d\mu_1 = \int_{\Omega} f_{\varepsilon} d\mu_2$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on en déduit que  $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ .  $\square$

### 1.3 Convergence de mesures

Le Théorème de Représentation de Riesz permet d'identifier le dual topologique de  $\mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , noté  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , à l'ensemble des mesures de Radon vectorielles que nous appellerons dorénavant l'espace des mesures de Radon bornées. On définit également l'espace des mesures de Radon,  $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , comme l'ensemble des applications  $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^d$  telles que  $\mu \in \mathcal{M}(\omega; \mathbb{R}^d)$  pour tout ouvert borné  $\omega$  tel que  $\bar{\omega} \subset \Omega$ .

En tant qu'espace dual, on peut considérer la topologie faible\* sur  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ .

**Définition 1.3.1.** (i) Une suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  converge faible\* vers  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  si

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot d\mu_n \rightarrow \int_{\Omega} \varphi \cdot d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

(ii) Une suite  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  converge localement faible\* vers  $\mu \in \mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  si

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot d\mu_n \rightarrow \int_{\Omega} \varphi \cdot d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

La norme étant faible\* semi-continue inférieurement, il vient que si  $\mu_n \rightharpoonup \mu$  faible\* dans  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ , alors

$$|\mu|(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(\Omega).$$

L'espace  $\mathcal{C}_0(\Omega; \mathbb{R}^d)$  étant séparable, le résultat suivant provient d'une application immédiate du Théorème de Banach-Alaoglu.

**Théorème 1.3.2.** Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée d'éléments de  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . Alors, il existe une sous-suite  $(\mu_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  telles que  $\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu$  faible\* dans  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ .

Pour les suites de mesures positives, nous avons les conditions suivantes de semi continuité le long d'ouverts ou de compacts.

**Proposition 1.3.3.** Si  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de mesures de Radon positives dans  $\Omega$  qui converge localement faible\* dans  $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega)$  vers une mesure de Radon positive  $\mu$ , alors

$$\mu(U) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \quad \text{pour tout ouvert } U \subset \Omega,$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu(K) \quad \text{pour tout compact } K \subset \Omega,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) = \mu(E) \quad \text{pour tout Borélien borné } E \text{ tel que } \bar{E} \subset \Omega \text{ et } \mu(\partial E) = 0.$$

*Démonstration.* Si  $U \subset \Omega$  est ouvert, par régularité intérieure de  $\mu$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  on peut trouver un compact  $C \subset U$  tel que  $\mu(C) \geq \mu(U) - \varepsilon$ . Soit  $\psi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$  telle que  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi = 1$  sur  $C$  et  $\psi = 0$  sur  $\Omega \setminus U$ . Alors

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi d\mu_n = \int_{\Omega} \psi d\mu \geq \mu(C) \geq \mu(U) - \varepsilon.$$

Le résultat s'obtient par passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si  $K \subset \Omega$  est compact, par régularité extérieure de  $\mu$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un ouvert  $V \subset \Omega$  tel que  $K \subset V$  et  $\mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon$ . On peut trouver une fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$  telle que  $0 \leq \varphi \leq 1$ ,  $\varphi = 1$  sur  $K$  et  $\varphi = 0$  sur  $\Omega \setminus V$ . Par conséquent

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi d\mu_n = \int_{\Omega} \varphi d\mu \leq \mu(V) \leq \mu(K) + \varepsilon.$$

On obtient le résultat en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Si  $E \subset \Omega$  est un Borélien borné tel que  $\overline{E} \subset \Omega$  et  $\mu(\partial E) = 0$ , alors

$$\mu(E) = \mu(\overset{\circ}{E}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overset{\circ}{E}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{E}) \leq \mu(\overline{E}) = \mu(E),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition.  $\square$

Dans le cas d'une suite de mesures vectorielles, nous avons un analogue au dernier point de la Proposition 1.3.3.

**Proposition 1.3.4.** *Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  telle que  $\mu_n \rightharpoonup \mu$  faible\* dans  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  et  $|\mu_n| \rightharpoonup \lambda$  faible\* dans  $\mathcal{M}(\Omega)$  où  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  et  $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$  est une mesure positive. Alors  $\lambda \geq |\mu|$  et si  $E$  est un Borélien borné tel que  $\overline{E} \subset \Omega$  et  $\lambda(\partial E) = 0$ , alors*

$$\mu_n(E) \rightarrow \mu(E).$$

*Démonstration.* Soit  $U$  un ouvert tel que  $\overline{U} \subset \Omega$ . Pour  $t > 0$  petit, on pose  $U_t := \{x \in U : \text{dist}(x, \partial U) > t\}$  de sorte que  $\overline{U}_t \subset U$ . Par semi-continuité inférieure de la variation, il vient, pour tout  $t > 0$ ,

$$|\mu|(U_t) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|(U_t) \leq \lambda(\overline{U}_t) \leq \lambda(U).$$

Par passage à la limite quand  $t \rightarrow 0$ , il vient que  $|\mu|(U) \leq \lambda(U)$ . Par régularité extérieure des mesures de Radon positives  $|\mu|$  et  $\lambda$ , on en déduit que  $|\mu| \leq \lambda$ .

On écrit

$$\mu_n = (\mu_{n,1}, \dots, \mu_{n,d}), \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$$

et, pour tout  $1 \leq i \leq d$ ,  $\mu_{n,i} = \mu_{n,i}^+ - \mu_{n,i}^-$  avec  $|\mu_{n,i}| = \mu_{n,i}^+ + \mu_{n,i}^-$ . Quitte à extraire une sous-suite, il existe une mesure de Radon positive  $\nu_i \in \mathcal{M}(\Omega)$  telle que  $\mu_{n,i}^+ \rightharpoonup \nu_i$  faible\* dans  $\mathcal{M}(\Omega)$ . De plus, comme  $|\mu_n| \geq \mu_{n,i}^+$ , il vient par passage à la limite que  $\lambda \geq \nu_i$ . En particulier, comme  $\nu_i(\partial E) \leq \lambda(\partial E) = 0$ , on en déduit de la Proposition (1.3.3) que

$$\mu_{n,i}^+(E) \rightarrow \nu_i(E). \tag{1.3.1}$$

De même, comme  $\mu_{n,i}^- = \mu_{n,i}^+ - \mu_{n,i} \rightharpoonup \nu_i - \mu_i$  faible\* dans  $\mathcal{M}(\Omega)$  et  $|\mu_n| \geq \mu_{n,i}^-$ , on en déduit que  $\lambda \geq \nu_i - \mu_i$  ce qui implique que

$$\mu_{n,i}^-(E) \rightarrow \nu_i(E) - \mu_i(E). \tag{1.3.2}$$

Le résultat suit en faisant la différence entre (1.3.1) et (1.3.2).  $\square$

Un outil important pour approcher les fonctions, distributions ou mesures est la convolution.

**Définition 1.3.5.** Soit  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  et  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue bornée. On définit la convolution de  $\mu$  et  $f$  par la fonction

$$\mu * f(x) := \int_{\Omega} f(x-y) d\mu(y).$$

Une application importante est celle où  $f = \eta_\varepsilon$  est une famille de noyaux de convolution de la forme

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

où  $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$  est une fonction positive, paire qui satisfait  $\text{Supp}(\eta) \subset B_1(0)$  et  $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(y) dy = 1$ .

**Proposition 1.3.6.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert et  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on définit

$$\mu * \eta_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) d\mu(y) = \varepsilon^{-N} \int_{\Omega} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) d\mu(y)$$

pour  $x \in \Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ . Alors

- (a)  $\mu * \eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^d)$  et  $\partial^\alpha(\mu * \eta_\varepsilon) = \mu * (\partial^\alpha \eta_\varepsilon)$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  ;
- (b) La mesure  $\mu_\varepsilon := (\mu * \eta_\varepsilon) \mathcal{L}^N$  converge localement faible\* vers  $\mu$  dans  $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$  et

$$|\mu_\varepsilon|(A) = \int_A |\mu * \eta_\varepsilon|(x) dx \leq |\mu|(A + B_\varepsilon(0))$$

pour tout Borélien  $A \subset \Omega_\varepsilon$ .

*Démonstration.* (a) On calcule la limite du taux d'accroissement par passage à la limite sous le signe intégrale et convergence dominée, puis on raisonne par récurrence sur  $\alpha$ .

(b) Soient  $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$  et  $\varepsilon > 0$  assez petit tel que  $\text{Supp}(\varphi) \subset \Omega_\varepsilon$ . A l'aide du Théorème de Fubini et de la parité de  $\eta$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mu * \eta_\varepsilon)(x) \varphi(x) dx &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) d\mu(y) \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(y-x) \varphi(x) dx \right) d\mu(y) \\ &= \int_{\Omega} \varphi * \eta_\varepsilon d\mu. \end{aligned}$$

Comme  $\varphi$  est continue à support compact,  $\varphi * \eta_\varepsilon \rightarrow \varphi$  uniformément sur  $\Omega$  et donc, du fait que  $|\mu|$  est une mesure finie,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (\mu * \eta_\varepsilon)(x) \varphi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi * \eta_\varepsilon d\mu = \int_{\Omega} \varphi d\mu,$$

ce qui montre  $\mu_\varepsilon \rightharpoonup \mu$  localement faible\* dans  $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . De plus, comme  $\mu_\varepsilon$  est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a de nouveau par le Théorème de Fubini

$$\begin{aligned} |\mu_\varepsilon|(A) &= \int_A |\mu * \eta_\varepsilon|(x) dx \leq \int_A \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y) d|\mu|(y) dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_A \eta_\varepsilon(x-y) dx d|\mu|(y) \leq \int_{A+B_\varepsilon(0)} \int_A \eta_\varepsilon(x-y) dx d|\mu|(y) \leq |\mu|(A + B_\varepsilon(0)). \end{aligned}$$

□

## 1.4 Différentiation de mesures

Dans la suite, nous allons considérer des familles  $\mathcal{F}$  de boules fermées dans  $\mathbb{R}^N$ . Une telle famille  $\mathcal{F}$  est un recouvrement de  $A \subset \mathbb{R}^N$  si pour tout  $x \in A$ , il existe une boule  $B \in \mathcal{F}$  centrée en  $x$ . Nous dirons que  $\mathcal{F}$  est un recouvrement fin de  $A$  si, pour tout  $x \in A$  et tout  $\delta > 0$ , il existe une boule  $B \in \mathcal{F}$  centrée en  $x$  telle que  $\text{diam}(B) \leq \delta$ .

On admet le résultat suivant (voir [1, Theorem 2.17]).

**Théorème 1.4.1 (de recouvrement de Besicovitch).** *Il existe un entier  $\xi = \xi(N) \in \mathbb{N}$  qui ne dépend que de la dimension  $N$  avec la propriété suivante : soit  $A \subset \mathbb{R}^N$  un ensemble borné et  $\mathcal{F}$  un recouvrement de  $A$  par des boules fermées et tel que*

$$\sup\{\text{diam}(B), B \in \mathcal{F}\} < \infty.$$

*Alors, il existe  $\xi$  sous-familles  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\xi$  de  $\mathcal{F}$  telles que, pour tout  $j \in \{1, \dots, \xi\}$ ,  $\mathcal{F}_j$  est une famille dénombrable de boules deux à deux disjointes et*

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\xi} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B.$$

Un corollaire du résultat précédent concerne les recouvrement d'un ensemble par une union dénombrable composée de boules fermées deux à deux disjointes à un ensemble de mesure  $\mu$  près, où  $\mu$  est une mesure de Radon arbitraire.

**Corollaire 1.4.2.** *Soit  $A \subset \mathbb{R}^N$  un ensemble Borélien borné et  $\mathcal{F}$  un recouvrement fin de  $A$ . Alors, pour toute mesure de Radon positive  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^N$ , il existe une sous famille  $\mathcal{G}_\mu \subset \mathcal{F}$  dénombrable disjointe telle que*

$$\mu \left( A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_\mu} B \right) = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\xi \in \mathbb{N}$  donné par le Théorème 1.4.1 et  $\delta = 1 - 1/(2\xi)$ . En posant  $A_0 = A$ , il existe  $\xi$  sous-familles  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\xi$  telles que, pour tout  $j \in \{1, \dots, \xi\}$ ,  $\mathcal{F}_j$  est une famille dénombrable composée de boules fermées deux à deux disjointes et

$$A_0 \subset \bigcup_{j=1}^{\xi} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B.$$

En particulier, il existe  $i \in \{1, \dots, \xi\}$  tel que

$$\mu \left( A_0 \cap \bigcup_{B \in \mathcal{F}_i} B \right) \geq \frac{1}{\xi} \mu(A).$$

Comme  $\mu(A_0) < \infty$ , on peut donc trouver une sous famille finie  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$  qui satisfait

$$\mu \left( A_0 \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B \right) \geq \frac{1}{2\xi} \mu(A_0).$$

On pose alors  $A_1 := A_0 \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B$  et on applique le même argument au recouvrement fin de  $A_1$  donné par

$$\mathcal{F}' := \left\{ B' \in \mathcal{F} : B' \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_1} B = \emptyset \right\}$$

dont on extrait une sous-famille finie disjointe  $\mathcal{G}_2$  telle que

$$\mu \left( A_1 \cap \bigcup_{B \in \mathcal{G}_2} B \right) \geq \frac{1}{2\xi} \mu(A_1).$$

En particulier,  $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  est également finie et disjointe et, en posant  $A_2 := A_1 \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_2} B$ , on a  $\mu(A_2) \leq \delta \mu(A_1)$ .

Par récurrence, on construit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  un ensemble  $A_{k+1} \subset A_k$  telle que  $\mu(A_{k+1}) \leq \delta \mu(A_k)$  et une famille finie disjointe  $\mathcal{G}_{k+1}$  telle que  $\bigcup_{j=1}^{k+1} \mathcal{G}_j$  est disjointe et

$$A_{k+1} = A_k \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}_{k+1}} B = \dots = A \setminus \bigcup_{B \in \bigcup_{i=1}^{k+1} \mathcal{G}_i} B.$$

En particulier, comme  $\mu(A_k) \rightarrow 0$  et la famille dénombrable et disjointe  $\mathcal{G} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k$  satisfait

$$A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

on obtient effectivement que  $\mu(A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B) = 0$ .  $\square$

Si  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux mesures de Radon positives sur  $\Omega$ , on définit pour  $x \in \text{Supp}(\lambda)$

$$D_{\lambda}^{+} \mu(x) := \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_{\varrho}(x))}{\lambda(B_{\varrho}(x))}, \quad D_{\lambda}^{-} \mu(x) := \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_{\varrho}(x))}{\lambda(B_{\varrho}(x))}.$$

**Lemme 1.4.3.** *Pour tout  $\varrho > 0$ , la fonction  $x \in \Omega \mapsto \lambda(B_{\varrho}(x))$  est semi-continue inférieurement. Pour tout  $x \in \Omega$ , la fonction  $\varrho \mapsto \lambda(B_{\varrho}(x))$  est continue à gauche.*

*Démonstration.* Soit  $x_k \rightarrow x$ ,  $f_k := \chi_{B_{\varrho}(x_k)}$  et  $f = \chi_{B_{\varrho}(x)}$ . Alors on a

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k(y) \geq f(y) \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$

Cette inégalité est immédiate si  $y \notin B_{\varrho}(x)$ . Si en revanche  $y \in B_{\varrho}(x)$ , alors  $|x - y| < \varrho$ , ce qui implique que  $|x_k - y| < \varrho$  pour  $k$  assez grand. Par conséquent, le Lemme de Fatou implique que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_k d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda,$$

ce qui montre effectivement que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda(B_{\varrho}(x_k)) \geq \lambda(B_{\varrho}(x)).$$

Soit  $\varrho_k \nearrow \varrho$ , alors la suite d'ensembles  $\{B_{\varrho_k}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$  est croissante au sens de l'inclusion et  $\bigcup_k B_{\varrho_k}(x) = B_{\varrho}(x)$ . Par convergence monotone, on obtient alors que  $\lambda(B_{\varrho_k}(x)) \rightarrow \lambda(B_{\varrho}(x))$ .  $\square$

Le Lemme 1.4.3 montre que les fonctions  $D_{\lambda}^{\pm} \mu$  sont Boréliennes sur  $\Omega$ . De plus comme les boules ouvertes peuvent être approchées par l'intérieur par des boules fermées, les densités  $D_{\lambda}^{\pm} \mu$  ne changent pas si l'on remplace les boules ouvertes par des boules fermées.

**Proposition 1.4.4.** *Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux mesures de Radon positives sur  $\Omega$  et  $t \geq 0$ . Pour tout Borélien  $A \subset \text{Supp}(\lambda)$ , on a les deux implications suivantes :*

$$D_{\lambda}^{-} \mu(x) \leq t \quad \forall x \in A \implies \mu(A) \leq t\lambda(A); \quad (1.4.1)$$

$$D_{\lambda}^{+} \mu(x) \geq t \quad \forall x \in A \implies \mu(A) \geq t\lambda(A). \quad (1.4.2)$$



*Démonstration.* Montrons (1.4.1). Soit  $U$  un ouvert contenant  $A$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $x \in A$  et tout  $\delta > 0$ , il existe  $\varrho(x) \in (0, \delta)$  tel que  $\overline{B}_{\varrho(x)}(x) \subset U$  et

$$\mu(\overline{B}_{\varrho(x)}(x)) \leq (t + \varepsilon)\lambda(\overline{B}_{\varrho(x)}(x)).$$

On définit

$$\mathcal{F}_\varepsilon := \{\overline{B}_{\varrho(x)}(x) : x \in A, \overline{B}_{\varrho(x)}(x) \subset U, \mu(\overline{B}_{\varrho(x)}(x)) \leq (t + \varepsilon)\lambda(\overline{B}_{\varrho(x)}(x))\}.$$

Par hypothèse,  $\mathcal{F}_\varepsilon$  est un recouvrement fin de  $A$ . Le Théorème de recouvrement de Besicovitch montre alors l'existence sur sous-famille dénombrable et disjointe  $\mathcal{F}'_\varepsilon := \{\overline{B}_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\varepsilon$  telle que

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}_i\right) = 0.$$

Par conséquent,

$$\mu(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(\overline{B}_i) \leq (t + \varepsilon) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(\overline{B}_i) = (t + \varepsilon)\lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{B}_i\right) \leq (t + \varepsilon)\lambda(U).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts  $U$  contenant  $A$  et en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on en déduit que  $\mu(A) \leq t\lambda(A)$ . La preuve de (1.4.2) est similaire.  $\square$

**Théorème 1.4.5 (Différentiation de Besicovitch).** *Soit  $\lambda$  une mesure de Radon positive sur  $\Omega$  et  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . Alors pour  $\lambda$ -presque tout  $x \in \text{Supp}(\lambda)$ , la limite*

$$f(x) := \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\lambda(B_\varrho(x))}$$

*existe dans  $\mathbb{R}^d$ . De plus la décomposition de Radon-Nikodým de  $\mu$  est donnée par*

$$\mu = f\lambda + \mu^s,$$

*où  $\mu^s = \mu \llcorner E$  et  $E$  est l'ensemble  $\lambda$ -négligeable*

$$E = (\Omega \setminus \text{Supp}(\lambda)) \cup \left\{x \in \Omega : \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|\mu|(B_\varrho(x))}{\lambda(B_\varrho(x))} = \infty\right\}.$$

*Démonstration.* En raisonnant sur chacune des composantes de  $\mu$  et en décomposant chacune des composantes en la différence de la partie positive et négative, on peut supposer sans restreindre la généralité que  $\mu$  est une mesure positive finie.

D'après la Proposition 1.4.4,

$$\lambda(\{D_\lambda^+ \mu = \infty\}) \leq \lambda(\{D_\lambda^+ \mu \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \mu(\{D_\lambda^+ \mu \geq t\}) \leq \frac{1}{t} \mu(\Omega) \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \rightarrow \infty,$$

de sorte que  $0 \leq D_\lambda^- \mu \leq D_\lambda^+ \mu < \infty$   $\lambda$ -p.p.  $x \in \Omega$ . Par conséquent,  $\lambda(E) = 0$ . On pose  $F := \Omega \setminus E$  et nous allons montrer que  $f = D_\lambda \mu$  existe  $\lambda$ -p.p. et  $f\lambda = \mu \llcorner F$ . Pour ce faire, on définit pour tout Borélien  $A \subset \Omega$ ,

$$\nu^\pm(A) = \int_A D_\lambda^\pm \mu(x) d\lambda(x).$$

Pour tout Borélien  $A \subset F$ , tout  $t > 1$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on introduit

$$A_n = \{x \in A : D_\lambda^+ \mu(x) \in (t^n, t^{n+1}]\}$$

de sorte que  $\bigcup_n A_n = A \cap \{D_\lambda^+ \mu > 0\}$ . D'après la Proposition 1.4.4,

$$\nu^+(A_n) \leq t^{n+1} \lambda(A_n) \leq t \mu(A_n),$$

puis en sommant pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on obtient que  $\nu^+(A) \leq t \mu(A)$ . Par passage à la limite quand  $t \rightarrow 1$ , il vient  $\nu^+(A) \leq \mu(A)$  et on montre de même que  $\mu(A) \leq \nu^-(A)$  en utilisant le fait que, par la Proposition 1.4.4, on a  $\mu(\{D_\lambda^- \mu = 0\}) = 0$ . Par conséquent

$$\nu^+ = \nu^- = \mu \llcorner F,$$

ce qui montre que  $f := D_\lambda^+ \mu = D_\lambda^- \mu$   $\lambda$ -p.p. dans  $\Omega$  et que  $\mu \llcorner F = f \lambda$ .  $\square$

**Corollaire 1.4.6 (Points de Lebesgue).** *Soit  $\lambda$  une mesure de Radon positive sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  et  $f \in L_\lambda^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . Alors, pour  $\lambda$ -presque tout  $x \in \Omega$ , on a*

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y) = 0.$$

*Démonstration.* On applique le Théorème de Différentiation de Besicovitch à la mesure  $\mu = |f - q| \lambda$  où  $q \in \mathbb{Q}$ , ce qui montre l'existence d'un ensemble Borélien  $E_q$   $\lambda$ -négligeable (et donc aussi  $\mu$ -négligeable) tel que pour tout  $x \in \Omega \setminus E_q$ ,

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - q| d\lambda(y) = |f(x) - q|.$$

On pose  $E := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q$  qui est un Borélien  $\lambda$ -négligeable de  $\Omega$ . Pour tout  $x \in \Omega \setminus E$  et tout  $q \in \mathbb{Q}$ , on a alors

$$\begin{aligned} \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - f(x)| d\lambda(y) &\leq \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(B_\varrho(x))} \int_{B_\varrho(x)} |f(y) - q| d\lambda(y) + |f(x) - q| \\ &\leq 2|f(x) - q|. \end{aligned}$$

Par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ , on peut faire tendre  $q \rightarrow f(x)$ , ce qui implique le résultat.  $\square$

**Corollaire 1.4.7 (Décomposition polaire d'une mesure vectorielle).** *Soit  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ . Alors il existe une fonction  $f \in L_{|\mu|}^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$  telle que*

$$\mu = f|\mu|, \quad |f(x)| = 1 \text{ } |\mu|\text{-presque pour tout } x \in \Omega.$$

*Démonstration.* On applique le théorème de Différentiation de Besicovitch à la mesure  $\lambda = |\mu|$ . Dans ce cas,  $E = \Omega \setminus \text{Supp}(|\mu|)$  et comme  $|\mu(E)| \leq |\mu|(E) = 0$ , on en déduit que  $\mu = f|\mu|$  où, pour  $|\mu|$ -presque tout  $x \in \Omega$ ,

$$f(x) := \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{|\mu|(B_\varrho(x))}.$$

Comme  $|\mu(B_\varrho(x))| \leq |\mu|(B_\varrho(x))$ , on a toujours l'inégalité  $|f(x)| \leq 1$  pour  $|\mu|$ -presque tout  $x \in \Omega$ . Par ailleurs, d'après la Proposition 1.1.7, on a que  $|\mu| = |f||\mu|$  ce qui implique que

$$\int_{\Omega} (1 - |f|) d|\mu| = 0.$$

On en déduit alors que  $|f| = 1$   $|\mu|$ -p.p. dans  $\Omega$ .  $\square$