# Chapitre 3

# Mesures de Hausdorff

## 3.1 Les mesures extérieures

Dans cette section, on désigne par $X$ un ensemble et par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de $X$.

**Définition 3.1.1.** Une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ est appelée *mesure extérieure* si elle vérifie
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$ ;
(ii) Pour tout $A$, $B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ;
(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^* \left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Si une mesure sur la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$ est toujours une mesure extérieure, la réciproque n'est pas forcément vraie. Toutefois il est possible de restreindre $\mu^*$ à une tribu sur laquelle $\mu^*$ est une mesure.

**Définition 3.1.2.** Un ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ est dit $\mu^*$*-mesurable* si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par la sous-additivité d'une mesure extérieure, pour vérifier qu'un ensemble $A$ est $\mu^*$-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$. De plus, par définition, on a que tout ensemble $A \subset X$ tel que $\mu^*(A) = 0$ est $\mu^*$-mesurable.

**Théorème 3.1.3. (de Carathéodory)** *Soit $\mu^*$ une mesure extérieure sur un ensemble $X$. Alors la classe $\mathcal{A}$ des ensembles $\mu^*$-mesurables est une tribu et la restriction de $\mu^*$ à $\mathcal{A}$ est une mesure.*

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est une tribu. Clairement, on a $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire puisque $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$ et $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie (ce qui fera de $\mathcal{A}$ une algèbre). Si $A_1$ et $A_2$ sont $\mu^*$-mesurables, par sous-additivité de $\mu^*$, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2 \setminus A_1) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, puis que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, posons $A = \bigcup_n A_n$ et montrons que $A \in \mathcal{A}$. On définit $A'_0 = A_0$ puis $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$ pour tout $n \geq 1$ ; $\mathcal{A}$ étant une algèbre, on obtient ainsi une suite $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles dans $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion $\bigcup_n A'_n = \bigcup_n A_n = A$.

Posons $B_n = \bigcup_{k\leq n} A'_k \in \mathcal{A}$, on obtient alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \setminus B_n) \\
&= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A'_{n+1}),
\end{aligned}$$

car les $A'_n$ sont deux à deux disjoints. Ceci établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_n). \tag{3.1.1}$$

Les ensembles $B_n$ étant $\mu^*$-mesurables, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n)$$

ce qui implique, par (3.1.1) et croissance de $\mu^*$ ($B_n \subset A$), que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ et sous-additivité de la mesure extérieure $\mu^*$, il vient

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \tag{3.1.2}$$

ce qui montre que $A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Si les $A_n$ sont disjoints deux à deux, alors $A'_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $E = A$ dans (3.1.2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que $\mu^*$ est une mesure sur $\mathcal{A}$. □

Si à présent $(X, d)$ est un espace métrique (que l'on peut donc munir de la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(X)$, engendrée par les ouverts), le résultat suivant donne un critère assurant la $\mu^*$-mesurabilité des ensembles Boréliens de $X$.

**Proposition 3.1.4.** *Si, pour tout $A$, $B \subset X$ avec* $\operatorname{dist}(A, B) > 0$*, on a*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \tag{3.1.3}$$

*alors $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.*

*Démonstration.* Puisque la tribu Borélienne $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par les fermés, il suffit de montrer que tous les fermés de $X$ sont $\mu^*$-mesurables. De plus, par sous-additivité de $\mu^*$, il suffit d'établir que si $C \subset X$ est fermé,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \text{pour tout } E \subset X \text{ tel que } \mu^*(E) < \infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(E \setminus C_n, E \cap C) \geq 1/n > 0$, l'hypothèse montre que

$$\mu^*(E \setminus C_n) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \setminus C_n) \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E). \tag{3.1.4}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in E : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j - i| \geq 2$, on a toujours d'après l'étape 1,

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k}) = \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{m} R_{2k} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

et

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^* \left( \bigcup_{i=1}^{m} R_{2k+1} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(E) < \infty$. Comme $C$ est fermé, on a $E \setminus C = (E \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de $\mu^*$,

$$\mu^*(E \setminus C_n) \leq \mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$, $\mu^*(E \setminus C_n) \to \mu^*(E \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (3.1.4), il vient

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

**Exemple 3.1.5.** Soit $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \max_i |x_i - y_i| < r\}$ le cube ouvert centré en $x$ et de côté $2r$. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, on pose

$$\mathcal{L}^N(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} (2r_i)^N : A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_{r_i}(x_i) \right\}.$$

On montre facilement (exercice) que $\mathcal{L}^N$ est une mesure extérieure. De plus comme tous les cubes $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$ peuvent être subdivisés en une union finie disjointe de plus petits cubes de côtés arbitrairement petits, on en déduit que la propriété (3.1.3) est vérifiée. Ceci montre que (la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ de) $\mathcal{L}^N$ est une mesure Borélienne. Comme elle est de plus finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N$ est une mesure de Radon positive, appelée *mesure de Lebesgue*.

## 3.2 Définition et propriétés des mesures de Hausdorff

**Définition 3.2.1.** (i) Soient $A \subset \mathbb{R}^N$, $0 \le s < \infty$ et $\delta > 0$. On définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \omega_s \left( \frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2} \right)^s : A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i,\ \operatorname{diam}(A_i) \le \delta \right\},$$

où

$$\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$$

et $\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$ est la fonction Gamma d'Euler.
(ii) Pour $A \subset \mathbb{R}^N$ et $s \ge 0$, on pose

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

On appelle $\mathcal{H}^s$ la mesure de Hausdorff $s$-dimensionnelle sur $\mathbb{R}^N$.

**Remarque 3.2.2.** (i) La limite définissant $\mathcal{H}^s(A)$ existe et est donnée par le supremum car si $\delta_1 \le \delta_2$, alors $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \ge \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$.
(ii) Si $s = k \in \mathbb{N}$, La constante de renormalisation $\omega_k$ coïncide avec le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^k$, i.e.

$$\omega_k = \mathcal{L}^k(\{x \in \mathbb{R}^k : x_1^2 + \cdots + x_k^2 \le 1\}).$$

(iii) Comme $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$, on peut supposer que les ensembles $A_i$ sont fermés dans la définition de $\mathcal{H}^s_\delta(A)$.

**Théorème 3.2.3.** *Pour tout $0 \le s < \infty$ et tout $\delta > 0$, $\mathcal{H}^s_\delta$ et $\mathcal{H}^s$ sont des mesures extérieures. De plus, la restriction de $\mathcal{H}^s$ est à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est une mesure Borélienne.*

*Démonstration.* Si $A \subset B$, on a clairement que $\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(B)$ puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(B)$. Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement $\{B_j^n\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $A_n$ tel que $\operatorname{diam}(B_j^n) \le \delta$ et

$$\mathcal{H}^s_\delta(A_n) \ge \sum_{j=0}^{\infty} \omega_s \left( \frac{\operatorname{diam}(B_j^n)}{2} \right)^s - 2^{-n-1}\varepsilon.$$

Comme $\bigcup_n A_n \subset \bigcup_{j,n} B_j^n$, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta\left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \omega_s \left( \frac{\operatorname{diam}(B_j^n)}{2} \right)^s \le \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_n) + \varepsilon$$

et la sous-additivité

$$\mathcal{H}^s_\delta\left( \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}^s_\delta(A_n)$$

de $\mathcal{H}^s_\delta$ suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Par suite, $\mathcal{H}^s$ est également sous-additive par passage au supremum en $\delta$ dans l'inégalité précédente.

Pour montrer que $\mathcal{H}^s$ est une mesure de Borel, en vertu de la Proposition 3.1.4, il suffit de montrer que $\mathcal{H}^s(A \cup B) \ge \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ pour tout $A$, $B \subset \mathbb{R}^N$ tels que $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Soit $0 < \delta < \operatorname{dist}(A, B)/4$ et $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une recouvrement de $A \cup B$ avec $\operatorname{diam}(C_k) \le \delta$. Soient $\mathcal{A} := \{C_k :$

$C_k \cap A \neq \emptyset\}$ et $\mathcal{B} := \{C_k : C_k \cap B \neq \emptyset\}$ de sorte que $A \subset \bigcup_{C_k \in \mathcal{A}} C_k$, $B \subset \bigcup_{C_k \in \mathcal{B}} C_k$ et $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $C_i \in \mathcal{A}$ et $C_j \in \mathcal{B}$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_k)}{2}\right)^s &\geq \sum_{C_i \in \mathcal{A}} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_i)}{2}\right)^s + \sum_{C_j \in \mathcal{B}} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^s \\ &\geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).\end{aligned}$$

Par passage à l'infimum sur tous les recouvrements $(C_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $A \cup B$ dans le membre de gauche, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B),$$

puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$,

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

L'autre inégalité est une conséquence immédiate de la sous-additivité de la mesure extérieure $\mathcal{H}^s$. Une application immédiate de la Proposition 3.1.4 montre que $\mathcal{H}^s$ est une mesure de Borel. $\square$

Montrons à présent des proprités basiques des mesures de Hausdorff.

**Proposition 3.2.4.** *(i) $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage ;*
*(ii) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ;*
*(iii) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $A \subset \mathbb{R}^N$ ;*
*(iv) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ pour toute isométrie affine $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ et tout $A \subset \mathbb{R}^N$ ;*
*(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschitzienne, alors*

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \leq [\operatorname{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A) \quad \text{pour tout } A \subset \mathbb{R}^N;$$

*(vi) Si $t > s$ et $A \subset \mathbb{R}^N$, alors*

$$\mathcal{H}^t(A) > 0 \implies \mathcal{H}^s(A) = \infty.$$

*Démonstration.* (i) Si $\{a\}$ est un singleton, pour tout $\delta > 0$, on a $a \in B_{\delta/2}(a)$ de sorte que $\mathcal{H}^0_\delta(\{a\}) \leq \omega_0(\delta/2)^0 = 1$ et donc, en faisant tendre $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^0(\{a\}) \leq 1$. Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\{a\}$ par des ensembles de diamètre plus petit que $\delta$, alors il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a \in A_{i_0}$, d'où

$$\omega_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^0 \geq \omega_0 \left(\frac{\operatorname{diam}(A_{i_0})}{2}\right)^0 = 1.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements, il vient $\mathcal{H}^0(\{a\}) \geq \mathcal{H}^0_\delta(\{a\}) \geq 1$. Par conséquent, $\mathcal{H}^0(\{a\}) = 1$. Si $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ est un ensemble fini, $\mathcal{H}^0(A) = \sum_{i=1}^k \mathcal{H}^0(\{a_i\}) = k = \#(A)$ et, si $A$ est un ensemble infini $\mathcal{H}^0(A) = \infty = \#(A)$.

(ii) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble Borélien et $A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} ]a_i, b_i[$, pour tout $\delta > 0$ on peut décomposer chacun des intervalles $[a_i, b_i]$ en une union finie de sous intervalles d'intérieurs disjoints et de diamètre plus petit que $\delta$, i.e. $[a_i, b_i] = \bigcup_{j \in I_i} [\alpha_i^j, \beta_i^j]$ avec $\beta_i^j - \alpha_i^j \leq \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \omega_1 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j \in I_i} \frac{\operatorname{diam}([\alpha_i^j, \beta_i^j])}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} (b_i - a_i),$$

où l'on a utilisé le fait que $\omega_1 = 2$. Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $(]a_i, b_i[)_{i\in\mathbb{N}}$, on obtient par définition de la mesure de Lebesgue que $\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$, puis, par passage à la limite quand $\delta \to 0$, $\mathcal{H}^1(A) \leq \mathcal{L}^1(A)$

Pour montrer l'autre inégalité, considérons un recouvrement de $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ avec $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$, on pose $s_i = \inf A_i$ et $t_i = \sup A_i$ de sorte que $A_i \subset [s_i, t_i]$ et $t_i - s_i = \mathrm{diam}(A_i) \le \delta$. Par définition de la mesure de Lebesgue, on a donc que

$$\mathcal{L}^1(A) \le \sum_{i=0}^{\infty}(t_i - s_i) = \omega_1 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2},$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à tous les recouvrements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$, il vient

$$\mathcal{L}^1(A) \le \mathcal{H}^1_\delta(A) \le \mathcal{H}^1(A).$$

(iii) Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $A$ avec $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{\lambda A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $\lambda A$ avec $\mathrm{diam}(\lambda A_i) \le \lambda\delta$, d'où

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \le \lambda^s \sum_{i=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $A$,

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on obtient $\mathcal{H}^s(\lambda A) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$. Pour montrer l'autre inégalité, on note simplement que

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(\lambda^{-1}(\lambda A)) \le \lambda^{-s}\mathcal{H}^s(\lambda A).$$

(iv) Si $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie linéaire et $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $A$ avec $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{L(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $L(A)$ avec $\mathrm{diam}(L(A_i)) = \mathrm{diam}(A_i) \le \delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^s_\delta(L(A)) \le \sum_{i=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(L(A_i))}{2}\right)^s = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $A$ et passage au supremum en $\delta$, on obtient

$$\mathcal{H}^s(L(A)) \le \mathcal{H}^s(A).$$

Comme $L^{-1} : L(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}^N$ est une isométrie linéaire, il vient

$$\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(L^{-1}(L(A))) \le \mathcal{H}^s(L(A)),$$

ce qui montre l'autre inégalité.

(v) Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschtzienne et $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $A$ avec $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$, alors $\{f(A_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement de $f(A)$ avec $\mathrm{diam}(f(A_i)) \le \mathrm{Lip}(f)\mathrm{diam}(A_i) \le \mathrm{Lip}(f)\delta$. Par conséquent,

$$\mathcal{H}^s_{\mathrm{Lip}(f)\delta}(f(A)) \le \sum_{i=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(f(A_i))}{2}\right)^s \le [\mathrm{Lip}(f)]^s \sum_{i=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^s$$

puis, par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $A$ et passage au supremum en $\delta$, on obtient

$$\mathcal{H}^s(f(A)) \le [\mathrm{Lip}(f)]^s \mathcal{H}^s(A).$$

(vi) est une conséquence du fait que, par définition de la mesure de Hausdorff, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathcal{H}^t_\delta(A) \le \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \frac{\omega_t}{\omega_s}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{t-s}\mathcal{H}^s(A).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$, on en déduit que si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$. □

**Définition 3.2.5.** La dimension de Hausdorff d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$ est définie par

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{s \ge 0 : \ \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Par définition de la dimension de Hausdorff, on a que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour tout $s > \dim_{\mathcal{H}}(A)$ et, d'après la Proposition 3.2.4(v), il vient que $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pour tout $s < \dim_{\mathcal{H}}(A)$.

Un outil très utile concerne les densités $s$-dimensionnelles d'une mesure de Radon positive.

**Définition 3.2.6.** Soit $\mu$ une mesure de Radon positive finie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. On définit les densités $s$-dimensionnelles inférieures et supérieures en $x \in \Omega$ par

$$\Theta_{s,*}(\mu, x) := \liminf_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_s \varrho^s}, \qquad \Theta^*_s(\mu, x) := \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mu(B_\varrho(x))}{\omega_s \varrho^s}.$$

Si $\Theta_{s,*}(\mu, x) = \Theta^*_s(\mu, x)$ on notera $\Theta_s(\mu, x)$ la valeur commune.

**Proposition 3.2.7.** *Soit $\mu$ une mesure de Radon positive finie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $t > 0$ et $A \subset \Omega$ un Borélien. Si $\Theta^*_s(\mu, x) \ge t$ pour tout $x \in A$, alors*

$$\mu \ge t\mathcal{H}^s \llcorner A.$$

*De plus, si $E \subset \Omega$ est un Borélien tel que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, alors*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B_\varrho(x))}{\varrho^s} = 0 \quad \textit{pour } \mathcal{H}^s\textit{-presque tout } x \in \Omega \setminus E.$$

*Démonstration.* Soient $U$ un ouvert contenant $A$, $t' < t$ et $\delta > 0$. Par définition de la $\limsup$, pour tout $x \in A$ et tout $0 < \varepsilon < \delta$, il existe $\varrho_x \in (0, \varepsilon/2)$ tel que $\overline{B}_{\varrho_x}(x) \subset U$ et

$$\mu(B_{\varrho_x}(x)) \ge t'\omega_s \varrho_x^s.$$

Soit $\mathcal{F}$ la famille des boules fermées $\overline{B}$ contenues dans $U$ et telles que $\operatorname{diam}(\overline{B}) \le \delta$ et $\mu(\overline{B}) \ge t'\omega_s(\operatorname{diam}(B)/2)^s$. Il s'agit d'un recouvrement (fin) de $A$ et le théorème de recouvrement de Besicovitch montre alors l'existence de $\xi$ sous-familles $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_\xi$ telles que chacunes des sous familles $\mathcal{F}_i = \{\overline{B}^k_i\}_{k \in \mathbb{N}}$ est dénombrable et disjointe et

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup_{\overline{B} \in \mathcal{F}_i} \overline{B}.$$

Par conséquent, par définition de la mesure de Hausdorff, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \sum_{i=1}^{\xi}\sum_{k=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(\overline{B}^k_i)}{2}\right)^s \le \frac{1}{t'}\sum_{i=1}^{\xi}\sum_{k=0}^{\infty} \mu(\overline{B}^k_i) \le \frac{\xi}{t'}\mu(U).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$ et $t' \to t$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(A) \le \frac{\xi}{t}\mu(U) < \infty$.

D'après le Corollaire 1.4.2, comme $\mathcal{F}$ est un recouvrement fin de $A$, il existe une sous-famille $\{\overline{B}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}$ dénombrable et disjointe telle

$$\mathcal{H}^s\left(A \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \overline{B}_j\right) = 0.$$

Par conséquent, comme $\mathcal{H}^s_\delta$ est une mesure extérieure et $\mathcal{H}^s_\delta \leq \mathcal{H}^s$, il vient

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\mathrm{diam}(\overline{B}_j)}{2}\right)^s \leq \frac{1}{t'}\sum_{j=0}^{\infty} \mu(\overline{B}_j) \leq \frac{1}{t'}\mu(U).$$

Par passage à la limite quand $\delta \to 0$ et $t' \to t$, puis passage à l'infimum parmi tous les ouverts $U$ contenant $A$, obtient que $\mathcal{H}^s(A) \leq t^{-1}\mu(A)$. On peut répéter le même argument en remplaçant $A$ par n'importe quel sous ensemble Borélien de $A$ et établir ainsi que $\mu \geq t\mathcal{H}^s \llcorner A$.

Si $E \subset \Omega$ est un Borélien tel que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, on applique ce résultat à la mesure finie $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner E$ avec $A = A_n = \{x \in \Omega \setminus E : \Theta^*_s(\mu, x) > 1/n\}$ et $t = 1/n$. On obtient alors que $0 = \mu(A_n) \geq \frac{1}{n}\mathcal{H}^s(A_n)$. Comme $\bigcup_n A_n = \{x \in \Omega \setminus E : \Theta^*_s(\mu, x) > 0\}$, on en déduit que $\mathcal{H}^s(\{x \in \Omega \setminus E : \Theta^*_s(\mu, x) > 0\}) = 0$. □

# 3.3 Mesure de volume et mesure de surface

## 3.3.1 Mesure de volume

Nous allons à présent montrer que la la mesure de Hausdorff $N$-dimensionnelle dans $\mathbb{R}^N$ coïncide avec la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$. La démonstration repose sur l'inégalité isodiamétrique qui stipule que le plus grand volume parmi tous les sous ensembles de diamètre $2r$ est $\omega_N r^N$, i.e. le volume de la boule. Remarquons que cette inégalité n'est pas complètement évidente car, comme le montre l'exemple d'un triangle équilatéral, il n'est pas vrai qu'un ensemble quelconque est contenu dans une boule de même diamètre.

**Proposition 3.3.1 (Inégalité isodiamétrique).** *Pour tout ensemble $\mathcal{L}^N$-mesurable $A \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$\mathcal{L}^N(A) \leq \omega_N \left(\frac{\mathrm{diam}(A)}{2}\right)^N.$$

*Démonstration.* La preuve repose sur le principe de symétrisation de Steiner. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ avec $|\xi| = 1$, on note $\Pi_\xi$ l'hyperplan orthogonal à $\xi$ et

$$B^\xi_y := \{t \in \mathbb{R} :\ y + t\xi \in B\}$$

la section de $B$ dans la direction $\xi$ passant par le point $y$. D'après le théorème de Fubini, l'application $y \mapsto \mathcal{L}^1(B^\xi_y)$ est $\mathcal{L}^{N-1}$-mesurable dans $\Pi_\xi$. Par conséquent l'ensemble

$$S_\xi(B) := \{y + t\xi :\ y \in \Pi_\xi,\ |t| \leq \mathcal{L}^1(B^\xi_y)/2\}$$

est toujours $\mathcal{L}^N$-mesurable. De plus, une nouvelle utilisation du théorème de Fubini montre que $\mathcal{L}^N(S_\xi(B)) = \mathcal{L}^N(B)$.

Par ailleurs, si $B$ est symétrique par rapport à $\Pi_\nu$ avec $\nu \cdot \xi = 0$, alors $S_\xi(B)$ conserve cette propriété. Pour voir cela, notons $\sigma$ la symétrie par rapport à $\Pi_\nu$, i.e. $\sigma(x) = x - 2(x \cdot \nu)\nu$, qui satisfait $\sigma^2 = \mathrm{id}$. Alors, on a que

$$\sigma(y + B^\xi_y\xi) = \sigma(y) + B^\xi_{\sigma(y)}\xi.$$

En effet, si $x \in \sigma(y + B_y^\xi \xi)$, alors il existe $t \in B_y^\xi$ tel que $x = \sigma(y + t\xi) = \sigma(y) + t\xi$ car $\xi \cdot \nu = 0$. Comme $y + t\xi \in B$ et $\sigma(B) = B$, on en déduit que $\sigma(y) + t\xi = x = \sigma(y + t\xi) \in B$, ce qui montre que $t \in B_{\sigma(y)}^\xi$ et donc que $x \in \sigma(y) + B_{\sigma(y)}^\xi \xi$. Pour montrer l'autre inclusion, on utilise l'inclusion précédente pour obtenir que

$$\sigma(\sigma(y) + B_{\sigma(y)}^\xi \xi) \subset \sigma^2(y) + B_{\sigma^2(y)}^\xi \xi) = y + B_y^\xi \xi,$$

soit, en appliquant $\sigma$ à l'inclusion précédente, $\sigma(y) + B_{\sigma(y)}^\xi \xi \subset \sigma(y + B_y^\xi \xi)$. Soit $x \in S_\xi(B)$, alors $x = y + t\xi$ avec $y \in \Pi_\xi$ et $|t| \leq \mathcal{L}^1(B_y^\xi)/2$. En utilisant la Proposition 3.2.4 (ii) et (iv), on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(B_y^\xi) = \mathcal{H}^1(B_y^\xi) = \mathcal{H}^1(y + B_y^\xi \xi) = \mathcal{H}^1(\sigma(y + B_y^\xi \xi))\\ = \mathcal{H}^1(\sigma(y) + B_{\sigma(y)}^\xi \xi) = \mathcal{H}^1(B_{\sigma(y)}^\xi) = \mathcal{L}^1(B_{\sigma(y)}^\xi).\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sigma(x) = \sigma(y) + t\xi$ avec $\sigma(y) \in \Pi_\xi$ et $2|t| \leq \mathcal{L}^1(B_y^\xi) = \mathcal{L}^1(B_{\sigma(y)}^\xi)$, ce qui montre que $\sigma(x) \in S_\xi(B)$ et donc que $S_\xi(B)$ est symétrique par rapport à $\Pi_\nu$.

Montrons à présent que la symétrisation diminue le diamètre. Pour ce faire, pour tout $\varepsilon > 0$, on considère $x$ et $x' \in S_\xi(B)$ tels que

$$\operatorname{diam}(S_\xi(B)) \leq |x - x'| + \varepsilon.$$

Soient $y = x - (x \cdot \xi)\xi$ et $y' = x' - (x' \cdot \xi)\xi \in \Pi_\xi$ et posons

$$r := \inf\{t : \ y + t\xi \in B\}, \quad s := \sup\{t : \ y + t\xi \in B\},$$

et

$$r' := \inf\{t : \ y' + t\xi \in B\}, \quad s' := \sup\{t : \ y' + t\xi \in B\}.$$

Supposons, sans restreindre la généralité que $s' - r \geq s - r'$. Alors

$$s' - r \geq \frac{1}{2}(s' - r) + \frac{1}{2}(s - r') = \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(s' - r') \geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B_y^\xi) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B_{y'}^\xi).$$

Comme $|x \cdot \xi| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B_y^\xi)$ et $|x' \cdot \xi| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(B_{y'}^\xi)$, il vient

$$s' - r \geq |x \cdot \xi| + |x' \cdot \xi| \geq |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|.$$

Par conséquent, comme $y + r\xi$ et $y' + s'\xi \in \overline{B}$,

$$\begin{aligned}(\operatorname{diam}(S_\xi(B)) - \varepsilon)^2 &\leq |x - x'|^2 = |y - y'|^2 + |x \cdot \xi - x' \cdot \xi|^2\\ &\leq |y - y'|^2 + (s' - r)^2 = |(y + r\xi) - (y' + s'\xi)|^2 \leq (\operatorname{diam}(\overline{B}))^2 = (\operatorname{diam}(B))^2,\end{aligned}$$

ce qui montre effectivement que $\operatorname{diam}(S_\xi(B)) \leq \operatorname{diam}(B)$.

Nous sommes à présent en mesure de montrer l'inégalité isodiamétrique. Si $\operatorname{diam}(A) = \infty$, il n'y a rien à montrer. Sinon, on considère une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$. On définit $A_1 = S_{e_1}(A)$, $A_2 = S_{e_2}(A_1), \ldots, A_N = S_{e_N}(A_{N-1})$ et on pose $A^* = A_N$. Par construction, $\mathcal{L}^N(A^*) = \mathcal{L}^N(A)$, $\operatorname{diam}(A^*) \leq \operatorname{diam}(A)$ et $A^*$ est symétrique par rapport à $\Pi_{e_k}$ pour tout $k = 1, \ldots, N$. Par conséquent, si $x \in A^*$, alors $-x \in A^*$ de sorte que $A^* \subset B_{\operatorname{diam}(A^*)/2}(0)$, soit

$$\mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A^*) \leq \mathcal{L}^N(B_{\operatorname{diam}(A^*)/2}(0)) = \omega_N \left(\frac{\operatorname{diam}(A^*)}{2}\right)^N \leq \omega_N \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^N,$$

ce qui conclut la preuve de l'inégalité. $\square$

L'inégalité isodiamétrique permet montrer que la mesure de Hausdorff $N$-dimensionnelle coïncide avec la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$, généralisant ainsi la Proposition 3.2.4 (ii).

**Théorème 3.3.2.** *$\mathcal{H}^N = \mathcal{L}^N$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.*

*Démonstration.* Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\delta > 0$ il existe un recouvrement $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tel que $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$ et

$$\omega_N \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^N \le \mathcal{H}^N_\delta(A) + \delta \le \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

Rappelons que, sans restreindre la généralité, on peut supposer que les $A_i$ sont fermés. Comme $A \subset \bigcup_i A_i$, on obtient grâce à l'inégalité isodiamétrique que

$$\mathcal{L}^N(A) \le \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^N(A_i) \le \omega_N \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{diam}(A_i)}{2}\right)^N \le \mathcal{H}^N(A) + \delta.$$

On obtient que $\mathcal{L}^N(A) \le \mathcal{H}^N(A)$ par passage à la limite quand $\delta \to 0$.

Pour montrer l'autre inégalité, on commence par établir que $\mathcal{H}^N$ est une mesure de Radon. Pour ce faire, on remarque que si $Q$ est un cube de $\mathbb{R}^N$, alors $\mathrm{diam}(Q) = \sqrt{N}\mathcal{L}^N(Q)^{1/N}$. Soit donc $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un recouvrement de $A$ par des cubes. Si $\delta > 0$, quitte à subdiviser chaque cubes $Q_i$ en plus petits cubes, on peut supposer que $\mathrm{diam}(Q_i) \le \delta$. Par définition de la mesure de Hausdorff, il vient

$$\mathcal{H}^N_\delta(A) \le \omega_N \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{diam}(Q_i)}{2}\right)^N = \omega_N \left(\frac{\sqrt{N}}{2}\right)^N \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}^N(Q_i).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvrements $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $A$ et par passage à la limite quand $\delta \to 0$, il vient $\mathcal{H}^N(A) \le C_N \mathcal{L}^N(A)$, ce qui montre effectivement que $\mathcal{H}^N$ est finie sur les compacts et donc que $\mathcal{H}^N$ est une mesure de Radon.

Soit $U$ un ouvert contenant $A$ et $\delta > 0$. Pour tout $x \in A$, il existe $\varrho_x \in (0, \delta/2)$ tel que $\overline{B}_\varrho(x) \subset U$ pour tout $\varrho \le \varrho_x$ de sorte que $\mathcal{F} = \{\overline{B}_\varrho(x)\}_{x\in A,\, 0<\varrho\le\varrho_x}$ forme un recouvrement fin de $A$. D'après le théorème de recouvrement de Besicovitch (Corollaire 1.4.2), il existe une famille dénombrable $\{\overline{B}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ de boules fermées deux à deux disjointes, de diamètre plus petit que $\delta$ et contenues dans $U$ telles que

$$\mathcal{H}^N\left(A \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{B}_k\right) = 0.$$

Par $\sigma$-sous additivité de $\mathcal{H}^N_\delta$ il vient

$$\mathcal{H}^N_\delta(A) \le \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^N_\delta(\overline{B}_k) \le \sum_{k=0}^{\infty} \omega_N \varrho_k^N = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}^N(\overline{B}_k) = \mathcal{L}^N\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \overline{B}_k\right) \le \mathcal{L}^N(U).$$

Par régularité extérieure de la mesure de Lebesgue et passage à la limite quand $\delta \to 0$, il vient $\mathcal{H}^N(A) \le \mathcal{L}^N(A)$. □

**Remarque 3.3.3.** Le résultat précédent montre que, pour tout $s < N$, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ n'est jamais une mesure de Radon dans $\mathbb{R}^N$

### 3.3.2 Mesure de surface et formule de l'aire

Nous nous intéressons à présent à l'interprétation de la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ avec $1 \leq k \leq N-1$. La formule de l'aire va nous permettre de montrer que $\mathcal{H}^k$ coïncide avec la mesure de volume sur les sous-variétés de dimension $k$ dans $\mathbb{R}^N$. On rappelle la définition des sous-variétés de $\mathbb{R}^N$.

**Définition 3.3.4.** Un sous ensemble $M \subset \mathbb{R}^N$ est une *sous-variété* de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^1$ si, pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage $V$ de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$, un voisinage $U$ de 0 dans $\mathbb{R}^k$ et une fonction $f : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$ et injective telle que $f(0) = x_0$, $\nabla f(0)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^N$ et $f$ est un homéomorphisme de $U$ sur $M \cap V$. On appelera $f$ un *paramétrisation locale* de $M$ en $x_0$.

**Remarque 3.3.5.** Notons qu'une application linéaire $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ (avec $k \leq N$) est injective si et seulement $\det(L^T L) > 0$. En particulier, comme le déterminant est une application continue, on peut supposer dans la définition précédente que $\nabla f(x)$ est injective pour tout $x \in U$, quitte à diminuer l'ouvert $U$.

**Théorème 3.3.6 (Formule de l'aire).** *Soient $U \subset \mathbb{R}^k$ et $f : U \to \mathbb{R}^N$ (avec $k \leq N$) une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ injective telle que, pour tout $x \in U$, $\nabla f(x)$ est une application linéaire injective de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^N$. Alors pour tout ensemble Borélien $E \subset U$, on a*

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \int_E \sqrt{\det(\nabla f(x)^T \nabla f(x))}\, dx.$$

*Démonstration.* **Etape 1.** Commençons par établir que $f(E)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable. Par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, il existe une suite de compacts $K_i \subset E$ telle que $\mathcal{L}^k(E \setminus K_i) \to 0$. Par conséquent, $f$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, il vient

$$\mathcal{H}^k\left(f(E) \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} f(K_i)\right) \leq \mathcal{H}^k\left(f\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right)\right) \leq [\mathrm{Lip}(f)]^k \mathcal{L}^k\left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i\right) = 0.$$

Comme $f$ est continue et $K_i$ compact, $f(K_i) \subset \mathbb{R}^N$ est compact et $\bigcup_i f(K_i) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent $f(E)$ est $\mathcal{H}^k$-mesurable comme union d'un ensemble Borélien et d'un ensemble de mesure $\mathcal{H}^k$ nulle.

**Etape 2.** Supposons d'abord que $f = L$ est une application linéaire injective. On utilise la décomposition polaire pour décomposer $L = O \circ S$ où $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est une application linéaire inversible, symétrique, définie positive et $O : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application orthogonale. En effet, l'application linéaire $L^T L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ est inversible (car injective), symétrique et définie positive. Par le théorème de décomposition spectrale, il existe une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_k\}$ de $\mathbb{R}^k$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ tels que $(L^T L)e_i = \lambda_i e_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$, de sorte que $L^T L = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \otimes e_i$. On pose alors

$$S := \sum_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} e_i \otimes e_i$$

qui définit une application linéaire $S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ inversible, symétrique et définie positive. Posons alors $O := L \circ S^{-1}$ et $v_i := O(e_i) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} L(e_i) \in \mathbb{R}^N$. Par construction, $\{v_1, \dots, v_k\}$ forme un système orthonormé de $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que $O$ est une application orthogonale.

On définit la mesure de Radon positive $\nu(E) := \mathcal{H}^k(L(E))$ pour tout Borélien $E \subset U$. Comme $\nu(E) \le [\mathrm{Lip}(L)]^k \mathcal{L}^k(E)$, on en déduit que $\nu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^k$ et le théorème de différentiation de Besicovitch montre que $\nu = \kappa \mathcal{L}^k$ où

$$\kappa(x) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\nu(B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k} \quad \text{pour } \mathcal{L}^k\text{-presque tout } x \in U.$$

Or

$$\nu(B_\varrho(x)) = \mathcal{H}^k(L(x) + \varrho L(B_1)) = \varrho^k \mathcal{H}^k(L(B_1))$$

d'où $\kappa(x) = \mathcal{H}^k(L(B_1))/\omega_k$ est constante. Montrons à présent que $\kappa = \sqrt{\det(L^T L)}$. En utilisant la décomposition polaire et le fait que $O$ est une rotation (en particulier une isométrie),

$$\kappa = \frac{\mathcal{H}^k(O \circ S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{H}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)} = \frac{\mathcal{L}^k(S(E))}{\mathcal{L}^k(E)}$$

car $S(E) \subset \mathbb{R}^k$ et $\mathcal{H}^k = \mathcal{L}^k$ sur $\mathbb{R}^k$. En choisissant en particulier

$$E = Q = \{x \in \mathbb{R}^k : \ 0 \le x \cdot e_i \le 1 \text{ pour tout } 1 \le i \le k\}$$

(le cube unité de $\mathbb{R}^k$ orienté suivant la base $\{e_1, \dots, e_k\}$), on a que

$$S(Q) = \{y \in \mathbb{R}^k : \ 0 \le y \cdot e_i \le \sqrt{\lambda_i} \text{ pour tout } 1 \le i \le k\}$$

et donc $\mathcal{L}^k(S(Q)) = \prod_{i=1}^k \sqrt{\lambda_i} = \det(S) = \sqrt{\det(L^T L)}$ ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire dans le cas linéaire.

**Etape 3.** Considérons enfin le cas général d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ injective telle que $\nabla f(x)$ est injective pour tout $x \in U$. Pour simplifier les notations, on pose $J_f := \sqrt{\det(\nabla f^T \nabla f)}$. Soit $K$ un compact tel que $K \subset U$. Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $x$, $y$ et $z \in K$ satisfont $|x - y| \le \delta$ et $|x - z| \le \delta$, alors

$$|J_f(x) - J_f(y)| \le \varepsilon, \quad |f(x) - f(y) - \nabla f(z)(y - x)| \le \varepsilon |\nabla f(z)(x - y)|.$$

En effet, la première condition résulte de l'uniforme continuité de $J_f$ sur le compact $K$. La deuxième condition se démontre par l'absurde sur supposant l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ et de trois suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $K$ telles que $|x_n - y_n| \le 1/n \to 0$, $|x_n - z_n| \le 1/n \to 0$ et $o(|x_n - y_n|) = |f(x_n) - f(y_n) - \nabla f(z_n)(x_n - y_n)| > \varepsilon_0 |\nabla f(z_n)(y_n - x_n)|$. On a en particulier que $x_n \ne y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, quitte à extraire une sous-suite (car $K$ est compact), on peut supposer que $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$ (avec $x = y = z$) et $v_n = (x_n - y_n)/|x_n - y_n| \to v$ avec $|v| = 1$. D'ou $o(1) \ge \varepsilon_0 \nabla f(z_n)(v_n)$ puis par passage à la limite $0 = \varepsilon_0 |\nabla f(x)(v)|$. Par conséquent, $v \in \mathbb{S}^{N-1}$ appartient au noyau de $\nabla f(x)$, ce qui est impossible par injectivite de $\nabla f(x)$.

En particulier, pour $\varepsilon < 1$, on a

$$|f(x) - f(y)| \ge |\nabla f(z)(x - y)| - |f(x) - f(y) - \nabla f(z)(y - x)| \ge (1 - \varepsilon)|\nabla f(z)(y - x)|$$

et

$$|f(x) - f(x)| \le |\nabla f(z)(x - y)| + |f(x) - f(y) - \nabla f(z)(y - x)| \le (1 + \varepsilon)|\nabla f(z)(y - x)|.$$

Soit $K = \bigcup_{i=1}^m A_i$ une partition Borélienne de $K$ telle que $\mathrm{diam}(A_i) \le \delta$. On fixe $z_i \in A_i$ et on pose $L_i := \nabla f(z_i)$. Par hypothèse $L_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application linéaire injective et pour tout $x$, $y \in A_i$,

$$(1 - \varepsilon)|L_i(x - y)| \le |f(x) - f(y)| \le (1 + \varepsilon)|L_i(x - y)|,$$

ce qui montre que

$$\mathrm{Lip}_{L_i(A_i)}(f|_{A_i} \circ L_i^{-1}) \leq 1+\varepsilon, \quad \mathrm{Lip}_{f(A_i)}(L_i \circ (f|_{A_i})^{-1}) \leq \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

En utilisant le fait que $f$ est injective, on en déduit que $f(E \cap K) = \bigcup_{i=1}^m f(E \cap A_i)$ d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(f(E\cap K)) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(E\cap A_i)) &= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((f\circ L_i^{-1})(L_i(E\cap A_i))) \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(E\cap A_i)) = (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{E\cap A_i} J_f(z_i)\,dx \\
&\leq (1+\varepsilon)^k \sum_{i=1}^m \int_{E\cap A_i} J_f(x)\,dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k \mathcal{L}^k(K) \\
&= (1+\varepsilon)^k \int_{E\cap K} J_f(x)\,dx + \varepsilon(1+\varepsilon)^k\mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\int_{E\cap K} J_f(x)\,dx &= \sum_{i=1}^m \int_{E\cap A_i} J_f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^m \int_{E\cap A_i} J_f(z_i)\,dx + \varepsilon\mathcal{L}^k(K) \\
&= \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(L_i(E\cap A_i)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K) = \sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k((L_i\circ(f|_{A_i})^{-1})f(E\cap A_i)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K) \\
&\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^k}\sum_{i=1}^m \mathcal{H}^k(f(E\cap A_i)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K) = \frac{1}{(1-\varepsilon)^k}\mathcal{H}^k(f(E\cap K)) + \varepsilon\mathcal{L}^k(K).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\mathcal{H}^k(f(E\cap K)) = \int_{E\cap K} J_f(x)\,dx,$$

puis, en choisissant $W = K_n$ où $K_n$ une suite croissante de compacts tels que $\bigcup_n K_n = U$ et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on en déduit que

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \int_E J_f(x)\,dx,$$

ce qui conclut la preuve de la formule de l'aire. □

**Remarque 3.3.7.** (i) Si $k = 1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule du calcul de la longueur d'une courbe

$$\mathcal{H}^1(f(E)) = \int_E |f'(t)|\,dt.$$

(ii) Si $k = N-1$ et $f(x) = (x, a(x))$ où $a : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, la formule de l'aire permet de retrouver la formule de l'aire du graphe de $a$

$$\mathcal{H}^{N-1}(\{(x,a(x)) :\ x \in E\}) = \int_E \sqrt{1+|\nabla a(x)|^2}\,dx.$$

Cette formule (de même que la formule de l'aire en général) reste vraie pour des fonctions $a$ seulement Lipschitziennes en utilisant le théorème de Rademacher qui stipule qu'une fonction Lipschtzienne est différentiable presque partout.

On rappelle la définition d'espace tangent à une sous-variété ainsi qu'une caractérisation en terme de paramétrisation locale.

**Définition 3.3.8.** Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $x_0 \in M$, l'*espace tangent* à $M$ en $x_0$, noté $T_{x_0}M$, est défini par

$$T_{x_0}M := \Big\{ v \in \mathbb{R}^N : \text{ il existe un intervalle ouvert } I \text{ contenant } 0 \text{ et } \\ \gamma \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R}^N) \text{ tels que } \gamma(I) \subset M,\ \gamma(0) = x_0,\ \gamma'(0) = v \Big\}.$$

**Proposition 3.3.9.** *Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $x_0 \in M$, $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et si $f$ désigne une paramétrisation locale de $M$ en $x_0 = f(0)$, alors*

$$T_{x_0}M = \nabla f(0)(\mathbb{R}^k).$$

*Démonstration.* Soit $U$ un voisinage ouvert de $0$ dans $\mathbb{R}^k$, $V$ un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et $f : U \to V$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, injective telle que $f(0) = x_0$, $\nabla f(0)$ est une application linéaire injective et $f : U \to V \cap M$ est un homéomorphisme. On commence par montrer qu'il existe un ouvert $W$ contenant $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : W \to \mathbb{R}^N$ tels que

$$\varphi(M \cap W) = \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}). \tag{3.3.1}$$

En effet, pour tout $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^{N-k}$, on pose $g(x, y) = f(x) + (0, y)$ ce qui définit une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $U \times \mathbb{R}^{N-k}$. De plus, $g(0, 0) = x_0$ et $\nabla g(x, y)(h_1, h_2) = \nabla f(x)(h_1) + (0, h_2)$ pour tout $(x, y) \in U \times \mathbb{R}^{N-k}$ et tout $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$. En particulier $\nabla f(0)$ étant injective, on obtient que l'application linéaire $\nabla g(0, 0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est injective et donc bijective. Le théorème d'inversion locale montre alors que $g$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de $(0, 0)$. En particulier, il existe donc un ouvert $U' \subset U$ contenant $0$ dans $\mathbb{R}^k$, un ouvert $V'$ contenant $0$ dans $\mathbb{R}^{N-k}$ un ouvert $W$ contenant $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : W \to U' \times V'$ tels que

$$\varphi(f(x) + (0, y)) = (x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in U' \times V'.$$

En particulier, en prenant $y = 0$, on obtient que $\varphi(f(U')) = (U' \times V') \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$, ce qui montre effectivement (3.3.1).

Montrons maintenant que $T_{x_0}M$ est un sous espace vectoriel de dimension $k$ dans $\mathbb{R}^N$. Si $v \in T_{x_0}M$, il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $0$ et $\gamma \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^N)$ tels que $\gamma(I) \subset M$, $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$. Quitte à restreindre l'intervalle $I$, on peut supposer que $\gamma(I) \subset W$. On peut alors définir $\tilde\gamma(t) = \varphi(\gamma(t))$ pour tout $t \in I$ de sorte que $\tilde\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Comme $\gamma(t) \in M \cap W$ pour tout $t \in I$, alors $\tilde\gamma(t) \in \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ et donc $\tilde\gamma'(0) = \nabla\varphi(\gamma(0))(\gamma'(0)) = \nabla\varphi(x_0)(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$. On en déduit que $v \in (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$, soit $T_{x_0}M \subset (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$.

Pour montrer l'autre inclusion, fixons un élément $w \in \mathbb{R}^k \times \{0\}$. Comme $\varphi(W)$ est ouvert contenant $\varphi(x_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W)$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl} \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & \varphi^{-1}(\varphi(x_0) + tw) \end{array}$$

qui est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Comme $\varphi(x_0) + tw \in \varphi(W) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et $\varphi(M \cap W) = \varphi(W) \cap [\mathbb{R}^k \times \{0\}]$, on en déduit que $\gamma(t) \in M \cap W$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. De plus $\gamma(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on doit avoir que $\gamma'(0) = \nabla(\varphi^{-1})(\varphi(x_0))(w) = (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(w) \in T_{x_0}M$. On a donc bien établi que $\nabla\varphi(x_0)^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \subset T_{x_0}M$.

Comme $T_{x_0}M = (\nabla\varphi(x_0))^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ et $\nabla\varphi(x_0)$ est une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$, on en déduit que $T_{x_0}M$ est un sous-espace vectoriel de dimension $k$ dans $\mathbb{R}^N$.

Montrons enfin la caractérisation en terme de paramétrisation locale. Soit $v \in \mathbb{R}^k$, comme $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ contenant 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $tv \in U$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. On définit alors

$$\begin{array}{rcl}\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) & \to & \mathbb{R}^N \\ t & \mapsto & f(tv).\end{array}$$

Comme $f(U) = M \cap V$, on en déduit que $\gamma(t) \in M$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. De plus, la fonction $\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et satisfait $\gamma(0) = f(0) = x_0$. Par définition de l'espace tangent, on a $\gamma'(0) = \nabla f(0)(v) \in T_{x_0}M$, ce qui montre que $\mathrm{Im}(\nabla f(0)) \subset T_{x_0}M$. On sait déjà que $T_{x_0}M$ est un sous espace vectoriel de dimension $k$ dans $\mathbb{R}^N$. Comme, par ailleurs, $\nabla f(0) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N$ est une application linéaire injective, on en déduit que $\mathrm{Im}(\nabla f(0))$ est un sous-espace vectoriel de dimension $k$ dans $\mathbb{R}^N$. On a donc montré que $T_{x_0}M = \mathrm{Im}(\nabla f(0))$. □

Il est possible de caractériser l'espace tangent en terme de limite faible* de mesure.

**Proposition 3.3.10.** *Soit $M$ une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$. Pour tout $x_0 \in M$, la famille de mesures $\{\mu_{x_0,\varrho}\}_{\varrho>0}$ définie par*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} := \frac{1}{\varrho^k}\int_M \varphi\left(\frac{x-x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N),$$

*converge localement faible* dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ vers la mesure $\mathcal{H}^k \llcorner T_{x_0}M$.*

*Démonstration.* Soit $x_0 \in M$, $U$ un voisinage ouvert de 0, $V$ un voisinage ouvert de $x_0$ dans $\mathbb{R}^N$ et $f : U \to V$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, injective telle que $f(0) = x_0$, $\nabla f(0)$ est une application linéaire injective et $f : U \to V \cap M$ est un homéomorphisme. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, on considère $\varrho > 0$ assez petit de sorte que $x_0 + \varrho\,\mathrm{Supp}(\varphi) \subset V$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} = \frac{1}{\varrho^k}\int_M \varphi\left(\frac{x-x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) = \frac{1}{\varrho^k}\int_{f(U)} \varphi\left(\frac{x-x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x).$$

D'après la formule de l'aire et la formule de changement de variable, on obtient en posant $J_f := \sqrt{\det(\nabla f^T \nabla f)}$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} = \frac{1}{\varrho^k}\int_U \varphi\left(\frac{f(y)-f(0)}{\varrho}\right) J_f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{1}_U(\varrho z)\varphi\left(\frac{f(\varrho z)-f(0)}{\varrho}\right) J_f(\varrho z)\, dz.$$

Comme $U$ est ouvert, $\varphi$ est continue et $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, il vient pour tout $z \in \mathbb{R}^k$,

$$u_\varrho(z) := \mathbf{1}_U(\varrho z)\varphi\left(\frac{f(\varrho z)-f(0)}{\varrho}\right) J_f(\varrho z) \to \varphi(\nabla f(0)(z))J_f(0).$$

Afin de passer à la limite sous le signe intégral, il convient de montrer que $u_\varrho$ satisfait la propriété de domination. Par injectivité de $\nabla f(0)$, on a que

$$m = \min_{w \in \mathbb{S}^{N-1}} |\nabla f(0)(w)| > 0.$$

La différentiabilité de $f$ en 0 montre que pour tout $\varepsilon \in (0, m/2)$, il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $y \in B_{r_0}$

$$|f(y) - f(0)| \geq |\nabla f(0)(y)| - \varepsilon|y| \geq (m-\varepsilon)|y| \geq \frac{m}{2}|y|.$$

Par ailleurs, l'injectivité de $f$ montre que

$$\varepsilon_0 := \inf_{y \in U \setminus B_{r_0}} |f(y) - f(0)| > 0$$

de sorte que, pour tout $y \in U$,

$$|f(y) - f(0)| \geq \lambda |y| \quad \text{où} \quad \lambda := \min \left\{ \frac{m}{2}, \frac{\varepsilon_0}{\operatorname{diam}(U)} \right\}.$$

Soit $R > 0$ tel que $\operatorname{Supp}(\varphi) \subset B_R$. Alors, on a que $\operatorname{Supp}(u_\varrho) \subset B_{R/\lambda}(x_0)$ et donc $|u_\varrho| \leq \|\varphi\|_\infty \|J_f\|_\infty \mathbf{1}_{B_{R/\lambda}(x_0)}$. Nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème de la convergence dominée qui implique que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} \to \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\nabla f(0)(z)) J_f(0) \, dz = \int_{\nabla f(0)(\mathbb{R}^k)} \varphi(x) \, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{T_{x_0} M} \varphi \, d\mathcal{H}^k,$$

où l'on a de nouveau utilisé la formule de l'aire appliquée à l'application linéaire $z \mapsto \nabla f(0)(z)$. $\square$

## 3.4 Ensembles rectifiables

Nous allons à présent introduire la notion d'ensemble rectifiable qui généralise celle de sous-variété et sur laquelle il est toujours possible de définir un plan tangent au sens de la mesure.

**Définition 3.4.1.** Un sous ensemble $M$ de $\mathbb{R}^N$ est *(dénombrablement) $\mathcal{H}^k$-rectifiable* s'il existe un ensemble exceptionnel $Z \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{H}^k(Z) = 0$ et des sous-variétés $M_i$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^1$ tels que

$$M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \cup Z.$$

**Définition 3.4.2.** Soit $M \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble $\mathcal{H}^k$-rectifiable tel que $\mathcal{H}^k(M \cap K) < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ et $x_0 \in M$. Pour tout $\varrho > 0$, on définit la mesure $\mu_{x_0,\varrho}$ par $\mu_{x_0,\varrho}(A) := \varrho^{-k} \mathcal{H}^k((x_0 + \varrho A) \cap M)$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, ou encore

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} := \frac{1}{\varrho^k} \int_M \varphi \left( \frac{x - x_0}{\varrho} \right) d\mathcal{H}^k(x) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N).$$

On dit que $M$ admet un *espace tangent approché* en $x_0$ s'il existe un sous-espace vectoriel $\pi_{x_0}$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$, tel que $\mu_{x_0,\varrho} \rightharpoonup \mathcal{H}^k \llcorner \pi_{x_0}$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.

**Théorème 3.4.3.** *Soit $M \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble $\mathcal{H}^k$-rectifiable tel que $\mathcal{H}^k(M) < \infty$. Alors, $M$ admet un espace tangent approché en $\mathcal{H}^k$-presque tout $x \in M$ et*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{H}^k(M \cap B_\varrho(x))}{\omega_k \varrho^k} = 1 \quad \mathcal{H}^k\text{-p.p. tout } x \in M.$$

*Démonstration du théorème 3.4.3.* On écrit $M$ sous la forme $M \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \cup Z$, où $\mathcal{H}^k(Z) = 0$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $M_i$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, de dimension $k$ et de classe $\mathcal{C}^1$. On sait déjà d'après la Proposition 3.3.10 que pour tout $i \in \mathbb{N}$, tout $x_0 \in M_i$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\frac{1}{\varrho^k} \int_{M_i} \varphi \left( \frac{x - x_0}{\varrho} \right) d\mathcal{H}^k(x) \to \int_{T_{x_0} M_i} \varphi \, d\mathcal{H}^k,$$

On sait par ailleurs d'après la Proposition 3.2.7 que pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble $Z_i \subset \mathbb{R}^N$ (indépendant de $\varphi$) tel que $\mathcal{H}^k(Z_i) = 0$ et, pour tout $x_0 \in (M \cap M_i) \setminus Z_i$,

$$\frac{\mathcal{H}^k(B_\varrho(x_0) \cap (M \triangle M_i))}{\varrho^k} \to 0$$

et donc, en particulier pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\frac{1}{\varrho^k} \int_{M \triangle M_i} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) \to 0.$$

Par conséquent, pour tout $x_0 \in (M \cap M_i) \setminus Z_i$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mu_{x_0,\varrho} = \frac{1}{\varrho^k} \int_M \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k(x) \to \int_{T_{x_0} M_i} \varphi \, d\mathcal{H}^k.$$

Soit donc $Z_* := Z \cup \bigcup_i Z_i$ qui satisfait $\mathcal{H}^k(Z_*) = 0$. On a donc montré que pour tout $x_0 \in M \setminus Z_*$, il existe un sous-espace vectoriel $\pi_{x_0}$ de $\mathbb{R}^N$ de dimension $k$ tel que $\mu_{x_0,\varrho} \rightharpoonup \mathcal{H}^k \llcorner \pi_{x_0}$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Comme en particulier $\mathcal{H}^k(\pi_{x_0} \cap \partial B_1(0)) = 0$, on en déduit que

$$\frac{\mathcal{H}^k(B_\varrho(x_0) \cap M)}{\varrho^k} = \mu_{x_0,\varrho}(B_1) \to \mathcal{H}^k(\pi_{x_0} \cap B_1) = \omega_k,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. $\square$

La proposition suivante établit une propriété de localité de l'espace tangent approché.

**Proposition 3.4.4.** *Soient $M_1$ et $M_2$ deux ensembles $\mathcal{H}^k$-rectifiables tels que $\mathcal{H}^k(M_1) < \infty$ et $\mathcal{H}^k(M_2) < \infty$. Alors, pour $\mathcal{H}^k$-presque tout $x \in M_1 \cap M_2$,*

$$T_x M_1 = T_x M_2.$$

*Démonstration.* D'après la Proposition 3.2.7, pour $\mathcal{H}^k$-presque tout $x \in M_1 \cap M_2$, on a

$$\frac{\mathcal{H}^k((M_1 \triangle M_2) \cap B_\varrho(x))}{\varrho^k} = 0.$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, si $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset B_R$, on a

$$\left| \frac{1}{\varrho^k} \int_{M_1} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k - \frac{1}{\varrho^k} \int_{M_2} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\varrho}\right) d\mathcal{H}^k \right| \leq \|\varphi\|_\infty \frac{\mathcal{H}^k((M_1 \triangle M_2) \cap B_{\varrho R}(x_0))}{\varrho^k} \to 0.$$

Comme $T_x M_1$ existe $\mathcal{H}^k$-p.p. tout $x \in M_1$ et $T_x M_2$ existe $\mathcal{H}^k$-p.p. tout $x \in M_2$, on en déduit que $T_x M_1 = T_x M_2$ $\mathcal{H}^k$-p.p. tout $x \in M_1 \cap M_2$. $\square$