

Chapitre 4

Ensembles de périmètre fini

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Un ensemble Lebesgue mesurable $E \subset \mathbb{R}^N$ est de *périmètre fini* dans Ω si $D\chi_E \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. On définit alors le *périmètre de E dans Ω* par

$$P(E, \Omega) := |D\chi_E|(\Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N), |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Exemple 4.1.2. Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert (borné) de frontière Lipschitzienne, alors E est de périmètre fini dans Ω et $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$ où ν_E désigne la normale unitaire extérieure à E . En effet, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, en utilisant la formule de la divergence, il vient

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial E \cap \Omega} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

ce qui montre bien que $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$. Par ailleurs, une application immédiate de la Proposition 1.1.7 montre que $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner (\partial E \cap \Omega)$ si bien que

$$P(E, \Omega) = |D\chi_E|(\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega).$$

En appliquant l'injection de Sobolev (théorème 2.3.1) aux fonctions caractéristiques d'ensembles de périmètre fini on obtient la fameuse inégalité isopérimétrique.

Théorème 4.1.3 (Inégalité isopérimétrique). *Il existe une constante $\gamma_N > 0$ qui ne dépend que de la dimension telle que pour tout ensemble E de périmètre fini dans \mathbb{R}^N avec $\mathcal{L}^N(E) < \infty$,*

$$\mathcal{L}^N(E)^{\frac{N-1}{N}} \leq \gamma_N P(E, \mathbb{R}^N).$$

Le problème isopérimétrique consiste à minimiser le périmètre d'un ensemble à volume prescrit, autrement dit résoudre le problème de minimisation

$$\alpha := \inf \{ P(E, \mathbb{R}^N) : E \subset \mathbb{R}^N \text{ mesurable tel que } \mathcal{L}^N(E) = m \},$$

où $m > 0$ est une masse donnée. En choisissant $r > 0$ tel que $\omega_N r^N = m$, on a alors que $\mathcal{L}^N(B_r) = m$ et $0 \leq \alpha \leq P(\partial B_r, \mathbb{R}^N) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r) < \infty$. La méthode directe du calcul des variations ne permet pas de montrer directement l'existence de solutions car la masse d'une suite minimisante $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ peut s'échapper à l'infini de sorte $\chi_{E_k} \rightarrow \chi_E$ dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^N)$ où E est un ensemble de

périmètre fini dans \mathbb{R}^N satisfaisant $P(E, \mathbb{R}^N) = \alpha$ mais seulement l'inégalité stricte $\mathcal{L}^N(E) < m$. Néanmoins, en utilisant les symmétries du problème on peut toutefois montrer l'existence des solutions correspondant aux boules de volume m .

Le résultat suivant de compacité est une conséquence immédiate du théorème de Rellich pour les fonctions BV .

Théorème 4.1.4 (Rellich). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. De toute suite $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'ensembles de périmètre fini dans Ω telle que*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \{ \mathcal{L}^N(E_k) + P(E_k, \Omega) \} < \infty,$$

on peut extraire une sous-suite $\{E_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ telle que $\chi_{E_{k_j}} \rightarrow \chi_E$ fortement dans $L^1(\Omega)$ et $D\chi_{E_{k_j}} \rightharpoonup D\chi_E$ faible dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$, où E est un ensemble de périmètre fini dans Ω tel que $\mathcal{L}^N(E) < \infty$.*

Démonstration. Si $u_k = \chi_{E_k}$, le théorème 2.3.3 montre que $\chi_{E_{k_j}} \rightarrow u$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (en donc aussi \mathcal{L}^N -presque partout quitte à extraire une sous-suite) et $Du_k \rightharpoonup Du$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $u(x) \in \{0, 1\}$ pour \mathcal{L}^N -presque tout $x \in \Omega$ et donc, il existe un ensemble E mesurable tel que $u = \chi_E$. D'après le Lemme de Fatou, il vient $\mathcal{L}^N(E) < \infty$. Comme par ailleurs $P(E, \Omega) < \infty$, on en déduit que $u = \chi_E \in BV(\Omega)$.

Il reste à montrer la convergence dans tout $L^1(\Omega)$. Pour ce faire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\mathcal{L}^N(\Omega \setminus K) \leq \varepsilon$. On considère alors un ouvert borné et Lipschitzien ω tel que $K \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega$. Alors, on a

$$\int_{\Omega} |\chi_{E_k} - \chi_E| dx \leq \int_{\omega} |\chi_{E_k} - \chi_E| dx + 2\mathcal{L}^N(\Omega \setminus \omega) \leq \int_{\omega} |\chi_{E_k} - \chi_E| dx + 2\varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient bien que $\chi_{E_k} \rightarrow \chi_E$ dans $L^1(\Omega)$. \square

Un cas particulier de l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger dans BV est le cas où $\Omega = B_{\varrho}(x_0)$ et u est la fonction caractéristique d'un ensemble de périmètre fini. On obtient une version localisée de l'inégalité isopérimétrique.

Théorème 4.1.5 (Inégalité isopérimétrique relative). *Il existe une constante $C_N > 0$, ne dépendant que de la dimension, telle que pour tout ensemble E de périmètre fini dans \mathbb{R}^N , pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varrho > 0$,*

$$\min\{ \mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0) \cap E), \mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0) \setminus E) \}^{\frac{N-1}{N}} \leq C_N P(E, B_{\varrho}(x_0)).$$

Démonstration. Si E est un ensemble de périmètre fini dans \mathbb{R}^N , alors $u := \chi_E \in BV(B_{\varrho}(x_0))$. Posons $v(y) := u(x_0 + \rho y)$ pour $y \in B_1$ de sorte que $v \in BV(B_1)$. D'après l'inégalité de Sobolev-Poincaré-Wirtinger, il existe une constante dimensionnelle $C_N > 0$ telle que

$$\|v - v_{B_1}\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(B_1)} \leq C_N |Dv|(B_1).$$

Par changement de variable, il vient

$$\|u - u_{B_{\varrho}(x_0)}\|_{L^{\frac{N}{N-1}}(B_{\varrho}(x_0))} \leq C_N |Du|(B_{\varrho}(x_0)),$$

ou encore

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0))} \right) + \mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0) \setminus E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0) \cap E)}{\mathcal{L}^N(B_{\varrho}(x_0))} \right) \\ \leq C_N P(E, B_{\varrho}(x_0)). \end{aligned}$$

Si $\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E) \leq \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)$, alors $\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E) \geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))$ et il vient

$$\begin{aligned} C_N P(E, B_\varrho(x_0)) &\geq \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}} \left(\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0))} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)^{\frac{N-1}{N}}. \end{aligned}$$

L'autre cas se démontre de manière analogue. \square

Un exemple d'application est le *problème de Cheeger*. Soient $p > 0$, $N \geq 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Le p -problème de Cheeger dans Ω est le problème variationnel suivant :

$$C_p(\Omega) := \inf \left\{ \frac{P(E, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} : E \subset \Omega, \mathcal{L}^N(E) > 0 \right\}.$$

Toute solution de ce problème de minimisation est appelé un p -ensemble de Cheeger. Notons tout d'abord que $C_p(\Omega) < \infty$, ce qui se vérifie en prenant $E = B$ une boule contenue dans Ω .

Si $p < (N-1)/N$, alors $C_p(\Omega) = 0$. En effet, si $B_\varepsilon \subset \Omega$ est une boule de rayon $\varepsilon > 0$, alors

$$C_p(\Omega) \leq \frac{P(B_\varepsilon, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(B_\varepsilon)^p} = \varepsilon^{N-1-Np} \frac{P(B, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(B)^p} \rightarrow 0$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent, s'il existait un ensemble $E \subset \Omega$ (de périmètre fini dans \mathbb{R}^N) tel que

$$0 = C_p(\Omega) = \frac{P(E, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p},$$

alors $P(E, \mathbb{R}^N) = |D\chi_E|(\mathbb{R}^N) = 0$ et donc χ_E serait constant sur \mathbb{R}^N . Si $\chi_E = 1$, on aurait alors que $E = \mathbb{R}^N$ ce qui est impossible puisque $E \subset \Omega$ et Ω est borné. Si en revanche $\chi_E = 0$, alors $\mathcal{L}^N(E) = 0$ ce qui est également impossible. Ceci montre qu'un p -ensemble de Cheeger ne peut pas exister quand $p < (N-1)/N$.

Supposons maintenant que $p \geq (N-1)/N$. Si $E \subset \Omega$, en utilisant l'inégalité isopérimétrique, on obtient que

$$\mathcal{L}^N(E)^p \leq \mathcal{L}^N(E)^{\frac{N-1}{N}} \mathcal{L}^N(\Omega)^{p-\frac{N-1}{N}} \leq \gamma_N P(E, \mathbb{R}^N) \mathcal{L}^N(\Omega)^{p-\frac{N-1}{N}},$$

où $\gamma_N > 0$ est une constante dimensionnelle, ce qui montre que

$$C_p(\Omega) \geq \frac{\mathcal{L}^N(\Omega)^{\frac{N-1}{N}-p}}{\gamma_N} > 0.$$

Considérons alors une suite minimisante $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que $E_k \subset \Omega$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et

$$\frac{P(E_k, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E_k)^p} \rightarrow C_p(\Omega).$$

Comme Ω est borné, on a $\mathcal{L}^N(E_k) \leq \mathcal{L}^N(\Omega)$, et $P(E_k, \mathbb{R}^N) \leq (C_p(\Omega) + 1)\mathcal{L}^N(E_k)^p \leq (C_p(\Omega) + 1)\mathcal{L}^N(\Omega)^p$ pour k assez grand. On en déduit que $(\chi_{E_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $BV(\mathbb{R}^N)$. D'après le théorème de Rellich, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\chi_{E_k} \rightarrow \chi_E$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ où $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^N)$. Comme $E_k \subset \Omega$, alors $\mathcal{L}^N(E_k \setminus \Omega) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis, par passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$, on obtient que $\mathcal{L}^N(E \setminus \Omega) = 0$. Par conséquent, on peut modifier E sur un ensemble de \mathcal{L}^N -mesure nulle près (et donc sans changer sa mesure de Lebesgue

ni son périmètre) pour assurer que $E \subset \Omega$. De plus, on a $\mathcal{L}^N(E_k) \rightarrow \mathcal{L}^N(E)$ et, par semicontinuité inférieure du périmètre $P(E, \mathbb{R}^N) \leq \liminf_k P(E_k, \mathbb{R}^N)$. Par conséquent,

$$C_p(\Omega) \leq \frac{P(E, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E)^p} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{P(E_k, \mathbb{R}^N)}{\mathcal{L}^N(E_k)^p} = C_p(\Omega),$$

ce qui montre que E est un p -ensemble de Cheeger. Si $p = N/(N-1)$, il est possible de montrer que toutes les boules contenues dans Ω sont les seuls p -ensembles de Cheeger.

4.2 Formule de la co-aire

La formule de la co-aire permet de reconstruire l'intégrale $\int_{\Omega} |\nabla u| dx$ pour une fonction (régulière) u à partir de la mesure de ses ensembles de niveau. Nous donnons ici une version "faible" pour les fonctions à variation bornée pour calculer la variation totale $|Du|(\Omega)$ d'une fonction $u \in BV(\Omega)$ où la mesure des ensembles de niveau est remplacée par le périmètre des ensembles $\{u > t\}$.

Théorème 4.2.1 (Fleming-Rishel). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in BV(\Omega)$. Alors les ensembles $\{u > t\}$ sont de périmètre fini dans Ω pour \mathcal{L}^1 -presque tout $t \in \mathbb{R}$ et, pour tout Borélien $A \subset \Omega$,*

$$|Du|(A) = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A) dt, \quad (4.2.1)$$

$$Du(A) = \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{u>t\}}(A) dt. \quad (4.2.2)$$

Démonstration. On pose $E_t := \{u > t\}$. Quitte à modifier u sur un ensemble de mesure \mathcal{L}^N nulle, on peut supposer que u est une fonction Borélienne sur Ω , ce qui fait de $\{u > t\}$ un Borélien de Ω . Il vient alors que les fonctions $(x, t) \mapsto u(x) - t$ et $(x, t) \mapsto \chi_{\{u>t\}}(x)$ sont Boréliennes sur $\Omega \times \mathbb{R}$. D'après le théorème de Fubini, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \leq 1$, la fonction

$$t \mapsto \int_{\Omega} \chi_{E_t}(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx$$

est alors Borélienne sur \mathbb{R} . Si D est un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on en déduit que

$$t \mapsto P(E_t, \Omega) = \sup_{\varphi \in D, |\varphi| \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \chi_{E_t}(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \right\}$$

est Borélienne sur \mathbb{R} .

Étape 1. Pour tout $x \in \Omega$, on a

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^+} \chi_{E_t}(x) dt - \int_{\mathbb{R}^-} (1 - \chi_{E_t}(x)) dt.$$

Par conséquent, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \leq 1$, on obtient que

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \chi_{E_t}(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx dt \leq \int_{\mathbb{R}} P(E_t, \Omega) dt. \quad (4.2.3)$$

Par passage au supremum parmi toutes les fonctions test φ , il vient

$$|Du|(\Omega) \leq \int_{\mathbb{R}} P(E_t, \Omega) dt.$$

Etape 2. Pour montrer l'autre inégalité, on suppose d'abord que u est une fonction affine et continue par morceaux. Il existe alors une partition de \mathbb{R}^N en N -simplexes A_1, \dots, A_m d'intérieurs deux à deux disjoints et des fonctions affines $x \mapsto f_i(x) := a_i \cdot x + b_i$ telles que

$$u(x) = f_i(x) \quad \text{pour tout } x \in A_i.$$

On a alors d'une part que

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}^N(A_i \cap \Omega) |a_i|.$$

D'autre part, notant alors $e_i := a_i/|a_i|$, la formule changement de variable donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u = t\}) dt &= \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(A_i \cap \Omega \cap \{u = t\}) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\{x \in A_i \cap \Omega : a_i \cdot x + b_i = t\}) dt \\ &= |a_i| \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\{x \in A_i \cap \Omega : e_i \cdot x = s\}) ds, \end{aligned}$$

puis, en vertu du théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u = t\}) dt = |a_i| \mathcal{L}^N(A_i \cap \Omega),$$

ce qui montre que

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u = t\}) dt.$$

L'ensemble $\{u > t\}$ étant un ouvert à frontière polyédrique, on a $|D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \{u = t\})$ et donc

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega) dt.$$

On suppose maintenant que $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Si U est un ouvert borné tel que $\bar{U} \subset \Omega$, on approche u par une suite $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues affines par morceaux dans $W^{1,1}(U)$. On a alors que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_U |\nabla u_j| dx = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u_j>t\}}|(U) dt.$$

Comme

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} |\chi_{\{u_j>t\}} - \chi_{\{u>t\}}| dx dt = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^N(\{u > t\} \Delta \{u_j > t\}) dt = \int_{\Omega} |u_j - u| dx \rightarrow 0,$$

on en déduit que, pour une sous-suite et pour tout \mathcal{L}^1 -presque tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\chi_{\{u_j>t\}} \rightarrow \chi_{\{u>t\}}$ dans $L^1(\Omega)$. Par passage à la limite quand $j \rightarrow \infty$, en utilisant la semi-continuité inférieure du périmètre et le Lemme de Fatou, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P(\{u > t\}, U) dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{j \rightarrow \infty} P(\{u_j > t\}, U) dt \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} P(\{u_j > t\}, U) dt \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_U |\nabla u_j| dx = \int_U |\nabla u| dx. \end{aligned}$$

Enfin, en considérant une suite croissante $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts bornés tels que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ et $\bigcup_n U_n = \Omega$, on obtient par convergence monotone quand $n \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} P(\{u > t\}, \Omega) dt \leq \int_{\Omega} |\nabla u| dx.$$

Enfin, si $u \in BV(\Omega)$, on considère une suite $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$ telle que $u_k \rightarrow u$ dans $L^1(\Omega)$ et $|Du_k|(\Omega) \rightarrow |Du|(\Omega)$. Par le même raisonnement que précédemment, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} P(\{u > t\}, \Omega) dt &\leq \int_{\mathbb{R}} \liminf_{k \rightarrow \infty} P(\{u_k > t\}, \Omega) dt \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} P(\{u_k > t\}, \Omega) dt \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k| dx = |Du|(\Omega). \end{aligned}$$

Cette deuxième inégalité montre que, si $u \in BV(\Omega)$, alors $P(E_t, \Omega) < \infty$ pour \mathcal{L}^1 -presque tout $t \in \mathbb{R}$, et donc que $\{u > t\}$ est de périmètre fini dans Ω pour \mathcal{L}^1 -presque tout $t \in \mathbb{R}$.

Étape 3. Si $A \subset \Omega$ est un Borélien, par régularité extérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $U \supset A$ tel que $|Du|(U \setminus A) \leq \varepsilon$. En reprenant la démonstration précédente, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A) dt \leq \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(U) dt = |Du|(U) \leq |Du|(A) + \varepsilon$$

puis, en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A) dt \leq |Du|(A).$$

Comme

$$A \in \mathcal{B}(\Omega) \mapsto |Du|(A) - \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A) dt$$

est une mesure positive et de masse totale finie, il vient finalement que

$$\int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(A) dt = |Du|(A),$$

ce qui établit (4.2.1). Enfin, (4.2.3) implique que

$$\int_{\Omega} \varphi \cdot dDu = - \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\Omega} \chi_{E_t} \operatorname{div} \varphi dx dt = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Omega} \varphi \cdot dD\chi_{E_t} \right) dt$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ ce qui montre (4.2.2). \square

Un cas particulier important concerne le cas où $u(x) = |x|$ qui est une fonction appartenant à $BV(B_R)$ pour tout $R > 0$ dont la dérivée distributionnelle est donnée par la fonction $\nabla u(x) = x/|x|$. Donc ce cas, les ensembles de sur-niveau de u sont donnés par

$$\{u > r\} = \mathbb{R}^N \setminus \bar{B}_r.$$

Comme ces ensembles sont réguliers, pour tout $r < R$ et tout Borélien $A \subset B_R$, on a

$$|D\chi_{\{u>r\}}|(A) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r \cap A) = r^{N-1} \mathcal{H}^{N-1}(\mathbb{S}^{N-1} \cap (A/r)).$$

Une application immédiate de la formule de la co-aire donne alors que pour tout Borélien borné $A \subset \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^N(A) &= \int_{\mathbb{R}^+} \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r \cap A) dr = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial B_r} \chi_A(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) dr \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \chi_A(ry) r^{N-1} d\mathcal{H}^{N-1}(y) dr. \end{aligned}$$

Par approximation, si $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction Borélienne, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\partial B_r} g(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) dr = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} g(ry) r^{N-1} d\mathcal{H}^{N-1}(y) dr,$$

ce qui correspond à la formule de changement de variables en coordonnées polaires en dimension quelconque.

4.3 Frontière réduite

Nous allons montrer que tout ensemble de périmètre fini possède une structure similaire à un ensemble régulier au sens où sa dérivée distributionnelle est concentrée sur un sous-ensemble dénombrablement \mathcal{H}^{N-1} -rectifiable sur lequel il est possible de définir une normale approchée.

Dans la suite de cette section, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert et E est un ensemble de périmètre fini dans Ω .

Définition 4.3.1. La *frontière réduite* $\partial^* E$ est l'ensemble des points $x_0 \in \Omega \cap \text{Supp}(|D\chi_E|)$ tels que la limite

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{D\chi_E(B_\varrho(x_0))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))} =: -\nu_E(x_0)$$

existe et satisfait $|\nu_E(x_0)| = 1$. La fonction $\nu_E : \partial^* E \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ s'appelle la *normale extérieure généralisée*.

Remarque 4.3.2. (i) D'après le Corollaire 1.4.7 sur la décomposition polaire d'une mesure vectorielle, on a

$$|D\chi_E|(\Omega \setminus \partial^* E) = 0,$$

autrement dit, $D\chi_E$ est concentrée sur $\partial^* E$, et

$$D\chi_E = -\nu_E |D\chi_E|.$$

(ii) Comme $\text{Supp}(|D\chi_E|) \subset \partial E$, on en déduit que $\partial^* E \subset \partial E$.

(iii) Comme les fonctions $x \mapsto D\chi_E(B_\varrho(x))$ et $x \mapsto |D\chi_E|(B_\varrho(x))$ sont Boréliennes sur Ω , on en déduit que $\partial^* E$ est un Borélien de Ω et que la fonction $\nu_E : \partial^* E \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ est Borélienne.

Lemme 4.3.3. *Il existe des constantes $A_1, \dots, A_5 > 0$ telles que pour tout $x_0 \in \partial^* E$,*

- (i) $\liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)}{\varrho^N} > A_1,$
- (ii) $\liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\varrho^N} > A_2,$
- (iii) $\liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} > A_3,$

$$(iv) \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} \leq A_4,$$

$$(v) \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_{E \cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N)}{\varrho^{N-1}} \leq A_5.$$

Démonstration. Etape 1. Soit $x_0 \in \partial^* E$, on pose $\delta := \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$. On commence par montrer que pour \mathcal{L}^1 -presque tout $\varrho \in (0, \delta)$,

$$|D\chi_{E \cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \leq |D\chi_E|(B_\varrho(x_0)) + \mathcal{H}^{N-1}(E \cap \partial B_\varrho(x_0)). \quad (4.3.1)$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et $g(t) = \chi_{[0, \varrho]}(t)$ de sorte que $\chi_{B_\varrho(x_0)}(y) = g(|y - x_0|)$. On régularise la fonction caractéristique en posant

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \varrho, \\ \frac{\varrho + \varepsilon - t}{\varepsilon} & \text{si } \varrho \leq t \leq \varrho + \varepsilon, \\ 0 & \text{si } t \geq \varrho + \varepsilon, \end{cases}$$

de sorte que

$$g'_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \varrho, \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \text{si } \varrho < t < \varrho + \varepsilon, \\ 0 & \text{si } t > \varrho + \varepsilon. \end{cases}$$

On pose alors $h_\varepsilon(y) = g_\varepsilon(|y - x_0|)$ qui définit une fonction Lipschitzienne et satisfait

$$\nabla h_\varepsilon(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq |y - x_0| < \varrho \text{ ou } |y - x_0| > \varrho + \varepsilon, \\ -\frac{1}{\varepsilon} \frac{y - x_0}{|y - x_0|} & \text{si } \varrho < |y - x_0| < \varrho + \varepsilon. \end{cases}$$

Par conséquent, comme $h_\varepsilon \varphi$ est Lipschitzienne et $\text{Supp}(h_\varepsilon \varphi) \subset \Omega$, on a

$$-\int_\Omega h_\varepsilon \varphi \cdot dD\chi_E = \int_E \text{div}(h_\varepsilon \varphi) dy = \int_E h_\varepsilon \text{div} \varphi dy - \frac{1}{\varepsilon} \int_{E \cap \{y \in \Omega : \varrho < |y - x_0| < \varrho + \varepsilon\}} \varphi(y) \cdot \frac{y - x_0}{|y - x_0|} dy.$$

D'après la formule de la co-aire et le théorème de différentiation de Besicovitch, on a pour \mathcal{L}^1 -presque tout $\varrho > 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon} \int_{E \cap \{y \in \Omega : \varrho < |y - x_0| < \varrho + \varepsilon\}} \varphi(y) \cdot \frac{y - x_0}{|y - x_0|} dy &= \frac{1}{\varepsilon} \int_\varrho^{\varrho + \varepsilon} \int_{E \cap \partial B_r(x_0)} \varphi(y) \cdot \frac{y - x_0}{|y - x_0|} d\mathcal{H}^{N-1}(y) dr \\ &\rightarrow \int_{E \cap \partial B_\varrho(x_0)} \varphi(y) \cdot \frac{y - x_0}{|y - x_0|} d\mathcal{H}^{N-1}(y). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on en déduit que

$$\int_{E \cap B_\varrho(x_0)} \text{div} \varphi dy = - \int_{B_\varrho(x_0)} \varphi \cdot dD\chi_E + \int_{E \cap \partial B_\varrho(x_0)} \varphi(y) \cdot \frac{y - x_0}{|y - x_0|} d\mathcal{H}^{N-1}(y). \quad (4.3.2)$$

Par passage au supremum par rapport à $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ tels que $|\varphi| \leq 1$, on en déduit (4.3.1).

Etape 2. Dans (4.3.2), on choisit $\varphi = \nu_E(x_0)$ dans $B_\varrho(x_0)$. On obtient alors

$$\nu_E(x_0) \cdot D\chi_E(B_\varrho(x_0)) = \int_{E \cap \partial B_\varrho(x_0)} \nu_E(x_0) \cdot \nu(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y).$$

Comme $x_0 \in \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \nu_E(x_0) \cdot \frac{D\chi_E(B_\varrho(x_0))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))} = -|\nu_E(x_0)|^2 = -1.$$

Il existe donc $\varrho_0 = \varrho_0(x_0) \in (0, \delta)$ tel que pour \mathcal{L}^1 -presque tout $\varrho < \varrho_0$, $|\nu_E(x_0) \cdot D\chi_E(B_\varrho(x_0))| \geq \frac{1}{2}|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))$ de sorte que

$$|D\chi_E|(B_\varrho(x_0)) \leq 2\mathcal{H}^{N-1}(E \cap \partial B_\varrho(x_0))$$

puis, en reportant dans (4.3.1),

$$|D\chi_{E \cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \leq 3\mathcal{H}^{N-1}(E \cap \partial B_\varrho(x_0)).$$

Comme $\mathcal{H}^{N-1}(E \cap \partial B_\varrho(x_0)) \leq \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\varrho(x_0)) = \varrho^{N-1}\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_1(0))$, les deux dernières inégalités donnent (iv) et (v).

Etape 3. D'après la formule de la co-aire, on a

$$g(\varrho) := \int_0^\varrho \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_r(x_0) \cap E) dr = \mathcal{L}^N(E \cap B_\varrho(x_0)) < \infty,$$

et en vertu du théorème de différentiation de Besicovitch, pour \mathcal{L}^1 -presque tout $\varrho > 0$,

$$g'(\varrho) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial B_\varrho(x_0) \cap E).$$

D'après l'inégalité isopérimétrique,

$$\begin{aligned} g(\varrho)^{\frac{N-1}{N}} &= \mathcal{L}^N(E \cap B_\varrho(x_0))^{\frac{N-1}{N}} \\ &\leq \gamma_N |D\chi_{E \cap B_\varrho(x_0)}|(\mathbb{R}^N) \\ &\leq 3\gamma_N \mathcal{H}^{N-1}(E \cap \partial B_\varrho(x_0)) \\ &= 3\gamma_N g'(\varrho). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{3\gamma_N} \leq g(\varrho)^{\frac{1-N}{N}} g'(\varrho) = N[g(\varrho)^{\frac{1}{N}}]'$$

de sorte que

$$g(\varrho)^{\frac{1}{N}} \geq \frac{\varrho}{3N\gamma_N}.$$

On en déduit que pour \mathcal{L}^1 -presque tout $\varrho \in (0, \varrho_0)$

$$\mathcal{L}^N(E \cap B_\varrho(x_0)) = g(\varrho) \geq \frac{\varrho^N}{(3N\gamma_N)^N},$$

ce qui établit (i). Comme pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div} \varphi dy = \int_E \operatorname{div} \varphi dy + \int_{\Omega \setminus E} \operatorname{div} \varphi dy,$$

on en déduit que $D\chi_E = -D\chi_{\Omega \setminus E}$ et de que $P(\Omega \setminus E, \Omega) = P(E, \Omega) < \infty$, ce qui montre que $\Omega \setminus E$ est un ensemble de périmètre fini dans Ω . Comme $\partial^*(\Omega \setminus E) = \partial^* E$, l'argument précédent appliqué à $\Omega \setminus E$ montre alors la validité de (ii).

L'inégalité isopérimétrique relative montre ensuite que

$$\begin{aligned} \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\varrho^{N-1}} &\geq C \min \left\{ \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(E \cap B_\varrho(x_0))}{\varrho^N}, \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\varrho^N} \right\}^{\frac{N-1}{N}} \\ &\geq C \min\{A_1, A_2\}^{\frac{N-1}{N}}, \end{aligned}$$

ce qui implique (iii). \square

Le résultat suivant permet de montrer que $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$ est une mesure absolument continue par rapport à $|D\chi_E|$.

Lemme 4.3.4. *Il existe une constante $c_N > 0$ telle que pour tout Borélien $A \subset \Omega$,*

$$\mathcal{H}^{N-1}(A \cap \partial^* E) \leq c_N |D\chi_E|(A).$$

Démonstration. On utilise un argument de recouvrement. Par régularité extérieure de $|D\chi_E|$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U \subset \Omega$ contenant A tel que

$$|D\chi_E|(U) \leq |D\chi_E|(A) + \varepsilon.$$

D'après le Lemme 4.3.3-(iii), pour tout $x \in A \cap \partial^* E$ et tout $\delta > 0$, il existe $\varrho_x \in (0, \delta)$ tel que $\overline{B_{\varrho_x}(x)} \subset U$ et $|D\chi_E|(B_{\varrho_x}(x)) > A_3 \varrho_x^{N-1}$. On pose

$$\mathcal{F} := \{\overline{B_\varrho(x)} : x \in A \cap \partial^* E, 0 < \varrho < \delta, \overline{B_\varrho(x)} \subset U, |D\chi_E|(B_\varrho(x)) > A_3 \varrho^{N-1}\},$$

ce qui définit un recouvrement de $A \cap \partial^* E$. D'après le théorème de recouvrement de Besicovitch, il existe ξ sous-recouvrements dénombrables disjoints $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_\xi$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_i} B.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{2\delta}^{N-1}(A \cap \partial^* E) &\leq \omega_{N-1} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B \in \mathcal{F}_i} \left(\frac{\text{diam}(B)}{2} \right)^{N-1} \\ &= \frac{\omega_{N-1}}{A_3} \sum_{i=1}^{\xi} \sum_{B \in \mathcal{F}_i} |D\chi_E|(B) \\ &\leq \frac{\omega_{N-1}}{A_3} \sum_{i=1}^{\xi} |D\chi_E|(U) \\ &\leq \frac{\xi \omega_{N-1}}{A_3} (|D\chi_E|(A) + \varepsilon). \end{aligned}$$

La conclusion suit par passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\delta \rightarrow 0$. \square

Nous allons à présent améliorer le résultat précédent en montrant qu'en fait $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$.

Théorème 4.3.5 (De Giorgi - 1). *Soit $x_0 \in \partial^* E$, on pose $E_{x_0, \varrho} := (E - x_0)/\varrho$ et*

$$H^\pm(x_0) := \{y \in \mathbb{R}^N : \pm \nu_E(x_0) \cdot (y - x_0) > 0\}.$$

Alors

$$\chi_{E_{x_0, \varrho}} \rightarrow \chi_{H^-(x_0)} \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

De plus,

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E \cap H^+(x_0))}{\varrho^N} = 0; \\
(ii) \quad & \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E \cap H^-(x_0))}{\varrho^N} = 0; \\
(iii) \quad & \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x_0))}{\omega_{N-1}\varrho^{N-1}} = 1.
\end{aligned}$$

Démonstration. On suppose pour simplifier que $x_0 = 0$, $\nu_E(0) = e_N = (0, \dots, 0, 1)$ et on pose $E_\varrho := E_{0,\varrho}$, $H^\pm := H^\pm(0)$, $H_0 = e_N^\perp$.

Soit $R > 0$. Pour tout $\varphi \in C_c^1(B_R; \mathbb{R}^N)$ avec $|\varphi| \leq 1$, on a

$$\int_{E_\varrho} \operatorname{div} \varphi(x) dx = \frac{1}{\varrho^N} \int_E \operatorname{div} \varphi\left(\frac{y}{\varrho}\right) dy = \frac{1}{\varrho^{N-1}} \int_E \operatorname{div} \varphi_\varrho(y) dy \leq \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho})}{\varrho^{N-1}} \leq C_R$$

d'après le Lemme 4.3.3-(iv), où l'on a posé $\varphi_\varrho := \varphi(\frac{\cdot}{\varrho}) \in C_c^1(B_{R\varrho}; \mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $P(E_\varrho, B_R) \leq C_R$, ce qui montre que la suite $\{\chi_{E_\varrho}\}_{\varrho>0}$ est bornée dans $BV(B_R)$ pour tout $R < \infty$. En utilisant le théorème de Rellich et un principe d'extraction diagonal, il existe une sous-suite et un ensemble de périmètre localement fini $F \subset \mathbb{R}^N$ tels que $\chi_{E_{\varrho_j}} \rightarrow \chi_F$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $D\chi_{E_{\varrho_j}} \rightarrow D\chi_F$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$. Quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut également supposer que $|D\chi_{E_{\varrho_j}}| \rightarrow \lambda$ localement faible* dans $\mathcal{M}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ où λ est une mesure de Radon positive sur \mathbb{R}^N .

Pour tout $R > 0$, on a

$$|D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R) = \frac{|D\chi_E|(B_{R\varrho_j})}{\varrho_j^{N-1}}, \quad D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) = \frac{D\chi_E(B_{R\varrho_j})}{\varrho_j^{N-1}}, \quad (4.3.3)$$

de sorte que

$$-e_N = -\nu_E(0) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{D\chi_E(B_{R\varrho_j})}{|D\chi_E|(B_{R\varrho_j})} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R)}{|D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R)}.$$

Si on choisit $R > 0$ tel que $\lambda(\partial B_R) = 0$ (ce qui est satisfait sauf pour un ensemble dénombrable de rayons R), d'après la Proposition 1.3.4, on a $D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) \rightarrow D\chi_F(B_R)$. Par ailleurs, la semicontinuité inférieure de la variation totale assure que

$$\begin{aligned}
|D\chi_F|(B_R) & \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} |D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R) \\
& \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} |D\chi_{E_{\varrho_j}}|(B_R) \\
& = - \lim_{j \rightarrow \infty} e_N \cdot D\chi_{E_{\varrho_j}}(B_R) \\
& = -e_N \cdot D\chi_F(B_R) \leq |D\chi_F|(B_R),
\end{aligned} \quad (4.3.4)$$

ce qui montre que $|D\chi_F|(B_R) = -e_N \cdot D\chi_F(B_R) = - \int_{B_R} (e_N \cdot \nu_F) d|D\chi_F|$. Comme $1 + e_N \cdot \nu_F \geq 0$, $|\nu_F| = 1$ et $|e_N| = 1$ $|D\chi_F|$ -p.p. dans \mathbb{R}^N , on en déduit que

$$\nu_F = -e_N \quad |D\chi_F| \text{-p.p. dans } \mathbb{R}^N.$$

En particulier, du fait que $D\chi_F = -e_N |D\chi_F|$, il vient que $D_i \chi_F = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq i \leq N-1$, ce qui montre que la fonction χ_F ne dépend que de la variable x_N . Comme de plus $D_N \chi_F = -|D\chi_F| \leq 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que χ_F est en fait une fonction décroissante de la variable x_N . Comme χ_F est une fonction caractéristique, il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que

$$F = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N < a\}.$$

Si $a < 0$, alors $B_{|a|} \cap F = \emptyset$ et donc

$$0 = \mathcal{L}^N(B_{|a|} \cap F) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mathcal{L}^N(B_{|a|} \cap E_{\varrho_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}^N(B_{|a|} \cap E_{\varrho_j})}{\varrho_j^N},$$

ce qui rentre en contradiction avec le Lemme (4.3.3)-(i). Par conséquent $a \geq 0$ et un argument analogue montre que $a \leq 0$, soit $a = 0$. Il vient alors que $F = H^-$ et comme la limite est indépendante de la sous-suite extraite, il n'y a pas besoin d'extraire de sous-suite.

Comme $\chi_{E_\varrho} \rightarrow \chi_{H^-}$ dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on a alors

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho \cap E \cap H^+)}{\varrho^N} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \mathcal{L}^N(B_1 \cap E_\varrho \cap H^+) = \mathcal{L}^N(B_1 \cap H^- \cap H^+) = 0.$$

De même

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho \setminus E \cap H^-)}{\varrho^N} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \mathcal{L}^N(B_1 \setminus E_\varrho \cap H^-) = \mathcal{L}^N(B_1 \setminus H^- \cap H^-) = 0.$$

Enfin, en utilisant (4.3.3) et la semicontinuité inférieure de la variation totale, on obtient que

$$\liminf_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho)}{\varrho^{N-1}} = \liminf_{\varrho \rightarrow 0} |D\chi_{E_\varrho}|(B_1) \geq |D\chi_{H^-}|(B_1) = \mathcal{H}^{N-1}(H_0 \cap B_1) = \omega_{N-1}$$

où l'on a utilisé le fait que $F = H^-$ et donc que $D\chi_F = -e_N \mathcal{H}^{N-1} \llcorner H_0$. Pour montrer l'autre inégalité, on utilise (4.3.4) avec $R = R_k \searrow 1$ tel que $\lambda(\partial B_{R_k}) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Il vient alors que

$$\begin{aligned} \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho)}{\varrho^{N-1}} &= \limsup_{\varrho \rightarrow 0} |D\chi_{E_\varrho}|(B_1) \leq \limsup_{\varrho \rightarrow 0} |D\chi_{E_\varrho}|(B_{R_k}) \\ &= |D\chi_{H^-}|(B_{R_k}) = \mathcal{H}^{N-1}(H_0 \cap B_{R_k}) = \omega_{N-1} R_k^{N-1}, \end{aligned}$$

puis, par passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$,

$$\limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho)}{\varrho^{N-1}} \leq \omega_{N-1},$$

ce qui conclut la preuve du théorème. \square

Nous allons à présent montrer un résultat de structure pour les ensembles de périmètre fini. Celui-ci repose sur le résultat suivant que nous admettons (voir [2, Theorem 6.5-1]).

Théorème 4.3.6 (Extension de Whitney). *Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, $d : K \rightarrow \mathbb{R}^N$ des fonctions continues. On suppose que*

$$\rho(\delta) := \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x) - d(x) \cdot (y - x)|}{|y - x|} : x, y \in K, 0 < |x - y| < \delta \right\} \rightarrow 0$$

quand $\delta \rightarrow 0$. Alors il existe une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\tilde{f} = f, \quad \nabla \tilde{f} = d \quad \text{sur } K.$$

Théorème 4.3.7 (De Giorgi - 2). *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble de périmètre fini dans Ω . Alors*

(i) *la frontière réduite $\partial^* E$ est un ensemble dénombrablement \mathcal{H}^{N-1} -rectifiable;*

- (ii) $|D\chi_E| = \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$, $D\chi_E = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^* E$;
 (iii) $T_x(\partial^* E) = \nu_E(x)^\perp$ pour \mathcal{H}^{N-1} -presque tout $x \in \partial^* E$.

Démonstration. D'après le théorème 4.3.5, on a pour tout $x \in \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E \cap H^+(x))}{\varrho^N} = 0, \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E \cap H^-(x))}{\varrho^N} = 0. \quad (4.3.5)$$

D'après le théorème d'Egoroff, il existe des ensembles Boréliens deux à deux disjoints $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tels que

$$|D\chi_E| \left(\partial^* E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i \right) = 0$$

et les convergences (4.3.5) sont uniformes pour $x \in F_i$. D'après le théorème de Lusin, pour tout $i \in \mathbb{N}$, il existe des ensembles compacts deux à deux disjoints $\{G_i^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tels que

$$|D\chi_E| \left(F_i \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} G_i^j \right) = 0$$

et $\nu_E|_{G_i^j}$ est continue. On réindexe les ensembles $\{G_i^j\}_{i,j \in \mathbb{N}}$ en une famille de compacts $\{K_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ deux à deux disjoints tels que

$$\partial^* E = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j \cup Z, \quad |D\chi_E|(Z) = 0,$$

les convergences (4.3.5) sont uniformes dans K_j et $\nu_E|_{K_j}$ est continue. D'après le Lemme 4.3.4, on a $\mathcal{H}^{N-1}(Z) = 0$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$, on définit la quantité

$$\rho_j(\delta) := \sup \left\{ \frac{|\nu_E(x) \cdot (y-x)|}{|y-x|} : x, y \in K_j, 0 < |x-y| < \delta \right\}.$$

Montrons que $\rho_j(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$. Soit $\varepsilon \in (0, 1)$, il existe alors $\delta \in (0, 1)$ tel que pour $z \in K_j$ et tout $\varrho < 2\delta$,

$$\mathcal{L}^N(B_\varrho(z) \cap E \cap H^+(z)) < \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}} \omega_N \varrho^N, \quad \mathcal{L}^N(B_\varrho(z) \cap E \cap H^-(z)) > \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}} \right) \omega_N \varrho^N. \quad (4.3.6)$$

Soient $x, y \in K_j$ tels que $0 < |x-y| < \delta$.

Supposons que $\nu_E(x) \cdot (y-x) > \varepsilon|x-y|$. Alors, du fait que $\varepsilon < 1$, on a

$$B_{\varepsilon|x-y|}(y) \subset H^+(x) \cap B_{2|x-y|}(x). \quad (4.3.7)$$

En effet, si $z \in B_{\varepsilon|x-y|}(y)$, alors $|z-x| \leq |z-y| + |y-x| < (1+\varepsilon)|x-y| < 2|x-y|$ et donc $z \in B_{2|x-y|}(x)$. De plus

$$\nu_E(x) \cdot (z-x) = \nu_E(x) \cdot (y-x) + \nu_E(x) \cdot (z-y) > \varepsilon|x-y| - |z-y| > 0,$$

soit $z \in H^+(x)$. Par conséquent, en prenant $z = x$ et $\varrho = 2|x-y| < 2\delta$ dans (4.3.6), on a

$$\mathcal{L}^N(B_{2|x-y|}(x) \cap E \cap H^+(x)) < \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}} \omega_N (2|x-y|)^N = \frac{\varepsilon^N \omega_N}{4} |x-y|^N,$$

et en prenant $z = y$ et $\varrho = \varepsilon|x - y| < 2\delta$ dans (4.3.6), il vient

$$\mathcal{L}^N(E \cap B_{\varepsilon|x-y|}(y)) \geq \mathcal{L}^N(E \cap B_{\varepsilon|x-y|}(y) \cap H^-(y)) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^N}{2^{N+2}} \right) \omega_N (\varepsilon|x-y|)^N > \frac{\varepsilon^N \omega_N}{4} |x-y|^N.$$

On obtient alors une contradiction en appliquant la mesure $\mathcal{L}^N \llcorner E$ à l'inclusion (4.3.7). De manière analogue, on aboutit à une contradiction si $\nu_E(x) \cdot (y-x) < -\varepsilon|x-y|$. Par conséquent, le seul cas possible est $|\nu_E(x) \cdot (y-x)| \leq \varepsilon|x-y|$ et on obtient alors que $\rho_j(\delta) \leq \varepsilon$.

Montrons que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe une hypersurface M_j de classe \mathcal{C}^1 telle que $K_j \subset M_j$, ce qui démontrera la rectifiabilité de ∂^*E . Du fait que $\rho_j(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$, le théorème d'extension de Whitney montre alors l'existence d'une fonction $f_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$ telle que $f_j = 0$ et $\nabla f_j = \nu_E$ sur K_j . Soit alors

$$M_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : f_j(x) = 0, \quad |\nabla f_j(x)| \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, M_j est une hypersurface de classe \mathcal{C}^1 . De plus $K_j \subset M_j$ puisque $f_j = 0$ et $|\nabla f_j| = |\nu_E| = 1 \geq \frac{1}{2}$ sur K_j . On a donc établi la rectifiabilité de ∂^*E . De plus, comme $T_x M_j = (\nabla f_j(x))^\perp$ pour tout $x \in M_j$, il vient par localité de l'espace tangent approché que

$$T_x(\partial^*E) = T_x M_j = (\nabla f_j(x))^\perp = \nu_E(x)^\perp \quad \text{pour } \mathcal{H}^{N-1}\text{-presque tout } x \in \partial^*E \cap K_j,$$

ce qui montre que $T_x(\partial^*E) = \nu_E(x)^\perp$ pour \mathcal{H}^{N-1} -presque tout $x \in \partial^*E$.

Enfin, d'après le théorème 3.4.3 et le théorème 4.3.5, pour \mathcal{H}^{N-1} -presque tout $x \in \partial^*E$, on a

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^*E \cap B_\varrho(x))}{\omega_{N-1} \varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x))}{\omega_{N-1} \varrho^{N-1}} = 1$$

ce qui implique que

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^*E \cap B_\varrho(x))}{|D\chi_E|(B_\varrho(x))} = 1.$$

Comme $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^*E$ est absolument continue par rapport à $|D\chi_E|$, le théorème de différentiation de Besicovitch montre que $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^*E = |D\chi_E|$, puis $D\chi_E = -\nu_E |D\chi_E| = -\nu_E \mathcal{H}^{N-1} \llcorner \partial^*E$. \square

4.4 Frontière essentielle

Si $E \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble mesurable, on sait d'après le théorème de points de Lebesgue, que pour \mathcal{L}^N -presque tout $x \in E$,

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} = 1$$

et pour \mathcal{L}^N -presque tout $x \in \Omega \setminus E$,

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} = 0.$$

Définition 4.4.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et E un ensemble de périmètre fini dans Ω . La *frontière essentielle* de E , notée ∂_*E , est l'ensemble des points $x_0 \in \Omega$ tels que

$$\limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap E)}{\omega_N \varrho^N} > 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N} > 0.$$

- Lemme 4.4.2.** (i) $\partial_* E$ est un Borélien ;
(ii) $\partial^* E \subset \partial_* E$;
(iii) $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$.

Démonstration. (i) Pour tout $\varrho > 0$ les fonctions

$$x \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N}, \quad x \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N}$$

sont Boréliennes. Par continuité par rapport à ϱ , on en déduit que les fonctions

$$x \mapsto \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N}, \quad x \mapsto \limsup_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \setminus E)}{\omega_N \varrho^N}$$

sont également Boréliennes. Ceci montre que $\partial_* E$ est un ensemble Borélien.

Le point (ii) est une conséquence directe du Lemme 4.3.3.

(iii) D'après la Proposition 3.2.7, comme $\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E) = |D\chi_E|(\Omega) < \infty$, on a pour \mathcal{H}^{N-1} -presque tout $x \notin \partial^* E$

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{|D\chi_E|(B_\varrho(x))}{\varrho^{N-1}} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^{N-1}(\partial^* E \cap B_\varrho(x))}{\varrho^{N-1}} = 0.$$

Par conséquent, en notant

$$\alpha(\varrho) := \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E)}{\omega_N \varrho^N},$$

l'inégalité isopérimétrique relative implique que pour \mathcal{H}^{N-1} -presque tout $x \notin \partial^* E$,

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \min\{\alpha(\varrho), 1 - \alpha(\varrho)\} = 0.$$

La fonction α étant continue, il vient soit $\alpha(\varrho) \rightarrow 0$ soit $\alpha(\varrho) \rightarrow 1$. On a donc montré qu'il existe un ensemble \mathcal{H}^{N-1} -négligeable $Z \subset \Omega$ tel que $\Omega \setminus \partial^* E \subset (\Omega \setminus \partial_* E) \cup Z$, autrement dit $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$. \square

Pour finir ce chapitre, notons que les notions de frontières réduites et essentielles permettent de montrer une formule de Gauss-Green généralisée pour les ensembles de périmètre fini.

Théorème 4.4.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et E un ensemble de périmètre fini dans Ω . Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$, on a

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Démonstration. Par définition de la dérivée distributionnelle et d'après le théorème de De Giorgi, théorème 4.3.7, on a

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_\Omega \varphi \cdot dD\chi_E = \int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E \, d\mathcal{H}^{N-1},$$

le dernière égalité étant une conséquence du fait que $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$. \square

