Chapitre 5

Propriétés fines des fonctions à variation bornée

Dans ce chapitre, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ désigne un ouvert et $u \in BV(\Omega)$.

5.1 Différentiabilité approchée

D'après le théorème de différentiation de Besicovitch, on peut décomposer la mesure Du en

$$Du = D^a u + D^s u$$

où $D^a u$ est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$ et $D^s u$ est étrangère par rapport à $\mathcal{L}^N$. Le théorème de Radon-Nikodym donne l'existence d'une densité $\nabla u \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, appelée *gradient approché*, telle que

$$D^a u = \nabla u \mathcal{L}^N.$$

De plus, le théorème de différentiation de Besicovitch montre que

$$\nabla u(x) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{Du(B_\varrho(x))}{\omega_N \varrho^N} \qquad \text{pour } \mathcal{L}^N\text{-presque tout } x \in \Omega.$$

Le résultat suivant caractérise le gradient approché d'une fonction BV.

Théorème 5.1.1 (Calderon-Zygmund). *Pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} \frac{|u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)|}{\varrho} \, dy = 0.$$

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ tel que

(a) $\displaystyle\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} |u(y) - u(x)| \, dy = 0;$

(b) $\displaystyle\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} |\nabla u(y) - \nabla u(x)| \, dy = 0;$

(c) $\displaystyle\lim_{\varrho \to 0} \frac{|D^s u|(B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0.$

D'après le théorème des points de Lebesgue et comme les mesures $|D^s u|$ et $\mathcal{L}^N$ sont étrangères, il s'avère que $\mathcal{L}^N$-presque tous les points $x \in \Omega$ satisfont ces propriétés.

Supposons sans restreindre la généralité que $x = 0$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ assez petit de sorte que $B_{\varepsilon_0}(0) \subset \Omega$. Pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $y \in \Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \ \mathrm{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$, on considère la convolution $u_\varepsilon(y) := (u * \eta_\varepsilon)(y)$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on a

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(y) &= u_\varepsilon(0) + \int_0^1 \nabla u_\varepsilon(ty) \cdot y \, dt \\ &= u_\varepsilon(0) + \nabla u_\varepsilon(0) \cdot y + \int_0^1 [\nabla u_\varepsilon(ty) - \nabla u_\varepsilon(0)] \cdot y \, dt. \end{aligned}$$

Pour $\varrho < \varepsilon_0$, on multiplie cette égalité par $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(B_\varrho(0))$ avec $|\varphi| \leq 1$ et on obtient d'après le théorème de Fubini et la formule de changement de variables

$$\begin{aligned} &\int_{B_\varrho(0)} \varphi(y)[u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(0) - \nabla u_\varepsilon(0) \cdot y] \, dy \\ &\qquad = \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) [\nabla u_\varepsilon(y) - \nabla u_\varepsilon(0)] \cdot y \, dy \, ds. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Par suite, on a pour tout $s \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(s) &:= \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) \nabla u_\varepsilon(y) \cdot y \, dy = -\int_{B_{s\varrho}(0)} \mathrm{div}\left(\varphi\left(\frac{y}{s}\right) y\right) u_\varepsilon(y) \, dy \\ &\to -\int_{B_{s\varrho}(0)} \mathrm{div}\left(\varphi\left(\frac{y}{s}\right) y\right) u(y) \, dy = \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \, dDu(y) \\ &= \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \nabla u(y) \, dy + \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \, dD^s u(y). \end{aligned}$$

De plus, d'après les propriétés de la convolution de mesure, on a pour tout $s \in (0,1)$,

$$\begin{aligned} \frac{g_\varepsilon(s)}{s^{N+1}} &\leq \frac{\varrho}{s^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} |\nabla u_\varepsilon(y)| \, dy \\ &\leq \frac{\varrho}{s^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} \int_{B_\varepsilon(y)} \eta_\varepsilon(y - z) \, d|Du|(z) \, dy \\ &\leq \frac{\varrho}{s^N} \int_{B_{s\varrho+\varepsilon}(0)} \int_{B_{s\varrho}(0) \cap B_\varepsilon(z)} \eta_\varepsilon(y - z) \, dy \, d|Du|(z) \\ &\leq C \frac{\min\{(s\varrho)^N, \varepsilon^N\}}{\varepsilon^N s^N} |Du|(B_{s\varrho+\varepsilon}(0)) \\ &\leq C \frac{\min\{(s\varrho)^N, \varepsilon^N\}}{\varepsilon^N s^N} (s\varrho + \varepsilon)^N \leq C, \end{aligned}$$

où on a utilisé (b) et (c) dans l'avant dernière inégalité. Par convergence dominée, il vient alors que

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) \nabla u_\varepsilon(y) \cdot y \, dy \, ds \\ &\quad \to \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) \nabla u(y) \cdot y \, dy \, ds + \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot \, dD^s u(y) \, ds. \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Par ailleurs, comme 0 est un point de Lebesgue de u et ∇u, on en déduit que $u_\varepsilon(0) \to u(0)$ et $\nabla u_\varepsilon(0) \to \nabla u(0)$. Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$ dans (5.1.1) et en utilisant (5.1.2) ainsi que (a) et (b), on en déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\varrho(0)} \varphi(y)[u(y) - u(0) - \nabla u(0) \cdot y]\, dy \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) [\nabla u(y) - \nabla u(0)] \cdot y\, dy\, ds + \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\varrho}(0)} \varphi\left(\frac{y}{s}\right) y \cdot dD^s u(y)\, dt \\
&\qquad\qquad \leq C\varrho \int_0^1 \frac{1}{s^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} |\nabla u(y) - \nabla u(0)|\, dy\, ds + C\varrho \int_0^1 \frac{|D^s u|(B_{s\varrho}(x))}{s^N}\, ds.
\end{aligned}$$

En passant au supremum parmi toutes les fonctions φ, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varrho^{N+1}} \int_{B_\varrho(0)} |u(y) - u(0) - \nabla u(0) \cdot y|\, dy \\
&\qquad\qquad \leq C \int_0^1 \frac{1}{(s\varrho)^N} \int_{B_{s\varrho}(0)} |\nabla u(y) - \nabla u(0)|\, dy\, ds + C \int_0^1 \frac{|D^s u|(B_{s\varrho}(x))}{(s\varrho)^N}\, ds.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $\varrho \to 0$, on obtient bien la propriété souhaitée. □

La proposition suivante traduit une propriété de localité du gradient approché.

Proposition 5.1.2. *Soient u et $v \in BV(\Omega)$. Alors*

$$\nabla u = \nabla v \quad \mathcal{L}^N\text{-p.p. sur } \{u = v\}.$$

Démonstration. Soit $x_0 \in \{u = v\}$ un point de Lebesgue de u et v tel que $u(x_0) = v(x_0)$,

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x_0)} \frac{|u(y) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (y - x_0)|}{\varrho}\, dy = 0,$$

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{1}{\varrho^N} \int_{B_\varrho(x_0)} \frac{|v(y) - v(x_0) - \nabla v(x_0) \cdot (y - x_0)|}{\varrho}\, dy = 0$$

et

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u = v\} \cap B_\varrho(x_0))}{\omega_N \varrho^N} = 1.$$

Notons que $\mathcal{L}^N$-presque tous les points $x_0 \in \{u = v\}$ satisfont ces propriétés.

Pour $z \in B_1$, posons

$$u_\varrho(z) := \frac{u(x_0 + \varrho z) - u(x_0)}{\varrho}, \quad v_\varrho(z) := \frac{v(x_0 + \varrho z) - v(x_0)}{\varrho}$$

de sorte que $u_\varrho(z) \to \nabla u(x_0) \cdot z$ et $v_\varrho(z) \to \nabla v(x_0) \cdot z$ dans $L^1(B_1; \mathbb{R}^N)$. En particulier, $u_\varrho(z) - v_\varrho(z) \to \nabla u(x_0) \cdot z - \nabla v(x_0) \cdot z$ en mesure dans B_1 et donc, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^N(\{|\nabla u(x_0) \cdot z - \nabla v(x_0) \cdot z| \geq \varepsilon\} \cap B_1) &\leq \limsup_{\varrho \to 0} \mathcal{L}^N(\{|u_\varrho - v_\varrho| \geq \varepsilon/4\} \cap B_1) \\
&\leq \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u \neq v\} \cap B_\varrho(x_0))}{\varrho^N} = 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\nabla u(x_0) \cdot z = \nabla v(x_0) \cdot z$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $z \in B_1$, soit $\nabla u(x_0) = \nabla v(x_0)$. □

5.2 Continuité approchée

On souhaite désormais aller plus loin dans la compréhension de la structure du gradient d'une fonction BV.

Définition 5.2.1. On définit les *limites approximatives supérieures* $u^+(x)$ *et inférieures* $u^-(x)$ *en* $x \in \Omega$ par

$$\begin{aligned} u^+(x) &:= \inf\left\{t \in \mathbb{R} : \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0\right\}, \\ u^-(x) &:= \sup\left\{t \in \mathbb{R} : \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u < t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0\right\}. \end{aligned}$$

Remarquons que si $t > u^+(x)$, alors

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0,$$

et si $t < u^-(x)$, on a

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u < t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0.$$

Lemme 5.2.2. *Les fonctions* $u^\pm$ *sont Boréliennes sur* Ω.

Démonstration. En constatant que $u^- = -(-u)^+$, il suffit de montrer que u^+ est Borélienne. On remarque d'abord que $u^+(x) < s$ si et seulement s'il existe un $t \in \mathbb{Q}$ avec $t < s$ tel que

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0.$$

Par conséquent

$$\{u^+ < s\} = \bigcup_{t\in\mathbb{Q},\, t<s} \left\{x \in \Omega : \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0\right\}.$$

Comme l'application $x \mapsto \mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))$ est Borélienne et $\varrho \mapsto \mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))$ est continue, on en déduit que

$$x \mapsto \lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = \lim_{\varrho\to 0,\varrho\in\mathbb{Q}^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N}$$

est Borélienne, ce qui montre que $\{u^+ < s\}$ est un Borélien de Ω, et donc que u^+ est une fonction Borélienne sur Ω. □

On a toujours l'inégalité $u^-(x) \leq u^+(x)$. Si $u^-(x) = u^+(x)$, on notera $\tilde{u}(x)$ la valeur commune et on dira que x est un *point de continuité approché* pour u. Dans ce cas, $\tilde{u}(x)$ satisfait pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap \{|u - \tilde{u}(x)| > \varepsilon\})}{\varrho^N} = 0.$$

En particulier, si x est un point de Lebesgue de u, alors x est un point de continuité approché car

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap \{|u - \tilde{u}(x)| > \varepsilon\})}{\varrho^N} \leq \frac{1}{\varepsilon\varrho^N} \int_{B_\varrho(x)} |u(y) - \tilde{u}(x)|\, dy \to 0.$$

On déduit du théorème des points de Lebesgue que $u(x) = \tilde{u}(x)$ pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \Omega$. Autrement dit, en notant

$$S_u := \{x \in \Omega : \; u^-(x) < u^+(x)\}$$

l'*ensemble singulier* de u, on a $\mathcal{L}^N(S_u) = 0$.

Théorème 5.2.3. *L'ensemble S_u est Borélien, dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable et σ-fini pour la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$. De plus, il existe une fonction Borélienne $\nu_u : S_u \to \mathbb{S}^{N-1}$ telle que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\nu_u = \nu_{\{u>t\}} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-presque partout sur } S_u \cap \partial^*\{u > t\}.$$

Démonstration. Les fonctions $u^\pm$ étant Boréliennes, on obtient immédiatement que S_u est Borélien.

D'après la formule de la co-aire, les ensembles $\{u > t\}$ sont de périmètre fini pour $\mathcal{L}^1$-presque pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, les ensembles $\{u = t\}$ étant deux à deux disjoints, on a également que $\mathcal{L}^N(\{u = t\}) = 0$ pour $\mathcal{L}^1$-presque pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, il existe un ensemble D dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\{u > t\}$ est de périmètre fini et $\mathcal{L}^N(\{u = t\}) = 0$ pour tout $t \in D$.

Si $x \in J_u$, il existe alors $t \in D$ tel que $u^-(x) < t < u^+(x)$. Par définition des limites approximatives supérieures et inférieures, on a

$$\limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} > 0, \quad \limsup_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u \leq t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} > 0,$$

d'où $x \in \partial_*\{u > t\}$. On en déduit alors que

$$S_u \subset \bigcup_{t \in D} \partial_*\{u > t\},$$

ce qui montre que S_u est dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$-rectifiable. Par ailleurs, comme pour tout $t \in D$,

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial_*\{u > t\}) = \mathcal{H}^{N-1}(\partial^*\{u > t\}) = |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega) < \infty,$$

on en déduit que S_u est σ-fini pour la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$. De plus, comme pour $t \in D$, on a $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_*\{u > t\} \setminus \partial^*\{u > t\}) = 0$, l'ensemble $Z := \bigcup_{t \in D}(\partial_*\{u > t\} \setminus \partial^*\{u >\}) \subset \Omega$ est un Borélien $\mathcal{H}^{N-1}$-négligeable tel que

$$S_u \subset \bigcup_{t \in D} \partial^*\{u > t\} \cup Z.$$

Montrons que si s, $t \in D$ avec $s < t$, on a

$$\nu_{\{u>s\}}(x) = \nu_{\{u>t\}}(x) \quad \text{pour tout } x \in \partial^*\{u > s\} \cap \partial^*\{u > t\}.$$

Soit donc $x_0 \in \partial^*\{u > s\} \cap \partial^*\{u > t\}$. D'après le théorème de De Giorgi (théorèmes 4.3.5 et 4.3.7) les normales approchées $\nu_{\{u>s\}}(x_0)$ et $\nu_{\{u>t\}}(x_0)$ sont bien définies. De plus, en posant

$$H_s^\pm := \{x \in \mathbb{R}^N : \pm\nu_{\{u>s\}}(x_0) \cdot (x - x_0) > 0\}, \quad H_t^\pm := \{x \in \mathbb{R}^N : \pm\nu_{\{u>t\}}(x_0) \cdot (x - x_0) > 0\}.$$

le théorème 4.3.5 montre que

$$\chi_{\frac{\{u>t\}-x_0}{\varrho}} \to \chi_{H_t^-} \text{ et } \chi_{\frac{\{u>s\}-x_0}{\varrho}} \to \chi_{H_s^-} \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N),$$

Comme $\{u > t\} \subset \{u > s\}$, on en déduit que

$$\mathcal{L}^N(B_1 \cap H_t^- \cap H_s^+) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap \{u > t\} \cap H_s^+)}{\varrho^N} \leq \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \cap \{u > s\} \cap H_s^+)}{\varrho^N} = 0$$

et

$$\mathcal{L}^N(B_1 \setminus H_s^- \cap H_t^-) = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus \{u > s\} \cap H_t^-)}{\varrho^N} \leq \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x_0) \setminus \{u > t\} \cap H_t^-)}{\varrho^N} = 0.$$

Il vient alors que $H_t^\pm = H_s^\pm$ et donc que $\nu_{\{u>s\}}(x_0) = \nu_{\{u>t\}}(x_0)$. On a donc montré que pour tout $x \in S_u \setminus Z$, il existe un vecteur unitaire $\nu_u(x) \in \mathbb{S}^{N-1}$ tel que $\nu_u(x) = \nu_{\{u>t\}}(x)$ si $t \in D$ et $x \in S_u \cap \partial^*\{u > t\}$.

Si $t \notin D$ et $\{u > t\}$ est de périmètre fini dans Ω, on peut trouver t_1 et $t_2 \in D$ tels que $t_1 < t < t_2$. En raisonnant comme précédemment, on montre que pour tout $x \in \partial^*\{u > t_1\} \cap \partial^*\{u > t\} \cap \partial^*\{u > t_2\}$, on a

$$\nu_{\{u>t\}}(x) = \nu_{\{u>t_1\}}(x) = \nu_{\{u>t_2\}}(x) = \nu_u(x).$$

On obtient ainsi une application Borélienne $\nu_u : S_u \to \mathbb{S}^{N-1}$ telle que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $t \in \mathbb{R}$, $\nu_u = \nu_{\{u>t\}}$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. sur $S_u \cap \partial^*\{u > t\}$. □

Montrons à présent que les fonctions Boréliennes $u^\pm$ sont essentiellement finies.

Proposition 5.2.4. *Pour $\mathcal{H}^{N-1}$-presque tout $x \in \Omega$, on a*

$$-\infty < u^-(x) \leq u^+(x) < +\infty.$$

Démonstration. **Etape 1.** Montrons que $\mathcal{H}^{N-1}(\{u^- = +\infty\}) = \mathcal{H}^{N-1}(\{u^+ = -\infty\}) = 0$. Comme $u^+ = -(-u)^-$, il suffit de vérifier que $\mathcal{H}^{N-1}(\{u^- = +\infty\}) = 0$.

Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné tel que $\overline{U} \subset \Omega$ et V un ouvert tel que $\overline{U} \subset V \subset \overline{V} \subset \Omega$. Soit $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ une fonction telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N$, $\varphi = 1$ sur U et $\varphi = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \overline{V}$. On pose $v := \varphi u \in BV(\mathbb{R}^N)$ qui est donc à support compact K, avec $v^\pm = u^\pm$ sur U.

Soient $E_t = \{x \in \mathbb{R}^N : v(x) > t\}$ et $F_t := \{x \in \mathbb{R}^N : v^-(x) > t\}$. Comme $\mathcal{L}^N(S_v) = 0$, on en déduit que $v = v^-$ $\mathcal{L}^N$-p.p. dans $\mathbb{R}^N$ si bien que E_t et F_t diffèrent d'un ensemble $\mathcal{L}^N$-négligeable. Par conséquent, on a $P(F_t, \mathbb{R}^N) = P(E_t, \mathbb{R}^N)$ et par la formule de la co-aire,

$$\int_{\mathbb{R}} P(F_t, \mathbb{R}^N)\, dt = |Dv|(\mathbb{R}^N) < \infty,$$

ce qui montre que

$$\liminf_{t \to +\infty} P(F_t, \mathbb{R}^N) = 0.$$

Comme v est à support compact K, il existe $d > 0$ tel que pour tout $\varrho > d$, tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $t > 0$,

$$\frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap F_t)}{\omega_N \varrho^N} \leq \frac{\mathcal{L}^N(K)}{\omega_N \varrho^N} \leq \frac{1}{8}.$$

Par ailleurs, si $v^-(x) > t$, il vient par définition de $v^-(x)$ que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap F_t)}{\omega_N \varrho^N} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap E_t)}{\omega_N \varrho^N} = 1.$$

Par continuité de la fonction $\varrho \mapsto \frac{\mathcal{L}^N(B_\varrho(x) \cap F_t)}{\omega_N \varrho^N}$, il existe $\varrho(x) \in (0, d)$ tel que

$$\mathcal{L}^N(B_{\varrho(x)}(x) \cap F_t) = \frac{1}{4} \omega_N \varrho(x)^N$$

et l'inégalité isopérimétrique relative montre alors que

$$C_N |D\chi_{F_t}|(B_{\varrho(x)}(x)) \geq \left(\frac{\omega_N}{4}\right)^{\frac{N-1}{N}} \varrho(x)^{N-1}.$$

La famille $\mathcal{F} = \{\overline{B}_{\varrho(x)}(x)\}_{x\in F_t}$ forme un recouvrement de F_t et le théorème de recouvrement de Besicovitch montre l'existence de ξ sous-familles $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_\xi$ dénombrables et disjointes telles que

$$F_t \subset \bigcup_{i=1}^{\xi} \bigcup_{B\in\mathcal{F}_i} B.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{N-1}_{2d}(F_t) &\leq \sum_{i=1}^{\xi}\sum_{B\in\mathcal{F}_i} \omega_{N-1}\left(\frac{\operatorname{diam}(B)}{2}\right)^{N-1}\\ &\leq c\sum_{i=1}^{\xi}\sum_{B\in\mathcal{F}_i} |D\chi_{F_t}|(B) \leq c|D\chi_{F_t}|(\mathbb{R}^N) = c\,P(F_t,\mathbb{R}^N) \to 0\end{aligned}$$

quand $t \to +\infty$, d'où $\mathcal{H}^{N-1}_{2d}(\{v^- = +\infty\}) = 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc un recouvrement $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{v^- = +\infty\}$ tel que $\operatorname{diam}(A_i) \leq 2d$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\omega_{N-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(A_i)}{2}\right)^{N-1} \leq \varepsilon.$$

L'inégalité précédente implique que $\operatorname{diam}(A_i) \leq 2(\frac{\varepsilon}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N-1}} = \delta(\varepsilon)$ de sorte que $\mathcal{H}^{N-1}_{\delta(\varepsilon)}(\{v^- = +\infty\}) \leq \varepsilon$ et donc $\mathcal{H}^{N-1}(\{v^- = +\infty\}) = 0$ par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$. Comme $v^- = u^-$ dans U, on en déduit que $\mathcal{H}^{N-1}(U \cap \{u^- = +\infty\}) = 0$. En considérant une suite croissante d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\overline{U}_n \subset U_{n+1}$ et $\bigcup_n U_n = \Omega$, on en déduit par passage à la limite quand $n \to \infty$ que $\mathcal{H}^{N-1}(\{u^- = +\infty\}) = 0$.

Etape 2. Montrons que $u^+ - u^- < \infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω.

Comme S_u est σ-fini pour la mesure $\mathcal{H}^{N-1}$ on peut appliquer le théorème de Fubini à la mesure produit $\mathcal{H}^{N-1} \otimes \mathcal{L}^1$ sur $S_u \times \mathbb{R}$ qui implique que

$$\begin{aligned}&(\mathcal{H}^{N-1} \otimes \mathcal{L}^1)(\{(x,t) \in S_u \times \mathbb{R} :\ u^-(x) < t < u^+(x)\}\\ &\qquad = \int_{S_u}(u^+ - u^-)\,d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\{x \in S_u :\ u^-(x) < t < u^+(x)\})\,dt.\end{aligned}$$

Or si $u^-(x) < t < u^+(x)$, alors $x \in \partial_*\{u > t\}$ et donc, d'après la formule de la co-aire,

$$\int_{S_u}(u^+ - u^-)\,d\mathcal{H}^{N-1} \leq \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\partial_*\{u > t\})\,dt = \int_{\mathbb{R}} |D\chi_{\{u>t\}}|(\Omega)\,dt = |Du|(\Omega) < \infty,$$

ce qui montre effectivement que $u^+ - u^- < \infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω.

Etape 3. On a $u^+ = (u^+ - u^-) + u^- < +\infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω et $u^- = -(u^+ - u^-) + u^+ > -\infty$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. dans Ω. □

On décompose à présent la partie singulière $D^s u$ en

$$D^s u = D^j u + D^c u,$$

où $D^j u := D^s u \llcorner S_u$ est la partie saut de Du et $D^c u := D^s u \llcorner (\Omega \setminus S_u)$ est la partie Cantor de Du. Remarquons que, du fait que $\mathcal{L}^N(S_u) = 0$, alors $D^j u = Du \llcorner S_u$.

Théorème 5.2.5. *La partie saut $D^j u$ de Du est absolument continue par rapport à $\mathcal{H}^{N-1}$ et on a la représentation*

$$D^j u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u.$$

De plus la partie Cantor $D^c u$ est étrangère par rapport à $\mathcal{H}^{N-1}$, i.e.

$$\mathcal{H}^{N-1}(A) < \infty \quad \Longrightarrow \quad |D^c u|(A) = 0$$

pour tout Borélien $A \subset \Omega$.

Démonstration. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on notera pour simplifier $E_t := \{u > t\} = \{x \in \Omega : \ u(x) > t\}$. On remarque d'abord que si $x \in S_u$, alors

$$(u^-(x), u^+(x)) \subset \{t \in \mathbb{R} : \ x \in \partial_* E_t\} \subset [u^-(x), u^+(x)]$$

de sorte que $\mathcal{L}^1(\{t \in \mathbb{R} : \ x \in \partial_* E_t\}) = u^+(x) - u^-(x)$. D'après la formule de la co-aire dans BV et le théorème de Fubini, il vient pour tout Borélien $A \subset \Omega$,

$$\begin{aligned}
D^j u(A) &= Du(A \cap S_u) = \int_{\mathbb{R}} D\chi_{E_t}(A \cap S_u)\, dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial_* E_t \cap A \cap S_u} \nu_{E_t}\, d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\partial_* E_t \cap A \cap S_u} \nu_u\, d\mathcal{H}^{N-1} \right) dt \\
&= \int_{A \cap S_u} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{t \in \mathbb{R} :\, x \in \partial_* E_t\}}\, dt \right) \nu_u\, d\mathcal{H}^{N-1} \\
&= \int_{A \cap S_u} (u^+ - u^-)\nu_u\, d\mathcal{H}^{N-1},
\end{aligned}$$

ce qui montre effectivement que $D^j u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u$.

Si $A \subset \Omega$ est un Borélien tel que $\mathcal{H}^{N-1}(A) < \infty$, on a en particulier que $\mathcal{L}^N(A) = 0$ et donc

$$|D^c u|(A) = |Du|(A \setminus S_u) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E_t \cap A \setminus S_u)\, dt.$$

Or, si $x \in \partial_* E_t \cap A \setminus S_u$, alors $\tilde{u}(x) = t$. En effet, si $t > \tilde{u}(x) = u^+(x)$, on aurait alors que

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\mathcal{L}^N(\{u > t\} \cap B_\varrho(x))}{\varrho^N} = 0,$$

ce qui contredirait le fait que $x \in \partial_* E_t$. Par conséquent, $t \leq \tilde{u}(x)$ et on montre de même que $t = \tilde{u}(x)$. Par conséquent,

$$\partial_* E_t \cap A \setminus S_u \subset \{\tilde{u} = t\}$$

et comme les ensembles $\{\tilde{u} = t\}$ sont deux à deux disjoints et la mesure $\mathcal{H}^{N-1} \llcorner A$ est finie, on en déduit que

$$\mathcal{H}^{N-1}(A \cap \{\tilde{u} = t\}) > 0$$

pour au plus une quantité dénombrable de $t \in \mathbb{R}$. En particulier $\mathcal{H}^{N-1}(\partial_* E_t \cap A \setminus S_u) \leq \mathcal{H}^{N-1}(A \cap \{\tilde{u} = t\}) = 0$ pour $\mathcal{L}^1$-presque pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui montre bien que $|D^c u|(A) = 0$. $\square$

La dénomination de partie Cantor provient de l'exemple de la fonction de Cantor-Vitali $u : [0,1] \to \mathbb{R}$. Il s'agit d'une fonction continue et croissante sur $[0,1]$ qui satisfait $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ et $u' = 0$ $\mathcal{L}^1$-p.p. sur $(0,1)$. D'après l'exemple 2.1.4, il s'agit d'une fonction à variation bornée dans l'intervalle $(0,1)$ telle que $|Du|((0,1)) \leq 1$, dont nous allons montrer que la la dérivéee distributionnelle est purement de type Cantor. En effet, cette fonction étant continue, on a que $S_u = \emptyset$ de sorte que la partie saut $D^j u = 0$. Montrons par ailleurs que la partie absolument continue $D^a u = 0$. Pour ce faire, on considère la fonction auxiliaire $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$v(x) = Du((0,x)) \quad \text{pour tout } x \in [0,1].$$

Comme u est croissante et bornée, la mesure Du est positive et finie, ce qui montre que v est une fonction croissante et bornée. Par ailleurs, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c((0,1))$, le théorème de Fubini montre que

$$\int_0^1 v(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^1 \left(\int_0^x dDu(y)\right) dx = \int_0^1 \left(\int_y^1 \varphi'(x)\,dx\right) dDu(y) = -\int_0^1 \varphi(y)\,dDu(y).$$

On en déduit que $Dv = Du$ et comme $u(0) = 0 = v(0)$, il vient que $u = v$. Par conséquent, comme $u'(x) = 0$ pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $x \in (0,1)$, on en déduit que pour $\mathcal{L}^1$-presque tout $x \in (0,1)$,

$$0 = \lim_{h\dagger\to 0^+} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{Du([x,x+h))}{h} = \nabla u(x)$$

ce qui montre que $D^a u = 0$. On en déduit que $Du = D^c u$. Par ailleurs, si $Du = 0$ on aurait que u est constant sur $[0,1]$ ce qui n'est pas possible puisque $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$. On peut en fait montrer que $D^c u$ est une mesure portée par la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^s \llcorner C$ où $C \subset [0,1]$ est l'ensemble triadique de Cantor et $s = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ est sa dimension de Hausdorff.

Théorème 5.2.6 (Chain rule). *Soit $u \in BV(\Omega)$ et $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ une fonction Lipschitzienne telle que $\psi(0) = 0$ si $\mathcal{L}^N(\Omega) = \infty$. Alors $v = \psi \circ u \in BV(\Omega)$ et*

$$D^j v = (\psi(u^+) - \psi(u^-))\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u, \quad \nabla v = \psi'(u)\nabla u, \quad D^c v = \psi'(\tilde{u}) D^c u.$$

Démonstration. D'après le théorème d'approximation d'Anzellotti-Giaquinta, il existe une suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)$ telle que $u_k \to u$ dans $L^1(\Omega)$ et $|Du_k|(\Omega) \to |Du|(\Omega)$. En particulier, $v_k := \psi \circ u_k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et $\nabla v_k = \psi'(u_k)\nabla u_k$. Comme $\psi(0) = 0$ si $\mathcal{L}^N(\Omega) = \infty$, on obtient que v_k et $v \in L^1(\Omega)$. En notant $L > 0$ la constante de Lipschitz de ψ, on obtient que $|\nabla v_k| \leq L|\nabla u_k|$. Comme

$$\int_\Omega |v_k - v|\,dx = \int_\Omega |\psi(u_k) - \psi(u)|\,dx \leq L \int_\Omega |u_k - u|\,dx \to 0,$$

on en déduit que $v_k \to v$ dans $L^1(\Omega)$. Par semicontinuité inférieure de la variation totale, on obtient que

$$TV(v,\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} TV(v_k,\Omega) = \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_k| \leq L \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|\,dx = L|Du|(\Omega),$$

ce qui montre, du fait que $TV(v,\Omega) < \infty$, que $v \in BV(\Omega)$.

Comme toute fonction $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la différence de deux fonctions Lipschitz ψ_1, $\psi_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec $\psi_i' \geq 1$ pour $i = 1, 2$ [1], on ne restreint pas la généralité en supposant dès le départ que $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ satisfait $\psi' \geq 1$. Comme ψ est continue et strictement croissante, on a que

$$v^+ = \psi(u^+), \quad v^- = \psi(u^-), \quad S_v = S_u, \quad \nu_u = \nu_v.$$

1. Il suffit de poser $\psi_2(t) := (1 + \|\psi'\|_\infty)t$ et $\psi_1 := \psi + \psi_2$

Par conséquent,

$$D^j v = Dv \llcorner S_v = (v^+ - v^-)\nu_v \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_v = (\psi(u^+) - \psi(u^-))\nu_u \llcorner \mathcal{H}^{N-1} \llcorner S_u,$$

ce qui démontre la représentation de la partie saut.

Soit $A \subset \Omega$ un Borélien, d'après la formule de la co-aire dans BV, on a

$$\begin{aligned} Dv(A \setminus S_v) &= Dv(A \setminus S_u) = \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{v>t\}}(A \setminus S_u)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{u>\psi^{-1}(t)\}}(A \setminus S_u)\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} D\chi_{\{u>s\}}(A \setminus S_u)\psi'(s)\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial_*\{u>s\}\cap A \setminus S_u} \psi'(s)\nu_{\{u>s\}}(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, ds. \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que si $x \in \partial_*\{u > s\} \setminus S_u$, alors $\tilde{u}(x) = s$, par conséquent

$$\begin{aligned} Dv(A \setminus S_v) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\partial_*\{u>s\}\cap A \setminus S_u} \psi'(\tilde{u}(x))\nu_{\{u>s\}}(x)\, d\mathcal{H}^{N-1}(x)\, ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{A \setminus S_u} \psi'(\tilde{u}(x))\, dD\chi_{E_s}(x)\, ds \\ &= \int_{A \setminus S_u} \psi'(\tilde{u})\, dDu, \end{aligned}$$

où nous avons de nouveau appliqué la formule de la co-aire dans la dernière égalité. Par conséquent, comme $Dv \llcorner (\Omega \setminus S_v) = D^a v + D^c v$ et $Du \llcorner (\Omega \setminus S_u) = D^a u + D^c u$, il vient

$$D^a v + D^c v = \psi'(\tilde{u}) D^a u + \psi'(\tilde{u}) D^c u.$$

Enfin, comme les mesures $D^a v - \psi'(\tilde{u}) D^a u$ et $D^c v - \psi'(\tilde{u}) D^c u$ sont étrangères (la première étant absolument continue par rapport à $\mathcal{L}^N$ et la deuxième étant singulière par rapport à $\mathcal{L}^N$), on en déduit que $D^a v = \psi'(\tilde{u}) D^a u$ et $D^c v = \psi'(\tilde{u}) D^c u$. $\square$