Introduction

L'objet de ce cours est d'introduire des outils basiques de théorie géométrique de la mesure pour étudier des problèmes singuliers du calcul des variations. Dans l'esprit des distributions, qui généralisent la notion de fonction, nous allons introduire un formalisme permettant de généraliser la notion d'ensembles "réguliers". Si ce nouveau formalisme est assez lourd à introduire et requiert une incursion assez profonde dans la théorie de la mesure, elle permet de gagner en souplesse dans la manipulation des nouveaux objets considérés.

Le fil conducteur est la théorie des fonctions à variation bornée, i.e. les fonctions intégrables dont le gradient distributionnel est une mesure bornée. Après avoir montré les propriétés basiques de cet espace (densité des fonctions régulières, injections continues, injections compactes), nous nous intéresserons à leurs propriétés fines permettant d'aboutir à un théorème de structure du gradient d'une fonction BV. Celui-ci se décompose en la somme de trois mesures étrangères : une première (absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue) qui correspond à la partie "régulière" la mesure ; une deuxième qui correspond à la partie saut pour laquelle il convient de définir un ensemble de saut, des traces de part et d'autre de cet ensemble ainsi qu'une normale à cet ensemble ; une troisième dite "partie Cantorienne" correspond aux singularités diffuses de co-dimension (de Hausdorff) strictement comprise entre 0 et 1.

C'est principalement l'étude de la partie saut qui demandera un grand travail préliminaire. Intuitivement, l'ensemble des sauts correspond à un ensemble $(N-1)$-dimensionnel. Malheureusement, en pratique, on a accès à très peu de régularité sur cet ensemble. En particulier, un tel ensemble n'est pas en général une hypersurface de classe $\mathcal{C}^1$. Les outils classiques de géométrie différentielle ne s'avèrent donc pas assez robustes et il convient d'introduire une classe plus générale d'ensembles qui sont les ensembles rectifiables. Cela requiert l'introduction au prélable de la notion de mesure de Hausdorff qui permettra de montrer que, au sens de la mesure, de tels ensembles possèdent en fait des propriétés analogues aux sous-variétés de dimension $N-1$. On pourra en particulier définir une notion de normale généralisée ainsi que des traces de part et d'autre de tels ensembles.

Une sous classe importante des fonctions à variation bornée concerne les fonctions caractéristiques d'ensembles de périmètre fini, généralisant la notion d'ensemble régulier. C'est l'étude fine de tels ensembles, couplé à la formule de la Coaire dans BV qui permettra détudier en détail les propriétés fines des fonctions BV.

Du point de vue du calcul des variations, ces outils permettent d'étudier trois grandes classes de problèmes qui seront considérés dans ce cours :

– les problèmes de type surface minimale, que introduirons ici dans le cadre des ensembles de périmètre fini. C'est un cas particulier du problème plus général dit de Plateau.

– les problèmes de la mécanique du solide, comme l'étude de modèles de type plasticité parfaite, faisant intervenir une énergie à croissance linéaire par rapport au gradient de déplacement.

– les problèmes en imagerie comme le modèle de Rudin-Osher-Fatemi pour le débruitage ou encore le modèle de Mumford-Shah pour la segmentation, prototype des problèmes aux discontinuités libres.