

Régularité elliptique :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1_{loc}(\Omega) \\ \Delta u \in L^2_{loc}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in H^2_{loc}(\Omega)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^1_{loc}(\Omega) \\ \Delta u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \\ 0 < \alpha < 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in C(\Omega) \\ \Delta u \in C(\Omega) \end{array} \right\} \not\Rightarrow u \in C^2(\Omega)$$

② Estimations de Calderon-Zygmund

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^1_{loc}(\Omega) \\ \Delta u \in L^p_{loc}(\Omega) \\ (1 < p < \infty) \end{array} \right\} \Rightarrow u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$$

Théorème : $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné, $1 < p < \infty$
 $f \in L^p_{loc}(\Omega)$.

Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est telle que $-\Delta u = f$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$,
 alors $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$. De plus, pour tout ouverts

$$U \subset\subset V \subset\subset \Omega,$$

$\exists C = C(n, p, U, V, \Omega) > 0$ tq

$$\|D^2 u\|_{L^p(U)} \leq C [\|u\|_{L^p(V)} + \|f\|_{L^p(V)}]$$

Soient u, v des fonctions tq $u \in C \subset V \subset \Omega$.

$$\tilde{f} := f \chi_V \in L^p(\mathbb{R}^N)$$

$$u = v + w \quad ? \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)?$$

avec $w = G * \tilde{f}$ et $v = u - G * \tilde{f}$

Commencer par w :

Lemme. $w \in W^{1,p}(\Omega)$

Dém. $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$$\text{Supp}(\tilde{f}) \subset \Omega$$

$$\Rightarrow w \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

$$\begin{aligned} |w(x)| &= \left| \int_{\Omega} G(x-y) \tilde{f}(y) dy \right| = \left| \int_V G(x-y) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_V |G(x-y)| |f(y)| dy \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right) \end{aligned}$$

$$\leq \underbrace{\left(\int_V |G(x-y)|^q dy \right)^{1/q}}_{\text{Hölder}} \left(\int_V |G(x-y)| |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$z = x - y$

$$\begin{aligned} |w(x)|^p &\leq \left(\int_{x-V} |G(z)|^q dz \right)^{p/q} \int_V |G(x-y)| |f(y)|^p dy \\ &\leq \|G\|_{L^1(\Omega-V)}^{p/q} \int_V |G(x-y)| |f(y)|^p dy \end{aligned}$$

$\forall x \in \Omega$

$$\int_{\Omega} |w(x)|^p dx \leq \|G\|_{L^1(\Omega-V)}^p \int_V |f(y)| \left(\int_{\Omega} |G(x-y)| dx \right) dy$$

Fubini

$$\leq \|G\|_{L^1(\Omega-V)}^{\frac{p}{p}+1=p} \|f\|_{L^p(V)}^p$$

$$\leq \|G\|_{L^1(\Omega-V)}^{\frac{p}{p}+1=p(1-\frac{1}{p})+1=p} \|f\|_{L^p(V)}^p$$

$$\boxed{\|w\|_{L^p(\Omega)} \leq \|G\|_{L^1(\Omega-V)} \|f\|_{L^p(V)}}$$

Rq: Ω borné, $V \subset \Omega \Rightarrow$ ~~borné~~

$$\Rightarrow \|G\|_{L^1(\Omega-V)} < \infty$$

car $G \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\Omega-V = \{x-y, x \in \Omega, y \in V\}$$

$$G \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \partial_j w = \underbrace{(\partial_j G)}_{\in L^1_{loc}} * \tilde{f}$$

Then we calculate,

$$\|\partial_j w\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\partial_j G\|_{L^1(\Omega-V)} \|f\|_{L^p(V)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|w\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(V)}} \quad \square$$

On ne peut pas aller plus loin car $\partial_j G \notin L^1_{loc}$

$$v = u - G * \tilde{f}$$

$$-\Delta u = f \text{ ds } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow -\Delta(G * \tilde{f}) = -\Delta w = f \text{ ds } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{Or } \tilde{f} = f \text{ sur } V$$

$$\Rightarrow -\Delta v = -\Delta u + \Delta(G * \tilde{f}) = f - f = 0 \text{ ds } \mathcal{D}'(V)$$

Donc v est harmonique sur V

$$\Rightarrow v \in \mathcal{C}^\infty(V) \quad \forall V \subset \subset \Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{v \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)}$$

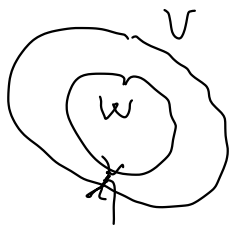
Lemme: $\exists C = C(n, p, \nu, V, \Omega) > 0$ tq

$$\|D^2 v\|_{L^p(V)} \leq C [\|u\|_{L^p(V)} + \|f\|_{L^p(V)}]$$

Preuve: Soit w un rectangle tq
 $U \subset \subset w \subset \subset V \subset \subset \Omega$.

$$x \in w, \quad r = \frac{\text{dist}(w, \partial V)}{2}$$

$$\overline{B_r(x)} \subset V.$$



Comme $\partial_j v$ est harmonique V . Donc par le principe de la valeur moyenne.

$$\partial_j v(x) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} \partial_j v(y) dy$$

$$\stackrel{\text{Green}}{=} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{\partial B_r(x)} v(y) \nu_j(y) d\sigma(y)$$

$$|\partial_j v(x)|^p \leq \frac{1}{(\omega_N r^N)^p} \int_{\partial B_r(x)} |v(y)|^p d\sigma(y) (N \omega_N r^{N-1})^{p-1}$$

$$\stackrel{c_v}{=} \frac{(N \omega_N r^{N-1})^{p-1}}{(\omega_N r^N)^p} \int_{\partial B_r} |v(x+rz)|^p d\sigma(z) r^{N-1}$$

$y = x + rz$
 $d\sigma(y) = r^{N-1} d\sigma(z)$

$$= C \int_{\partial B_r} |v(x+rz)|^p d\sigma(z) \quad \forall x \in W$$

$$C = C(N, p, W, V) > 0$$

$$\int_W |\partial_j v(x)|^p dx$$

$$\leq C \int_W \left(\int_{\partial B_r} |v(x+rz)|^p d\sigma(z) \right) dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} C \int_{\partial B_r} \left(\int_W |v(x+rz)|^p dx \right) d\sigma(z)$$

$$\left(\begin{array}{l} x \in W, |z|=1, r = \frac{\text{dist}(W, \partial V)}{2} \\ x + rz \in V \end{array} \right)$$

$$\leq C \int_{\partial B_1} \left(\int_V |v(y)|^p dy \right) d\sigma(z) = C' \|v\|_{L^p(V)}^p$$

$$\|\nabla^2 v\|_{L^p(W)} \leq C \|v\|_{L^p(W)} \quad C = C(N, p, W, V) > 0$$

Notre argument est basé sur les liens de v

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\quad} & W \\ W & \xrightarrow{\quad} & V \end{array}$$

$$\Rightarrow \|\nabla^2 v\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla v\|_{L^p(W)}$$

$$C = C(N, p, U, W) > 0$$

$$\Rightarrow \|\nabla^2 v\|_{L^p(U)} \leq C \|v\|_{L^p(V)}$$

$$\text{On } v = u - G * \tilde{f}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|v\|_{L^p(V)} &\leq \|u\|_{L^p(V)} + \underbrace{\|G * \tilde{f}\|_{L^p(V)}}_{\leq C \|\tilde{f}\|_{L^p(V)} \text{ (estimation de convolution)}} \\ &\leq C \|f\|_{L^p(V)} \end{aligned}$$

On obtient bien que

$$\|\nabla^2 v\|_{L^p(U)} \leq C [\|u\|_{L^p(V)} + \|f\|_{L^p(V)}].$$

□

RECAP: $u = v + w$

$v \in W_{loc}^{2,p}(\Omega)$ et $\|D^2 v\|_{L^p(\Omega)} \leq C [\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}]$

$w = G * f \in W^{1,p}(\Omega)$

Pour conclure, il suffit de voir
 $D^2 w \in L^p_{loc}(\Omega)$ et

$\|D^2 w\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$

On définit une opération

$T: L^p(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

$f \longmapsto T(f) = \underbrace{D_{ij}(G * f)}_{\in L^p_{loc}}$

Par défaut, linéaire

On veut montrer que $T: L^p(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$
 linéaire, continue.

Question: $\forall q \exists C > 0$ tq $\forall f \in L^p(\Omega)$

$\|D_{ij}(G * f)\|_{L^p(\Omega)} = \|T(f)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$

PLAN:

Etape ①: $p=2$ $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$

Etape ②: Estimation faible pour $p=1$

$T: L^1(\Omega) \rightarrow L^{1,\infty}(\Omega)$ Espace de Lorentz
($L^1(\Omega) \not\subset L^{1,\infty}(\Omega)$)

Décomposition de Calderón-Zygmund d'ordre
fractionnaire

Etape ③: $1 < p < 2$ par interpolation

Thm d'interpolation de Marcinkiewicz

Etape ④: $2 < p < \infty$: Méthode de dualité.

Etape ①

Propriétés: $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ linéaire, continue

$\forall f \in L^2(\Omega)$, $\Delta_y(G * f) \in L^2(\Omega)$ et

$$\|\Delta_y(G * f)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Aussi on a $G * f \in H^2(\Omega)$ et

$$-\Delta(G * f) = f \text{ p.p. ds } \Omega.$$

Dans:

$* f \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$

, $w = G * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
 $-\Delta w = f$ dans Ω .

$\text{Supp}(f) \subset B_{R/2}$ par $R > 0$ assez grand.

$$\int_{\Omega} |f|^2 dx = \int_{B_R} |f|^2 dx = \int_{B_R} |\Delta w|^2 dx =$$

$$= \sum_{i,j} \int_{B_R} (\partial_{i,i} w) (\partial_{j,j} w) dx$$

$\partial_i \rightarrow$

$$= - \sum_{i,j} \int_{B_R} (\partial_{i,j} w) (\partial_{j,i} w) dx + \sum_{i,j} \int_{\partial B_R} (\partial_{i,i} w) (\partial_{j,j} w) \nu_j$$

$\leftarrow \partial_j$

$$= \sum_{i,j} \int_{B_R} (\partial_{i,j} w) (\partial_{j,i} w) dx + \sum_{i,j} \int_{\partial B_R} \{ (\partial_{i,i} w) (\partial_{j,j} w) \nu_i - (\partial_{i,j} w) (\partial_{j,i} w) \nu_j \}$$

$$\sum_{i,j} \int_{B_R} (\partial_{i,j} w)^2 dx = \int_{B_R} |\Delta w|^2 dx$$

$$w(x) = (G * f)(x)$$

$$= \int_{B_{R/2}} G(x-y) f(y) dy$$

$$x \in \partial B_R$$

$$y \in B_{R/2}$$

$$|x-y| \geq \frac{R}{2} > 0.$$

Si $y \in B_{R/2}$, $x \mapsto G(x-y)$ est de classe C^∞ ds un petit voisinage ouvert de ∂B_R

Donc $\forall x \in \mathcal{D}B_R,$

$$\partial_j w(x) = \int \partial_j G(x-y) f(y) dy$$

$$\partial_{ij} w(x) = \int_{B_{R/2}} \partial_{ij} G(x-y) f(y) dy$$

$$\exists C_N > 0 \text{ tq } |\partial_j G(x-y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^{N-1}} \leq \frac{C_N}{R^{N-1}}$$

$$|\partial_{ij} G(x-y)| \leq \frac{C_N}{|x-y|^N} \leq \frac{C_N}{R^N}$$

$$\Rightarrow |\partial_j w(x)| \leq \frac{C_N}{R^{N-1}} \int_{B_{R/2} \cap \Omega} |f(y)| dy \leq \frac{C_N'}{R^{N-1}}$$

$$|\partial_{ij} w(x)| \leq \frac{C_N}{R^N} \int_{B_{R/2} \cap \Omega} |f(y)| dy \leq \frac{C_N'}{R^N}$$

Norme de bord

$$\leq C R^{N-1} \frac{1}{R^{N-1}} \frac{1}{R^N} \leq \frac{C}{R^N} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

En faisant tendre $R \rightarrow \infty$, on obtient

$$\int_{\Omega} |f|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |D^2 w|^2 dx \geq \int_{\Omega} |D^2 w|^2 dx.$$

$$\Rightarrow w = G * f \in H^2(\Omega) \quad \left\{ \begin{array}{l} (*) \\ \|D^2 w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ - D^2 w = f \text{ presque sur } \Omega. \end{array} \right.$$

* $f \in L^2(\Omega)$: Par densité, $\exists f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ tq
 $f_n \rightarrow f$ ds $L^2(\Omega)$. aussi pp. dt Ω .

Par extention du produit de convolution,
 $(w_n = G * f_n)$

$$\|w_n - w_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)} \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\nabla w_n - \nabla w_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla G\|_{L^1(\Omega-\Omega)} \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)}$$

$\Rightarrow (w_n)$ Cauchy ds $H^1(\Omega)$ complet

$$w_n \rightarrow w \text{ ds } H^1(\Omega).$$

D'après (*),

$$\|\nabla^2 w_n - \nabla^2 w_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)}$$

$\Rightarrow (\nabla^2 w_n)$ Cauchy ds $L^2(\Omega)$ complet

$$\nabla^2 w_n \rightarrow \nabla^2 w \text{ ds } L^2(\Omega)$$

Donc $w \in H^2(\Omega)$. Que reste à examiner
 pour voir, $\nabla^2 w_n \rightarrow \nabla^2 w$ pp. ds Ω

$$\Rightarrow \Delta w_n \rightarrow \Delta w \text{ pp ds } \Omega.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - \Delta w_n = f_n \text{ partout ds } \Omega \\ \Delta w_n \rightarrow \Delta w \text{ pp ds } \Omega \\ f_n \rightarrow f \text{ pp ds } \Omega \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{- \Delta w = f \text{ pp ds } \Omega}$$

D'après (*)

$$\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\boxed{\|D^2 u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}}$$

D

Etape ② : ($p=1$) Estimations faibles.

En général, si $f \in L^1(\Omega) \not\Rightarrow G * f \in W^{2,1}(\Omega)$
($\partial_{ij}(G * f) \notin L^1(\Omega)$)

Def. (Espaces de Lorentz)

$$1 \leq p < \infty$$

$$L^{p,\infty}(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable tq } \sup_{t>0} t^p |\{ |f| > t \}| < \infty \right\}$$

Si $f \in L^p(\Omega)$, d'après l'inégalité de Chebyshev (Markov),

$$|\{ |f| > t \}| \leq \frac{1}{t^p} \int_{\Omega} |f|^p dx$$

$$\Rightarrow \sup_{t>0} t^p |\{ |f| > t \}| \leq \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty$$

$$L^p(\Omega) \subset L^{p,\infty}(\Omega)$$

En général l'autre inclusion est fautive

Ex: $p=1$, $f(x) = \frac{1}{|x|^N}$, $\Omega = B_1$

$f \notin L^1(B_1)$ car, par intégration en coordonnées

polaires

$$\int_{B_1(0)} |f(x)| dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{r^N} d\sigma \right) r^{N-1} dr$$

$$= \omega_N \int_0^1 \frac{dr}{r} = +\infty$$

$$t | \{ |f| \geq t \} | = t | \{ x \in B_1 : \frac{1}{|x|^N} \geq t \} |$$

$$= t | \{ x \in B_1 : |x| < t^{-1/N} \} |$$

$$= \begin{cases} t |B_{t^{-1/N}}| = \omega_N & \text{si } t > 1 \\ t |B_1| \leq \omega_N & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$$

$$\sup_{t>0} t | \{ |f| \geq t \} | \leq \omega_N \Rightarrow f \in L^{1,\infty}(B_1)$$

Rq: $\partial_{ij}^2 G(x) \sim \frac{c_N}{|x|^N}$ qd $x \rightarrow 0$

Notation:

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} = \sup_{t>0} t | \{ |f| \geq t \} |^{1/p}$$

⚠ Ça n'est pas une norme, c'est une quasi-norme

$$\|f+g\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} \leq 2 (\|f\|_{L^{p,\infty}(\Omega)} + \|g\|_{L^{p,\infty}(\Omega)})$$

Si $f \in L^1(\Omega) \Rightarrow \partial_{ij}^2 (G * f) \in L^{1,\infty}(\Omega)$

Proposition: $\exists C = C(N) > 0$ tq $\forall f \in L^2(\Omega)$

$$\|T(f)\|_{L^{1,\infty}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Théorème (Décomposition de Calderón-Zygmund)

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $t > 0$

Alors, $\exists \{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une famille d'ensembles mesurables
des volumes finis deux à deux disjointes tq:

(i) $|f(x)| \leq t$ pp $\forall x \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$

(ii) $t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)| dx \leq 2^N t$

(iii) $\sum_{j \in \mathbb{N}} |Q_j| \leq \frac{1}{t} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$

On peut décomposer $f = g + b$ g good
b bad

où $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f dx, & x \in Q_j \end{cases}$

$$b = f - g.$$

(1) $|g| \leq 2^N t$ pp sur $\mathbb{R}^N$.

(2) $b = 0$ pp sur $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup Q_j$

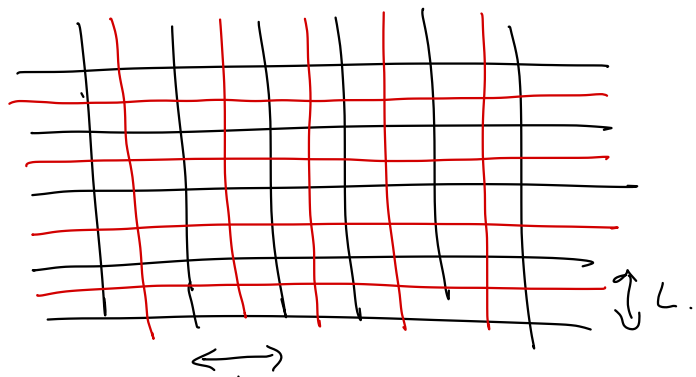
(3) $\int_{Q_j} b(x) dx = 0.$

Deuxième Repose sur le théorème des points de Lebesgue.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f| dx < \infty, \quad t > 0$$

$$\exists L \in \mathbb{N} \text{ tq } \frac{1}{L^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f| dx \leq t.$$

On découpe $\mathbb{R}^N$ en une grille de taille L
 étape 1
 étape 2



On subdivise $\mathbb{R}^N$ en 2^N sous-cubes de taille $\frac{L}{2}$. Parmi ces sous-cubes C

$$\nearrow \frac{1}{|C|} \int_C |f| \leq t \rightarrow \text{on les découpe en } 2^N \text{ sous-sous-cubes de taille } \frac{L}{2^2}$$

$$\searrow \frac{1}{|C|} \int_C |f| > t \rightarrow \text{on n'y touche pas}$$

On construit une famille d'ensembles

$\{Q_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de cubes tels q

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f| > t$$

De plus, ces cubes sont deux à deux disjoints.

(i'') Par def,

$$|Q_j| < \frac{1}{t} \int_{Q_j} |f|$$

$$\Rightarrow \sum_j |Q_j| \leq \frac{1}{t} \sum_j \int_{Q_j} |f| = \frac{1}{t} \int_{\cup Q_j} |f| \leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f|$$

car les Q_j sont
2 à 2 disjoints

(i') Par def

$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f| dx$$

Q_j résulte de la décomposition en 2^N sous-cubes
d'un cube C qui satisfait

$$\frac{1}{|C|} \int_C |f| dx \leq t$$



$$|Q_j| = \frac{1}{2^N} |C|$$

$$Q_j \subset C$$

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f| = \frac{2^N}{|C|} \int_{Q_j} |f| \leq \frac{2^N}{|C|} \int_C |f| \leq 2^N t$$

(i) $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \cup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ point de Lebesgue de $|f|$

$$|f(x_0)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x_0)} |f|$$

(pt tous les
points sont
des points de
Lebesgue)

Comme $|\partial Q_j| = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$, on peut supposer
que $x_0 \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \partial Q_j$.

Il existe $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une famille de cubes tq

$$\begin{cases} x_0 \in C_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ \text{diam } C_k \rightarrow 0 \\ \frac{1}{|C_k|} \int_{C_k} |f| \leq \epsilon \end{cases}$$

$$C_k = a_k + r_k \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^N$$

$$d_k = \sqrt{N} r_k$$

$$x_0 \in C_k$$

$$z \in C_k, \quad |z - x_0| \leq |z - a_k| + |a_k - x_0| \\ \leq \frac{d_k}{2} + \frac{d_k}{2} = d_k$$

$$C_k \subset B_{d_k}(x_0)$$

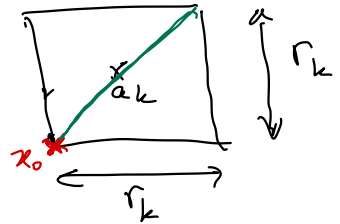
$$|C_k| = r_k^N$$

$$|B_{d_k}(x_0)| = \omega_N d_k^N = \omega_N (\sqrt{N} r_k)^N = \omega_N N^{\frac{N}{2}} r_k^N$$

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega_N d_k^N} \int_{B_{d_k}(x_0)} ||f(x)| - |f(x_0)|| dx$$

car x_0
pt de Lebesgue

$$\stackrel{!}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} C_k \frac{1}{|C_k|} \int_{C_k} ||f(x)| - |f(x_0)||$$



$$\Rightarrow \|f\|_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} |f(x)| dx \leq t.$$

$$\Rightarrow \|f\|_1 \leq t \quad \text{pp. a.e. } \mathbb{R}^N \setminus \bigcup Q_j.$$

$$g = \begin{cases} t & \text{a.e. } \mathbb{R}^N \setminus \bigcup Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f & \text{a.e. } Q_j \end{cases}, \quad b = t - g$$

$$(1) \|g\|_1 \leq \begin{cases} \|f\|_1 & \text{a.e. } \mathbb{R}^N \setminus \bigcup Q_j \\ \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} \|f\|_1 & \text{a.e. } Q_j \end{cases} \leq t \quad (i) \\ \leq 2^N t \quad (ii)$$

$$\Rightarrow \|g\|_1 \leq 2^N t \quad \text{pp. a.e. } \mathbb{R}^N.$$

$$(2) g = t \text{ a.e. } \mathbb{R}^N \setminus \bigcup Q_j \Rightarrow b = 0 \text{ a.e. } \mathbb{R}^N \setminus \bigcup Q_j$$

$$(3) \text{ a.e. } Q_j: b = t - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f$$

$$\Rightarrow \int_{Q_j} b(x) dx = 0.$$

□

$$\underline{R_9}: f \in L^2(\mathbb{R}^N) \Rightarrow b, g \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

$$\|b\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

(Exo)

Donc de la proposition:

$$f \in L^2(\Omega), \quad t > 0 \implies_{\mathbb{C}\mathbb{Z}} f = g + b, \quad g, b \in L^2(\Omega)$$

$$\implies T(f), T(b), T(g) \in L^2(\Omega) \quad (p=2)$$

Then lineaire $T(f) = T(b) + T(g)$

$$\lambda \{T(f) > \frac{t}{2}\} \subset \lambda \{T(b) > \frac{t}{2}\} \cup \lambda \{T(g) > \frac{t}{2}\}$$

$$|\lambda \{T(f) > \frac{t}{2}\}| \leq |\lambda \{T(b) > \frac{t}{2}\}| + |\lambda \{T(g) > \frac{t}{2}\}|.$$

Partie Good: Chebyshev:

$$|\lambda \{T(g) > \frac{t}{2}\}| \leq \frac{4}{t^2} \int |T(g)|^2$$

$$\stackrel{(p=2)}{\leq} \frac{4}{t^2} \int_{\Omega} |g|^2$$

$$\leq \frac{2^{2+n}}{t} \int_{\Omega} |g|$$

$$\leq \frac{2^{2+n}}{t} \int_{\Omega} |f|$$

Donc

$$\sup_{t>0} t |\lambda \{T(g) > \frac{t}{2}\}| \leq 2^{2+n} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Il reste à montrer que

$$\sup_{t \geq 0} |t| |\mathcal{T}(f)(t)| \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

$t > 0$

$$\Rightarrow \sup_{t > 0} |t| |\mathcal{T}(f)(t)| \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\|\mathcal{T}(f)\|_{L^{1,\infty}(\Omega)}}$

Partie BAD:

$$b = \begin{cases} 0 & \text{sur } \complement(\cup Q_j) \\ f - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f dx & \text{sur } Q_j. \end{cases}$$

$$b_j := b \chi_{Q_j} = \left(f - \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f dx \right) \chi_{Q_j}.$$

$$b = \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j \quad \text{pp sur } \mathbb{R}^N$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^{\infty} b_j \right| &= \left| \sum_{j=0}^{\infty} b \chi_{Q_j} \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b| \chi_{Q_j} \\ &\leq |f| + |g| \\ &\leq |f| + 2^N t \\ &= |f| + 2^N t \in L^2(\Omega) \quad \text{car } \Omega \text{ borné} \\ &\quad f \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Convergence dominée,

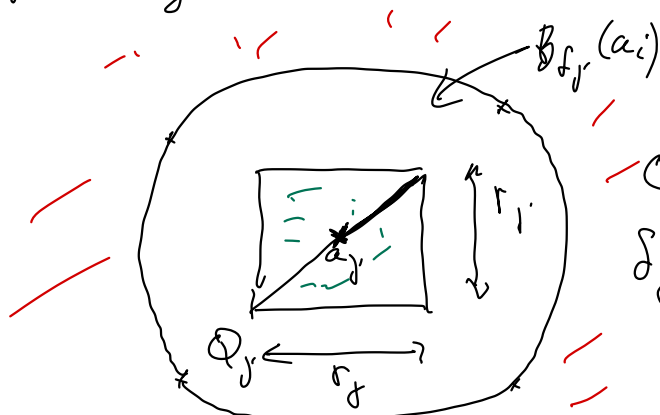
$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j \longrightarrow b \text{ ds } L^2(\Omega)$$

Autrement, la série $\sum_{j \in \mathbb{N}} b_j = b$ converge ds $L^2(\Omega)$.

($p=2$) Test linéaire, continuité de $L^2 \rightarrow L^2$

$$T(b) = \sum_{j \in \mathbb{N}} T(b_j) \text{ ds } L^2(\Omega).$$

$$\text{supp}(b_j) \subset Q_j.$$



$$Q_j = a_j + (-\frac{r_j}{2}, \frac{r_j}{2})$$

$$\delta_j = \text{diam}(Q_j) = \sqrt{N} r_j.$$

$$\overline{Q_j} \subset B_{\delta_j}(a_j)$$

$$x \in B_{\delta_j}(a_j)$$

$$T(b_j)(x) = \int_{Q_j} \partial_{i,k}^2 G(x-y) b_j(y) dy$$

bien sûr
car $y \in Q_j$.

$$= \int_{Q_j} (\partial_{i,k}^2 G(x-y) - \partial_{i,k}^2 G(x-a_j)) b_j(y) dy$$

$x \notin B_{\delta_j}(a_j)$
 $|x-y| \geq \frac{\delta_j}{2} > 0$

car $\int_{Q_j} b_j(y) dy = 0$

D'après le théorème des accroissements finis

$$\exists \xi_j \in [y, a_j] \text{ tq}$$

$$|\partial_{i_k}^2 G(x-y) - \partial_{i_k}^2 F(x-a_j)|$$

$$\leq \frac{C}{|x-z_j|^{N+1}} \underbrace{|y-a_j|}_{\leq \delta_j} \quad \text{car } C = C(N)$$

$$\leq \frac{C \delta_j}{|x-z_j|^{N+1}}$$

$$z_j \in [y, a_j] \text{ avec } y, a_j \in \mathbb{Q}_j \text{ convex}$$

$$\Rightarrow z_j \in \mathbb{Q}_j$$

$$\Rightarrow |x-z_j| \geq \text{dist}(x, \mathbb{Q}_j)$$

$$|\Pi(b_j)(x)| \leq C \delta_j \int_{\mathbb{Q}_j} \frac{|b_j(y)|}{\text{dist}(x, \mathbb{Q}_j)^{N+1}} dy \quad \forall x \in B_{\delta_j}(a_j)$$

$$\left. \begin{array}{l} x \notin B_{\delta_j}(a_j) \\ z \in \mathbb{Q}_j \end{array} \right\} \Rightarrow |x-z| \geq \frac{\delta_j}{2}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, \mathbb{Q}_j) \geq \frac{\delta_j}{2}$$

$$? \text{dist}(x, \mathbb{Q}_j) \geq \frac{|x-a_j|}{2} ?$$

$$|x-a_j| \geq \delta_j$$

$$|z-a_j| \leq \frac{\delta_j}{2} \leq \frac{|x-a_j|}{2}$$

$$\Rightarrow |x-z| \geq |x-a_j| - |a_j-z| \geq \frac{|x-a_j|}{2}$$

$$\Rightarrow \text{dist}(x, \mathbb{Q}_j) \geq |x-a_j|/2$$

$$|T(b_j)(x)| \leq C \int_{\mathbb{Q}_j} \frac{|b_j(y)|}{|x - a_j|^{N+1}} dy. \quad \forall x \in B_j(a_j)$$

$$\int_{B_j(a_j)} |T(b_j)| dx \leq C \int_{B_j(a_j)} \left(\int_{\mathbb{Q}_j} |b_j(y)| dy \right) \frac{dx}{|x - a_j|^{N+1}}$$

$$= \underbrace{C}_{\text{Fubini}} \underbrace{\int_{B_j(a_j)} \frac{dx}{|x - a_j|^{N+1}}}_{\text{Condensation}} \left(\int_{\mathbb{Q}_j} |b_j(y)| dy \right)$$

Condensation
problem

$$\int_{\mathbb{Q}_j} \frac{\rho^{N-1}}{\rho^{N+1}} d\rho = \int_{\mathbb{Q}_j} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\cancel{\mathbb{Q}_j}}$$

$$\int_{B_j(a_j)} |T(b_j)| \leq C \int_{\mathbb{Q}_j} |b_j(y)| dy.$$

$$F = \bigcup B_{\delta_j}(a_j), \quad G = \Omega \setminus F = \bigcap \Omega \setminus B_{\delta_j}(a_j)$$

$$\int_G |T(b)| \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_G |T(b_j)| \leq \sum_{B_j(a_j)} \int |T(b_j)|$$

$$\leq C \sum_{\mathbb{Q}_j} \int |b_j| = C \int_{\Omega} |b|$$

On a mesure $G = \Omega \setminus (\cup B_k(a_i))$

$$\int_G |T(b)| \leq C \int_{\Omega} |b| \leq 2C \int_{\Omega} |f|$$

$$|\{ |T(b)| > \frac{t}{2} \} \cap G| \stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{2}{t} \int_G |T(b)|$$

$$\leq \frac{C}{t} \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \sup_{t>0} t |\{ |T(b)| > \frac{t}{2} \} \cap G| \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

Par conséquent, il suffit de voir

$$|F| \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad ?$$