

16/10/2026, Calderón - Zygmund (suite)

$$w = G * f, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$G \in W'_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

$\text{Supp}(f)$ compact

$$(\partial_j G) * f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

$$\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} w \partial_j \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) f(y) dy \right) \partial_j \varphi(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G(x-y) \partial_j \varphi(x) dx \right) f(y) dy$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j G(x-y) \varphi(x) dx \right) f(y) dy$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \partial_j G(x-y) f(y) dy \right) \varphi(x) dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_j G) * f}_{\in L^p_{loc}}(x) \varphi(x) dx$$

$$\Rightarrow \partial_j w = (\partial_j G) * f.$$

Notation: $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné

$f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \quad (1 \leq p < \infty)$

Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tq $-\Delta u = f$ ds $\mathcal{D}'(\Omega)$

$\Rightarrow u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ et $\forall U \subset\subset V \subset\subset \Omega$

$\exists C = C(N, p, U, V)$ tq

$$\|D^2 u\|_{L^p(U)} \leq C [\|u\|_{L^p(V)} + \|f\|_{L^p(V)}]$$

$\tilde{f} = f \chi_V \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\text{Supp}(\tilde{f}) \subset \Omega$
compact

$$w = G * \tilde{f}, \quad v = u - G * \tilde{f}$$

* v harmonique sur V donc $C^\infty(V) \subset W^{2,p}(V)$

$$\|D^2 v\|_{L^p(U)} \leq C [\|u\|_{L^p(V)} + \|f\|_{L^p(V)}]$$

* $w \in W^{1,p}(\Omega)$

? $D^2 w \in L^p_{loc}(\Omega)$?

$$T: L^p(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{linéaire}$$

$$f \mapsto T(f) = \mathcal{D}_{ij} \cdot \underbrace{(G * f)}_{GL^p_{loc}(\Omega)}$$

Cas $p=2$: $T: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ linéaire continue.

$$\forall f \in L^2(\Omega),$$

$$\|T(f)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

De plus, on a $w := G * f \in H^2(\Omega)$
et $-\Delta w = f$ pp ds Ω .

$$\left[\begin{array}{l} w_n = G * f_n \\ f_n \rightarrow f \text{ ds } L^2(\Omega) \Rightarrow w_n \rightarrow G * f \text{ ds } L^2(\Omega) \\ \|G * f_n - G * f\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq \|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \\ w_n \xrightarrow{L^2} w \text{ avec } w = G * f. \end{array} \right]$$

$p=1$ (Vrai) (variable)

$$\exists C = C_\Omega > 0 \text{ tq } \forall f \in L^2(\Omega)$$

$$\|T(f)\|_{L^{1,\infty}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

$$f = g + b$$

$$|\{ |T(f)| > \frac{\epsilon}{2} \}| \leq |\{ |T(g)| > \frac{\epsilon}{2} \}| + |\{ |T(b)| > \frac{\epsilon}{2} \}| \quad (*)$$

$$|\{ |T(g)| > \frac{\epsilon}{2} \}| \leq \frac{C_N}{\epsilon} \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad (**)$$

$$\Rightarrow \|T(g)\|_{L^{1,\infty}(\Omega)} \leq C_N \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

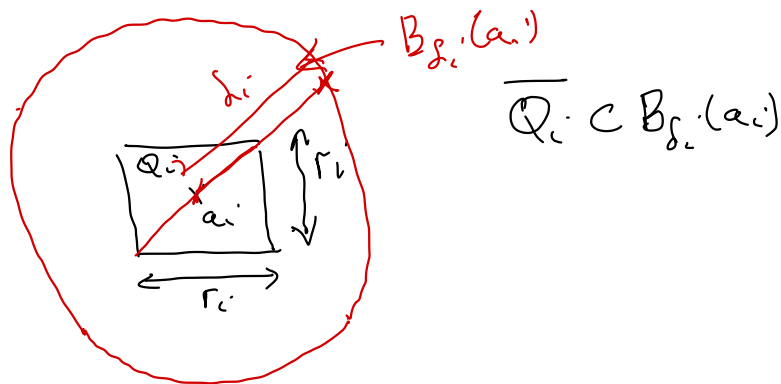
On a montré

$$\sup_{\epsilon > 0} \epsilon |\{ |T(b)| > \frac{\epsilon}{2} \} \cap G| \leq C \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad (1)$$

$$\text{soit } G = \Omega \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{\delta_i}(a_i)$$

$$Q_i = a_i +]-\frac{r_i}{2}, \frac{r_i}{2}[^N \quad (\text{car on a une décomposition de } C^{\infty})$$

$$\delta_i = \text{diam}(Q_i) = \sqrt{N} r_i$$



$$|\{ |T(b)| \geq \frac{t}{2} \} \cap G|$$

$$\leq |\Omega \cap G|$$

$$= \left| \bigcup_{i \in N} B_{\delta_i}(\alpha_i) \right|$$

$$\leq \sum_i |B_{\delta_i}(\alpha_i)| = \sum_i \omega_N \delta_i^N$$

$$= \omega_N N^{N/2} \sum_i r_i^N$$

$$= C_N \sum_i |Q_i|$$

$$\leq \frac{C_N}{t} \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad (2)$$

En regroupant (1), (2), on obtient

$$\sup_{t>0} t |\{ |T(b)| \geq \frac{t}{2} \}| \leq C_N \|f\|_{L^1(\Omega)} \quad (***)$$

(*) , (**) et (***),

$$\sup_{t>0} t |\{ |T(f)| \geq t \}| \leq C_N \|f\|_{L^1(\Omega)}. \quad \square$$

On a montré que $\forall f \in L^2(\Omega)$,

$$\|T(f)\|_{L^{1,\infty}(\Omega)} \leq C_N \|f\|_{L^1(\Omega)}$$

$$\|T(f)\|_{L^{2,\infty}(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

En effet l'inégalité de Chebyshev,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \|T(f)\|_{2+\gamma} &\leq \int |T(f)|^2 dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \Rightarrow \|T(f)\|_{L^{2,\infty}(\Omega)} &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Cas $1 < p < 2$

Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert

$$1 \leq q < r < \infty$$

$$T: L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega) \longrightarrow L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega) \text{ linéaire}$$

$$\text{tg } \exists K_1, K_2 > 0$$

$$\|T(f)\|_{L^{q,\infty}(\Omega)} \leq K_1 \|f\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall f \in L^q \cap L^r$$

$$\|T(f)\|_{L^{r,\infty}(\Omega)} \leq K_2 \|f\|_{L^r(\Omega)}$$

Ainsi T s'étend en une application
linéaire continue de $L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \quad \forall q < p < r$.

On applique Marcinkiewicz à

$q=1, r=2$
et Ω ouvert borné

$$\Rightarrow L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega) = L^2(\Omega)$$

On en déduit que $T \in \mathcal{L}(L^p(\Omega), L^p(\Omega))$
 $\forall 1 < p < 2$

$\exists C > 0$ tq

$$\|T(f)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

$$\text{Or } T(f) = \partial_{i,j} (G * f)$$

$$\text{Donc } f \in L^p(\Omega) \Rightarrow \partial_{i,j} (G * f) \in L^p(\Omega)$$

Donc $w \in W^{2,p}(\Omega)$ et

$$\begin{aligned} \|D^2 w\|_{L^p(\Omega)} &\leq C \|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C \|f\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

$$C = C(N, p) > 0 \quad p \rightarrow 1, C \rightarrow \infty$$

Lemme: $f \in L^p(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx = \int_0^{\infty} p t^{p-1} \lambda(|f|_{\geq t}) dt$$

Démon. $p=1$

$$\int_{\Omega} |f(x)| dx = \int_{\Omega} \int_0^{|f(x)|} dt dx$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^+} |\{t \geq 0: 0 \leq t \leq |f(x)|\}| dt$$

$$(A = \{(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+: |f(x)| \geq t\})$$

$$= \int \left(\int_{\Omega \times \mathbb{R}^+} \chi_A(x, t) dt \right) dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^+} \underbrace{\left(\int_{\Omega} \chi_A(x, t) dx \right)}_{|\{x \in \Omega: |f(x)| \geq t\}|} dt$$

p > 1:

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^+} |\{ |f|^p \geq t \}| dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} |\{ |f|^p \geq s^p \}| p s^{p-1} ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} p s^{p-1} |\{ |f| \geq s \}| ds.$$

CV: $t = s^p$
 $dt = p s^{p-1} ds$

Deen de Marcinkiewicz.

$$f \in L^q \cap L^r, \quad t > 0$$

$$f = f_1 + f_2$$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > t \\ 0 & \text{si } |f(x)| \leq t \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > t \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq t. \end{cases}$$

$$f_1, f_2 \in L^q \cap L^r$$

$$\int_{\Omega} |T(f)|^p = \int_{\mathbb{R}^+} p t^{p-1} |\{ |T(f)| \geq t \}| dt$$

$$|\{ |T(f)| \geq t \}| \subset |\{ |T(f_1)| \geq \frac{t}{2} \}| \cup |\{ |T(f_2)| \geq \frac{t}{2} \}|$$

$$= |\{ |T(f_1)| \geq \frac{t}{2} \}|$$

$$\leq \underbrace{|\{ |T(f_1)| \geq \frac{t}{2} \}|}_{(q)} + \underbrace{|\{ |T(f_2)| \geq \frac{t}{2} \}|}_{(r)}$$

$$|\{ |T(f_1)| \geq \frac{t}{2} \}| \leq \frac{(2\kappa_1)^q}{t^q} \int_{\Omega} |f_1|^q dx = \left(\frac{2\kappa_1}{t}\right)^q \int_{|f| \geq t} |f|^q$$

$$|\{ |T(f_2)| \geq \frac{t}{2} \}| \leq \frac{(2\kappa_2)^r}{t^r} \int_{\Omega} |f_2|^r dx = \left(\frac{2\kappa_2}{t}\right)^r \int_{|f| \leq t} |f|^r$$

$$\int_{\Omega} |T(f)|^p \leq p(2K_1)^q \int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1-q} \left(\int_{|f| \geq t} |f|^q dx \right) dt \\ + p(2K_2)^r \int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1-r} \left(\int_{|f| \leq t} |f|^r dx \right) dt$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1-q} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^q \chi_{|f| \geq t} \right) dt \\ = \text{Fubini} \cdot \int_{\Omega} |f(x)|^q \left(\int_0^{|f(x)|} t^{p-1-q} dt \right) dx$$

$$= \frac{1}{p-q} \int_{\Omega} |f(x)|^q |f(x)|^{p-q} dx$$

$$= \frac{1}{p-q} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1-r} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^r \chi_{|f| \leq t} dx \right) dt = \frac{1}{r-p} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx$$

$$\text{Thus } \int_{\Omega} |T(f)|^p dx \leq K \int_{\Omega} |f|^p dx$$

$$\text{or } K = K(K_1, K_2, p, q, r) > 0$$

Courbe $L^q L^r$ dense ds L^p , aber l'application bilinéaire T s'étend par continuité en une application bilinéaire continue sur $L^p(\Omega)$ $\square$

Proposition: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné

$$1 < p < \infty$$

$$f \in L^p_{loc}(\Omega)$$

Alors $G * f \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, $-\Delta(G * f) = f$
p.p. ds Ω

et $\forall v \subset \subset \Omega$, $\exists C = C(p, N) > 0$

$$\text{tg} \quad \|D^2(G * f)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(v)}$$

Deux: $p=2$ déjà fait (Etape ①)

$1 < p < 2$: conséquence de Marcinkiewitz.

$2 < p < \infty$:

$$\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

$$\int_{\Omega} T(\varphi) \psi \, dx = \int_{\Omega} \partial_{i,j} (G * \varphi) \psi \, dx$$

$$= \int_{\Omega} (G * \varphi) \partial_{i,j} \psi \, dx$$

$$= \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(x-y) \varphi(y) dy \right) \partial_{ij} \psi(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} G(\cancel{x-y}) \partial_{ij} \psi(x) dx \right) \varphi(y) dy$$

$$= \int_{\Omega} (G * \partial_{ij} \psi)(y) \varphi(y) dy$$

$$= \int_{\Omega} \partial_{ij} (G * \psi)(y) \varphi(y) dy$$

$$= \int_{\Omega} T(\psi) \varphi dy$$

$$\int_{\Omega} T(\varphi) \psi = \int_{\Omega} T(\psi) \varphi .$$

$$2 < p < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1} \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \right)$$

$$\Rightarrow 1 < p' < 2$$

Hölder

$$\left| \int_{\Omega} T(\varphi) \psi dx \right| \leq \int_{\Omega} |T(\psi)| |\varphi|$$

$$\leq \|T(\psi)\|_{L^{p'}} \|\varphi\|_{L^p}$$

$\psi \neq 0$

$$\leq C \|\psi\|_{L^{p'}} \|\varphi\|_{L^p}$$

$$\sup_{\substack{\psi \in C_c^\infty(\Omega) \\ \psi \neq 0}} \frac{\left| \int T(\psi) \psi dx \right|}{\|\psi\|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq C \|\psi\|_{L^p(\Omega)}$$

" par dualité de $C_c^\infty(\Omega)$

de $L^{p'}(\Omega)$

($1 < p < \infty$)

$$\sup_{\substack{\psi \in L^{p'}(\Omega) \\ \psi \neq 0}} \frac{\left| \int T(\psi) \psi dx \right|}{\|\psi\|_{L^{p'}(\Omega)}} \leq C \|\psi\|_{L^p(\Omega)}$$

$$= \|T(\psi)\|_{L^p(\Omega)} \quad (\text{par dualité})$$

$$\left(\|u\|_{L^1} = \sup_{\substack{v \in L^{p'} \\ v \neq 0}} \frac{\left| \int uv \right|}{\|v\|_{L^{p'}}} \right)$$

$\exists C > 0$ tq $\forall \psi \in C_c^\infty(\Omega),$

$$\|T(\psi)\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\psi\|_{L^p(\Omega)}$$

Par dualité de $C_c^\infty(\Omega)$ de $L^{p'}(\Omega)$ ($2 \leq p < \infty$)

T s'étend en une application linéaire
continue de $L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$

$$2 \leq p < \infty : \text{si } f \in L^p(\Omega), \quad T(f) = \partial_{i,j} (G * f) \in L^p(\Omega)$$

et donc $G * f \in W^{2,p}(\Omega)$.

On applique ce résultat à $\tilde{f}$, on obtient que $w = G * \tilde{f} \in W^{2,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|D^2 w\|_{L^p(\Omega)} &\leq C \|\tilde{f}\|_{L^p(\Omega)} \\ &= C \|f\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

□

Thm: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné, $\partial\Omega \in C^2$

$f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$

$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ elliptique
 $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$

Alors $\exists ! u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tq

- $\operatorname{div}(A \nabla u) = f$ pp sur Ω .

De plus, $\exists C = C(N, p, \lambda, A, \Omega)$ tq

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

Exemples - $N=2$, $\Omega = B_1(0)$

$$(1) u(x) = \ln(\ln(e|x|^{-1})) \quad x \neq 0$$

$$\Delta u(x) = - \frac{1}{|x|^2 \ln^2(e|x|^{-1})} \quad x \neq 0$$

$$\Delta u \in L^1(\Omega), \quad \mathcal{D}^2 u \notin L^1(\Omega) \\ (= u \in W^{2,1}(\Omega))$$

Thus in general $\Delta u \in L^1 \not\Rightarrow u \in W^{2,1}(\Omega)$

$$(2) u(r, \theta) = r^2 \ln r \cos(2\theta) \quad r \in]0, 1[\\ \theta \in]0, 2\pi[$$

$$\Delta u(r, \theta) = 4 \cos(2\theta)$$

$$\Delta u \in L^\infty(\Omega), \quad \mathcal{D}^2 u \notin W^{2,\infty}(\Omega)$$

Thus, in general, $\Delta u \in L^\infty \not\Rightarrow u \in W^{2,\infty}(\Omega)$.

Pg. - $\Delta u = f$

$$(1) f \in ? \Rightarrow u \in W^{2,1} ?$$

$$(4) f \in ? \Rightarrow u \in W^{2,\infty} ?$$

Si $f \in L^1(\Omega) \not\Rightarrow \mathcal{D}^2 u \in L^1$ Mais $\mathcal{D}^2 u \in L^{1,\infty}$
optimal

$$(4) B\Gamma_0 = \underbrace{W^{1,2}}_{\text{Composants}}$$

B\Gamma_0 = Bounded Mean Oscillation

$$f \in B\Gamma_0(\Omega)$$

$$\sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \rho > 0}} \rho^{-N} \int_{B_\rho(x_0) \cap \Omega} |f(x) - f_{x_0, \rho}| dx < \infty$$

$$f_{x_0, \rho} = \frac{1}{|B_\rho(x_0) \cap \Omega|} \int_{B_\rho(x_0) \cap \Omega} f$$

$$\Delta u \in B\Gamma_0 \Rightarrow \mathcal{D}^2 u \in L^\infty \quad (u \in W^{2, \infty})$$

$$(L^\infty \subset B\Gamma_0)$$

$$(3) \text{ Espace de Hardy: } \mathcal{H}'(\Omega) = (B\Gamma_0(\Omega))'$$

$$\Delta u \in \mathcal{H}' \Rightarrow \mathcal{D}^2 u \in L^1 \quad (u \in W^{2, 1})$$

$$(\mathcal{H}' \subset L^1)$$

$$N=2$$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \partial_x \varphi \\ \partial_y \varphi \end{pmatrix}$$

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\partial_r \varphi = \partial_x \varphi \cos \theta + \partial_y \varphi \sin \theta = \nabla \varphi \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\partial_\theta \varphi = -r \partial_x \varphi \sin \theta + r \partial_y \varphi \cos \theta = \nabla \varphi \cdot \begin{pmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$e_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad e_\theta^\perp = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\nabla \varphi = (\nabla \varphi \cdot e_\theta) e_\theta + (\nabla \varphi \cdot e_\theta^\perp) e_\theta^\perp$$

$$= \partial_r \varphi e_\theta + \frac{1}{r} \partial_\theta \varphi e_\theta^\perp$$

H^2 , Schauder, (7) note des résultats de régularité elliptiques d'EDP sous forme divergence avec des coeff a_{ij} "assez" réguliers.

Pour des coefficients plus mesurables, on a deux résultats fondamentaux de régularité.

Thm (Nirenberg)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ouvert, borné, C^1

$f \in L^2(\Omega)$

$A = (a_{ij})$ elliptique, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution faible de
$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) = f & \text{ds } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\exists p \geq 2$ ($p = p(N, \Omega, \lambda, \|A\|_{L^\infty})$)

tg si $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, alors

$\nabla u \in L^p(\Omega)$

$$W^{-1,p}(\Omega) = \left(W^{1,p'}(\Omega) \right)' \quad p' = \frac{p}{p-1}$$

Théorème De Giorgi, Nash, Poincaré

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné, C^1

$$f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega) \quad (p > \frac{N}{2})$$

$A = (a_{ij})$ L^∞ elliptiques.

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution faible de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors $\exists \alpha \in]0, 1[$ tq $u \in C^{0, \alpha}(\bar{\Omega})$.

Cas particulier: $N=2$

Poincaré : $\forall u \in L_{loc}^p$ ($p > 2$)

$$\Rightarrow u \in W_{loc}^{1, p}(\Omega) \quad (p > 2 = N)$$

Poincaré ($p > N$) : $W_{loc}^{1, p} \hookrightarrow C^{0, 1 - \frac{N}{p}}$

Ici, on a $u \in C^{0, 1 - \frac{2}{p}} \Rightarrow \mathbb{D}GN \cap$

En dimension $N \geq 3$ cet argument ne fonctionne pas.