Chapitre 4

Résultats de régularité

D'après le Théorème 3.4.8 il est naturel de se demander si l'on peut obtenir de la régularité des solutions de $-\Delta u = f$ dans Ω quand f a un degré de différentiabilité donné. On pourrait naïvement penser que si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ alors $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Malheureusement ceci est faux en général excepté dans le cas de la dimension $N = 1$.

Exemple 4.0.1 (Weierstrass). En dimension $N \geq 2$, on considère la boule $B = B_{1/2}(0)$ centré à l'origine et de rayon $1/2$. Pour tout $x \in B$, on pose

$$v(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{-\ln|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2} \left(\frac{4}{\sqrt{-\ln|x|}} + \frac{1}{2(\sqrt{-\ln|x|})^3} \right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On peut vérifier que $f \in \mathcal{C}(B)$, $v \in \mathcal{C}(B) \cap \mathcal{C}^2(B \setminus \{0\})$ et $\Delta v(x) = f(x)$ pour tout $x \in B \setminus \{0\}$. Si $u \in \mathcal{C}^2(B)$ est une solution de $\Delta u = f$ dans B, alors $v - u$ est harmonique dans $B \setminus \{0\}$ et $v - u$ est continue sur toute la boule B. Le principe des singularités artificielles montre que $v - u$ est en fait harmonique sur toute la boule B. Par conséquent, $v - u \in \mathcal{C}^\infty(B)$ et donc $v = (v - u) + u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur B ce qui est absurde.

En revanche, des résultats analogues sont valides si on remplace $\mathcal{C}^m(\Omega)$ par des espaces fonctionnels plus sophistiqués. Nous avons déjà vu dans le Théorème 3.4.8 que ceci est vrai dans les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$. Nous allons considérer d'autres situations dans le cadre des espaces de Hölder $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ et de Sobolev du type $W^{1,p}(\Omega)$.

4.1 Estimations de Schauder

Rappelons tout d'abord la définition des espaces de Hölder.

Définition 4.1.1 (Espaces de Hölder). Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact. On définit l'*espace de Hölder* $\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}^0(K)$ satisfaisant la propriété suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \text{pour tout } x, y \in K.$$

La plus petite constante $C > 0$ dans l'expression précédente est notée $[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)}$ et elle satisfait

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} = \max_{x,y \in K, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} := \|u\|_{\mathcal{C}^0(K)} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)}.$$

Si $k \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}(K)$ comme l'ensemble des fonctions u de classe $\mathcal{C}^k$ dans un voisinage ouvert de K et telles que, pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^N$ avec $|\beta| = k$, on a $\partial^\beta u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$. Il s'agit de nouveau d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(K)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(K)} + \max_{|\beta|=k} [\partial^\beta u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)}.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert, on définit (l'espace de Fréchet) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ telles que $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\omega})$ pour tout ouvert borné $\omega \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$.

Définition 4.1.2 (Espaces de Campanato). Soient $1 \le p < \infty$, $\lambda \ge 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On définit l'*espace de Campanato* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que

$$[u]_{p,\lambda}^p := \sup_{x_0 \in \Omega, \rho > 0} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^p \, dx < +\infty,$$

où $u_{x_0,\rho} := \frac{1}{|\Omega \cap B_\rho(x_0)|} \int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} u(y)\, dy$. Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{p,\lambda}.$$

Remarque 4.1.3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ pour $\lambda = \alpha p + N$. En effet, soient $x_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$. Pour tout x et $y \in \Omega \cap B_\rho(x_0)$, on a $|u(x) - u(y)| \le [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} |x-y|^\alpha \le [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} (2\rho)^\alpha$. On en déduit que $|u(x) - u_{x_0,\rho}| \le [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} (2\rho)^\alpha$, puis

$$\int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} |u(x) - u_{x_0,\rho}|^p \, dx \le \omega_N 2^{\alpha p} [u]^p_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \rho^{\alpha p + N},$$

ce qui montre que $u \in \mathcal{L}^{p,\alpha p+N}(\Omega)$ avec

$$[u]_{p,\alpha p+N} \le \omega_N^{1/p} 2^\alpha [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

De plus, d'après l'inégalité de Hölder, on a également que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \le |\Omega|^{1-1/p} \|u\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$, ce qui montre que $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\alpha p+N}(\Omega)} \le C \|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$. Nous allons voir que si Ω est assez régulier, les espaces $\mathcal{L}^{p,\alpha p+N}(\Omega)$ et $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ sont en fait isomorphes.

Avant cela, nous rappelons un résultat d'intégration dont la démonstration se trouve par exemple dans [4, Theorem 3.21].

Théorème 4.1.4 (de différentiation de Lebesgue). *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} |f(y) - f(x_0)| \, dy = 0.$$

Théorème 4.1.5 (Campanato). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Si $N < \lambda \le N + p$ et $\alpha = \frac{\lambda - N}{p}$, les espaces $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ et $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ sont isomorphes. De plus, les quantités $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ et $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ sont équivalentes.*

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la Remarque 4.1.3 que si $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ pour $\lambda = \alpha p + N$ et, de plus,

$$\|u\|_{p,\lambda} \leq C\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Supposons maintenant que $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Montrons tout d'abord qu'il existe une constante $C = C(N, \lambda, p, \Omega) > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \Omega$ et $R > 0$, on a

$$|u_{x_0,2^{-k}R} - u_{x_0,2^{-l}R}| \leq C[u]_{p,\lambda}(2^{-k}R)^{\frac{\lambda-N}{p}} \qquad \text{pour tout } k < l. \tag{4.1.1}$$

Comme Ω est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \Omega$ et $\rho < \operatorname{diam}(\Omega)$, on a $|\Omega \cap B_\rho(x_0)| \geq A\rho^N$. Si x, $x_0 \in \Omega$ et $0 < r < R$, on a

$$|u_{x_0,r} - u_{x_0,R}|^p \leq 2^{p-1}(|u_{x_0,r} - u(x)|^p + |u(x) - u_{x_0,R}|^p).$$

En intégrant par rapport à $x \in \Omega \cap B_r(x_0)$, il vient

$$\begin{aligned} |u_{x_0,r} - u_{x_0,R}|^p &\leq \frac{2^{p-1}}{Ar^N}\left(\int_{\Omega\cap B_r(x_0)} |u_{x_0,r} - u(x)|^p\,dx + \int_{\Omega\cap B_R(x_0)} |u(x) - u_{x_0,R}|^p\,dx\right) \\ &\leq \frac{2^{p-1}}{Ar^N}[u]^p_{p,\lambda}(r^\lambda + R^\lambda) \leq \frac{2^p}{Ar^N}[u]^p_{p,\lambda}R^\lambda, \end{aligned}$$

d'où, $|u_{x_0,r} - u_{x_0,R}| \leq \frac{2}{A^{1/p}}[u]_{p,\lambda}R^{\lambda/p}r^{-N/p}$. Posons $R_j = 2^{-j}R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors

$$|u_{x_0,R_j} - u_{x_0,R_{j+1}}| \leq \frac{2}{A^{1/p}}[u]_{p,\lambda}R^{\frac{\lambda-N}{p}}2^{\frac{j(N-\lambda)}{p}+\frac{N}{p}}.$$

En sommant pour $j = k, \ldots, l-1$, il vient

$$|u_{x_0,R_l} - u_{x_0,R_k}| \leq C[u]_{p,\lambda}R_k^{\frac{\lambda-N}{p}},$$

avec $C = C(N, p, \lambda, A) > 0$.

On en déduit que la suite $(u_{x_0,R_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, notée $\tilde{u}(x_0)$. Par passage à la limite quand $l \to +\infty$ dans (4.1.1), on en déduit que pour tout $R > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{x_0,R_k} - \tilde{u}(x_0)| \leq C[u]_{p,\lambda}(2^{-k}R)^{\frac{\lambda-N}{p}}, \tag{4.1.2}$$

ce qui montre que cette limite est en fait uniforme sur Ω. Comme la fonction $x_0 \mapsto u_{x_0,R_k}$ est continue, on en déduit que $\tilde{u}$ est continue. Par ailleurs, le théorème de différentiation de Lebesgue assure que $u_{x_0,R} \to u(x_0)$ pour presque tout $x_0 \in \Omega$. Par conséquent, $u = \tilde{u}$ presque partout sur Ω et on peut donc supposer que u est continue sur Ω.

D'après (4.1.2) avec $k = 0$ et en remplaçant R par $2R$, on a pour tout $x \in \Omega$,

$$|u(x) - u_{x,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda}R^{\frac{\lambda-N}{p}}. \tag{4.1.3}$$

Soient maintenant x et $y \in \Omega$, et posons $R = |x - y|$, alors

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{x,2R}| + |u_{x,2R} - u_{y,2R}| + |u_{y,2R} - u(y)|.$$

On a tout d'abord que

$$|u(x) - u_{x,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda}|x - y|^{\frac{\lambda-N}{p}}, \quad |u(y) - u_{y,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda}|x - y|^{\frac{\lambda-N}{p}}.$$

Par ailleurs, si $z \in \Omega \cap B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$,

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq |u_{x,2R} - u(z)| + |u(z) - u_{y,2R}|$$

et comme $B_R(x) \cup B_R(y) \subset B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$, on en déduit, en intégrant sur $\Omega \cap B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$, que

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq \frac{1}{|\Omega \cap B_R(x)|} \int_{\Omega \cap B_R(x)} |u_{x,2R} - u(z)|\, dz + \frac{1}{|\Omega \cap B_R(y)|} \int_{\Omega \cap B_R(y)} |u(z) - u_{y,2R}|\, dz.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que Ω est de classe $\mathcal{C}^1$, il vient que

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq \frac{2}{AR^N} (\omega_N R^N)^{1-1/p} (2R)^{\lambda/p} [u]_{p,\lambda} = C[u]_{p,\lambda} |x-y|^{\frac{\lambda - N}{p}}.$$

On a donc montré que $|u(x) - u(y)| \leq C[u]_{p,\lambda}|x-y|^\alpha$, ce qui établit que $[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C[u]_{p,\lambda}$.

Enfin, on montre que la fonction u est bornée sur $\overline{\Omega}$. En effet, en posant $2R = \operatorname{diam}(\Omega)$ dans (4.1.3), on en déduit que pour tout $x \in \Omega$,

$$|u(x)| \leq |u_{x,2R}| + |u(x) - u_{x,2R}| \leq (\omega_N \operatorname{diam}(\Omega))^{-1/p} \|u\|_{L^p(\Omega)} + C[u]_{p,\lambda} \operatorname{diam}(\Omega)^{\frac{\lambda-N}{p}},$$

ce qui montre que $\|u\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$. □

Théorème 4.1.6 (Schauder). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ où $0 < \alpha < 1$. Si u est une distribution solution de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$. De plus, pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, il existe une constante $C = C(N, \alpha, \Omega, \omega)$ telle que*

$$\|D^2 u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\omega})} \leq C\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Nous allons d'abord montrer que la solution distributionnelle est en fait une solution forte.

Lemme 4.1.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ où $0 < \alpha < 1$. Si u est une distribution solution de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pour ce faire, on considère un ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $\phi = 1$ sur ω. On pose $\tilde{f} = \phi f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ de sorte que le Théorème 2.2.4 assure que $-\Delta(\tilde{f} * G) = \tilde{f} = \phi f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Comme $\tilde{f} = f$ sur ω, on en déduit que $-\Delta(\tilde{f} * G) = f$ dans $\mathcal{D}'(\omega)$. Par conséquent $u - (\tilde{f} * G)$ est harmonique sur ω, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ω. Comme ω est arbitraire, on en déduit que $u - (\tilde{f} * G) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Il reste à établir que le potentiel Newtonien $\tilde{f} * G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \ln(|x|^2 + \varepsilon^2) & \text{si } N = 2, \\ \frac{(|x|^2+\varepsilon^2)^{(2-N)/2}}{N(N-2)\omega_N} & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Notons que $G_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et d'après les propriétés classiques de la convolution, on a également que $\tilde{f} * G_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a déjà vu dans la démonstration du Théorème 2.2.1 que $G_\varepsilon \to G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|\tilde{f} * G_\varepsilon(x) - \tilde{f} * G(x)| \leq \|G_\varepsilon - G\|_{L^1(\Omega - \Omega)} \|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

ce qui montre que $\tilde{f} * G_\varepsilon \to \tilde{f} * G$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$, et donc que $\tilde{f} * G$ est continue sur $\mathbb{R}^N$.

Pour tout $1 \leq j \leq N$, on a

$$\partial_j G_\varepsilon(x) = -\frac{1}{N\omega_N} \frac{x_j}{(|x|^2 + \varepsilon^2)^{N/2}},$$

et $\partial_j G_\varepsilon(x) \to \partial_j G(x) = \frac{1}{N\omega_N} \frac{x_j}{|x|^N}$ pour tout $x \neq 0$. Comme de plus $|\partial_j G_\varepsilon| \leq |\partial_j G| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ on en déduit par convergence dominée que $\partial_j G_\varepsilon \to \partial_j G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Le même argument que précédemment montre que $\partial_j(\tilde{f} * G_\varepsilon) = \tilde{f} * (\partial_j G_\varepsilon) \to \tilde{f} * (\partial_j G)$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$. Comme par ailleurs, $\partial_j(\tilde{f} * G_\varepsilon) \rightharpoonup \partial_j(\tilde{f} * G)$ faible* dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que $\partial_j(\tilde{f} * G) = \tilde{f} * (\partial_j G)$ est continue sur $\mathbb{R}^N$ et donc que $\tilde{f} * G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$.

Comme $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, on en déduit que $\tilde{u} := u\phi \in \mathcal{C}^1_c(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ est une solution faible de

$$-\Delta \tilde{u} = \tilde{f} - 2\nabla u \cdot \nabla \phi - u\Delta\phi \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Comme le membre de droite de l'équation précédente appartient à $L^2(\Omega)$, on obtient par régularité elliptique que $\tilde{u} \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et donc $u \in H^2(\omega)$. On déduit que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. □

Il reste à montrer que $D^2 u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ ainsi que l'estimation. Pour ce faire, nous allons montrer que $D^2 u \in \mathcal{L}^{2,2\alpha+N}(\omega)$ en supposant, sans restreindre la généralité, que ω est de classe $\mathcal{C}^1$ (sinon on peut toujours trouver un ouvert ω' tel que $\overline{\omega} \subset \omega' \subset \overline{\omega'} \subset \Omega$). En dérivant l'équation on a $-\Delta\partial_k u = \partial_k f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $x_0 \in \omega$ et $0 < R_0 := \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega)/2$ tel que $\overline{B_{R_0}(x_0)} \subset \Omega$. Pour tout $R < R_0$, on considère une solution faible $w \in H^1_0(B_R(x_0))$ de

$$\begin{cases} -\Delta w = \partial_k f & \text{dans } B_R(x_0), \\ w = 0 & \text{sur } \partial B_R(x_0). \end{cases}$$

i.e.,

$$\int_{B_R(x_0)} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_{B_R(x_0)} f \partial_k \varphi \, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in H^1_0(B_R(x_0)). \tag{4.1.4}$$

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'un tel w. On pose ensuite $z = \partial_k u - w$ de sorte que $\Delta z = 0$ dans $\mathcal{D}'(B_R(x_0))$ ce qui montre que $z \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0))$.

Démonstration du Théorème 4.1.6. D'après le Corollaire 2.1.16 appliqué à la fonction harmonique ∇z dans $B_R(x_0)$, pour tout $0 < \rho < R$, on a

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,\rho}|^2 \, dx \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,R}|^2 \, dx,$$

ou encore,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}|^2 \, dx \\
&\qquad \leq 2\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,\rho}|^2 \, dx + 2\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla w - (\nabla w)_{x_0,\rho}|^2 \, dx \\
&\qquad \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,R}|^2 \, dx + C' \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla w|^2 \, dx \\
&\qquad \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,R}|^2 \, dx + C'' \int_{B_R(x_0)} |\nabla w|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

En prenant $\varphi = w$ dans la formulation variationnelle (4.1.4) satisfaite par w, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x_0)} |\nabla w|^2\,dx &= -\int_{B_R(x_0)} f\partial_k w\,dx \\ &= -\int_{B_R(x_0)} (f - f_{x_0,R})\partial_k w\,dx \leq \|f - f_{x_0,R}\|_{L^2(B_R(x_0))}\|\nabla w\|_{L^2(B_R(x_0))},\end{aligned}$$

ce qui montre, d'après la Remarque 4.1.3, que

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla w|^2\,dx \leq \int_{B_R(x_0)} |f - f_{x_0,R}|^2\,dx \leq C[f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} R^{2\alpha+N}.$$

Par conséquent, on a

$$\Phi(\rho) := \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}|^2\,dx \leq C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2}\Phi(R) + C'''[f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}R^{2\alpha+N}.$$

En remarquant que la quantité $c \mapsto \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla\partial_k u - c|^2\,dx$ est minimale précisément pour $c = (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}$, on en déduit que Φ est une fonction croissante. Le Lemme 4.1.8 implique alors que

$$\Phi(\rho) \leq C\rho^{2\alpha+N}\left(\frac{\Phi(R)}{R^{2\alpha+N}} + [f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right)$$

soit, pour tout $\rho \leq R_0$

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}|^2\,dx &\leq C_{R_0}\rho^{2\alpha+N}\left(\|D^2u\|_{L^2(B_{R_0}(x_0))} + [f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right) \\ &\leq C_{R_0}\rho^{2\alpha+N}\left(\|f\|_{L^2(B_{R_0}(x_0))} + [f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right) \leq C_{R_0}\rho^{2\alpha+N}\|f\|^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.\end{aligned}$$

Si à présent $\rho \geq R_0$, alors par régularité elliptique et la Remarque 4.1.3,

$$\begin{aligned}\rho^{-2\alpha-N}\int_{B_\rho(x_0)\cap\omega} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}|^2\,dx &\leq 2R_0^{-2\alpha-N}\int_{B_\rho(x_0)\cap\omega} |\nabla\partial_k u|^2\,dx \\ &\leq C_{R_0}\int_\omega |D^2u|^2\,dx \leq C_{R_0}\int_\omega |f|^2\,dx \leq C_{R_0}\|f\|^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.\end{aligned}$$

Ceci implique que $D^2u \in \mathcal{L}^{2,2\alpha+N}(\omega)$ et d'après le théorème de Campanato, $D^2u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\omega})$, soit $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\omega})$, avec

$$\|D^2u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\omega})} \leq C\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

ce qui conclut la preuve du théorème de Schauder. □

Lemme 4.1.8. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que pour tout $0 < \rho \leq R$,*

$$\Phi(\rho) \leq A\left(\frac{\rho}{R}\right)^a \Phi(R) + BR^b,$$

où A, B, a, $b > 0$ et $a > b$. Alors il existe $c = c(A, a, b)$ tel que pour tout $0 < \rho \leq R$

$$\Phi(\rho) \leq c\left(\frac{\Phi(R)}{R^b} + B\right)\rho^b.$$

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $A > 1$. Soit $\gamma = (a+b)/2$, on peut alors trouver $\tau \in (0,1)$ tel que $A\tau^a = \tau^\gamma$. Posons alors $\rho = \tau R$ de sorte que

$$\Phi(\tau R) \leq A\tau^a \Phi(R) + BR^b = \tau^\gamma \Phi(R) + BR^b.$$

En itérant l'inégalité précédente, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau^k R) &\leq \tau^\gamma \Phi(\tau^{k-1}R) + B\tau^{(k-1)b}R^b \\
&\leq \tau^{k\gamma}\Phi(R) + B\tau^{(k-1)b}R^b \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{j(\gamma-b)} \\
&\leq \left(\tau^{-b} + \tau^{-2b}\sum_{j=0}^{\infty} \tau^{j(\gamma-b)}\right) \tau^{(k+1)b}(\Phi(R) + BR^b) \\
&= c\tau^{(k+1)b}(\Phi(R) + BR^b),
\end{aligned}$$

où $c = c(A, a, b)$. Pour tout $0 < \rho < R$, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau^{k+1}R \leq \rho \leq \tau^k R$. Comme $\tau^{k+1} \leq \rho/R$, on en déduit que

$$\Phi(\rho) \leq \Phi(\tau^k R) \leq c\tau^{(k+1)b}(\Phi(R) + BR^b) \leq c\left(\frac{\rho}{R}\right)^b (\Phi(R) + BR^b).$$

□

Le Théorème 4.1.6 s'étend en une estimation globale pour les solutions d'une EDP elliptique du second ordre sous forme divergence avec des coefficients assez réguliers. A l'aide de résultats d'approximation, on peut également montrer l'existence et l'unicité de solutions dans le cadre des espaces de Hölder (voir le Theorem 6.8 dans [6])

Théorème 4.1.9. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i,j \leq N$. Alors il existe une unique solution classique $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

4.2 Estimations de Calderon-Zygmund

Théorème 4.2.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ où $1 < p < \infty$. Si u est une distribution solution de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u \in W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. De plus, pour tout ouverts ω et ω' tels que $\omega \subset\subset \omega' \subset\subset \Omega$, il existe une constante $C = C(N, p, \Omega, \omega, \omega')$ telle que*

$$\|D^2 u\|_{L^p(\omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^p(\omega')} + \|f\|_{L^p(\omega')}\right).$$

Quitte à remplacer f par $f\chi_{\omega'}$, on peut supposer sans restreindre la généralité que $f \in L^p(\Omega)$. Tout comme pour les estimations de Schauder, nous allons ramener le problème au contrôle dans $W^{2,p}$ d'une fonction harmonique et du potentiel Newtonien d'une fonction L^p. Pour ce faire, on étend f par zéro sur $\mathbb{R}^N$ et on continue à noter f cette extension. On pose alors

$$u = v + w$$

où $v := u - (G * f)$ et $w = G * f$. Comme f est à support compact (car Ω est borné), le Théorème 2.2.4 assure que $-\Delta w = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par conséquent v est harmonique sur Ω, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω.

Commençons par établir que le potentiel Newtonien $w \in W^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 4.2.2. *La fonction w appartient à $W^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Comme $w = G * f$ avec $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $\text{Supp}(f) \subset \overline{\Omega}$, une estimation du produit de convolution montre que $\|w\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)}$, soit $w \in L^p(\Omega)$.

Pour montrer que $\partial_j w \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq j \leq N$, il suffit d'établir que $\partial_j w = (\partial_j G) * f$ car, du fait que $\partial_j G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on en déduira que $\|\partial_j w\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_j G\|_{L^1(\Omega-\Omega)}$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, alors d'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_\Omega w(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega G(x-y)f(y)\,dy\right)\partial_j\varphi(x)dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx\right)f(y)dy.$$

Fixons $y \in \Omega$, et considérons $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(y) \subset \Omega$. Alors

$$\int_\Omega G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx = \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx + \int_{B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx.$$

D'après la formule de Green, il vient que

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} \partial_j G(x-y)\varphi(x))\,dx - \int_{\partial B_\varepsilon(y)} G(x-y)\varphi(x)\nu_j(x)\,d\sigma(x),$$

et

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} G(x-y)\varphi(x)\nu_j(x)\,d\sigma(x)\right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\partial B_\varepsilon}|G(z)|\,d\sigma(z) \to 0$$

quand $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs, comme G et $\partial_j G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\left|\int_{B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_{B_\varepsilon(y)} \partial_j G(x-y)\varphi(x)\,dx\right|$$
$$\leq \|\partial_j\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{B_\varepsilon}|G(z)|\,dz + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{B_\varepsilon}|\partial_j G(z)|\,dz \to 0.$$

On en déduit que

$$\int_\Omega G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \partial_j G(x-y)\varphi(x)\,dx,$$

ce qui implique, en utilisant de nouveau le théorème de Fubini que

$$\int_\Omega w(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega (\partial_j G * f)(x)\varphi(x)\,dx.$$

Il vient alors que $\partial_j w = \partial_j G * f$ et donc que $\partial_j w \in L^p(\Omega)$. □

On déduit du Lemme précédent que $u = v + w \in L^p(\Omega)$. On commence par montrer une estimation $W^{2,p}$ de la fonction harmonique v.

Lemme 4.2.3. *Soit ω' un ouvert tel que $\omega \subset\subset \omega' \subset\subset \Omega$. Alors, la fonction $v := u - G * f$ satisfait*

$$\|D^2 v\|_{L^p(\omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^p(\omega')} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de N, p et $\text{dist}(\omega, \partial\Omega)$.

Démonstration. Soient ω' et ω'' des ouverts tels que $\omega \subset\subset \omega'' \subset\subset \omega' \subset\subset \Omega$. Comme $\partial_i v$ est harmonique sur Ω, on en déduit par la propriété de la moyenne et la formule de Green que si $x \in \omega''$ et $2r = d = \mathrm{dist}(\omega'', \partial\omega')$ de sorte que $\overline{B_r(x)} \subset \omega'$,

$$\omega_N r^N \partial_i v(x) = \int_{B_r(x)} \partial_i v(y)\, dy = \int_{\partial B_r(x)} v(y)\nu_i(y)\, d\sigma(y).$$

Par conséquent, en intégrant effectuant le changement de variable $y = x + rz$ dans l'intégrale de surface, on obtient que

$$|\partial_i v(x)| \le \frac{1}{\omega_N r} \int_{\partial B_1} |v(x+rz)|\, d\sigma(z).$$

On élève l'inégalité précédente à la puissance p puis on intègre par rapport à $x \in \omega''$. L'inégalité de Hölder et le Théorème de Fubini montrent alors que

$$\begin{aligned}\|\partial_i v\|^p_{L^p(\omega'')} &\le \frac{1}{(\omega_N r)^p}(N\omega_N)^{p-1} \int_{\omega''} \left(\int_{\partial B_1} |v(x+rz)|^p\, d\sigma(z) \right) dx \\ &= \frac{1}{(\omega_N r)^p}(N\omega_N)^{p-1} \int_{\partial B_1} \left(\int_{\omega''} |v(x+rz)|^p\, dx \right) d\sigma(z) \le \frac{(N\omega_N)^p}{(\omega_N r)^p} \|v\|^p_{L^p(\omega')}.\end{aligned}$$

Le même argument appliqué à la fonction harmonique $\partial^2_{ij} v$ montre que $\|\partial^2_{ij} v\|_{L^p(\omega)} \le C\|\partial_i v\|_{L^p(\omega'')}$, ce qui implique que

$$\|D^2 v\|_{L^p(\omega)} \le C\|v\|_{L^p(\omega')}.$$

Or

$$\|v\|_{L^p(\omega')} \le \|u\|_{L^p(\omega')} + \|G * f\|_{L^p(\omega')}.$$

Comme Ω est borné, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{\Omega}$ et $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on obtient que $\|G * f\|_{L^p(\omega')} \le \|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)}\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Il vient finalement que $\|v\|_{L^p(\omega')} \le C(\|u\|_{L^p(\omega')} + \|f\|_{L^p(\Omega)})$ et donc que

$$\|D^2 v\|_{L^p(\omega)} \le C \left(\|u\|_{L^p(\omega')} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right),$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Il reste donc à établir que $D^2 w \in L^p(\Omega)$. Le cas $p = 2$ est une conséquence directe de la formule de Green.

Lemme 4.2.4. *Si $f \in L^2(\Omega)$, alors le potentiel Newtonien $G * f \in H^2(\Omega)$, $-\Delta(G * f) = f$ p.p. sur Ω et*

$$\|D^2(G * g)\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, l'application $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ donnée par

$$Tf = \partial^2_{ij}(G * f)$$

est une application linéaire continue sur $L^2(\Omega)$.

Démonstration. On suppose d'abord que $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. D'après le Théorème 2.2.2, on a que $w := G * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $-\Delta w = f$ dans $\mathbb{R}^N$. Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega \subset B_{R/2}$. Alors

$$\int_\Omega |f|^2\, dx = \int_{B_R} |f|^2\, dx = \int_{B_R} |\Delta w|^2\, dx = \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R} (\partial^2_{ii} w)(\partial^2_{jj} w)\, dx.$$

En utilisant deux fois la formule de Green, il vient que

$$\int_\Omega |f|^2\,dx = \sum_{i,j=1}^N \int_{B_R} (\partial^2_{ij} w)(\partial^2_{ij} w)\,dx + \sum_{i,j=1}^N \int_{\partial B_R} \left[(\partial^2_{jj} w)(\partial_i w)\nu_i - (\partial_i w)(\partial^2_{ij} w)\nu_j\right] d\sigma.$$

Montrons que l'intégrale de surface tend vers zéro quand $R \to +\infty$. Si $x \in \partial B_R$ et $y \in \operatorname{supp}(f) \subset B_{R/2}$ alors $|x-y| \geq R/2 > 0$ de sorte que les applications $y \mapsto G(x-y)$, $y \mapsto \nabla G(x-y)$ et $y \mapsto D^2 G(x-y)$ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\overline{B_{R/2}})$. Par conséquent, pour tout $x \in \partial B_R$,

$$\partial_i w(x) = \int_\Omega \partial_i G(x-y) f(y)\,dy, \quad \partial^2_{ij} w(x) = \int_\Omega \partial^2_{ij} G(x-y) f(y)\,dy.$$

Comme $|\partial_i G(x-y)| \leq \frac{1}{\omega_N |x-y|^{N-1}} \leq \frac{2^N}{\omega_N R^{N-1}}$ et $|\partial^2_{ij} G(x-y)| \leq \frac{N}{\omega_N |x-y|^N} \leq \frac{N 2^N}{\omega_N R^N}$, on en déduit que

$$\left| \int_{\partial B_R} \left[(\partial^2_{jj} w)(\partial_i w)\nu_i - (\partial_i w)(\partial^2_{ij} w)\nu_j\right] d\sigma \right| \leq C_N R^{1-N} R^{-N} R^{N-1} \to 0$$

quand $R \to +\infty$. Par conséquent,

$$\int_\Omega |f|^2\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{B_R} |D^2 w|^2\,dx \geq \int_\Omega |D^2 w|^2\,dx. \tag{4.2.1}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, on sait déjà que $w = G * f \in H^1(\Omega)$. Par densité, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$. En notant $w_n := G * f_n$, comme Ω est borné et $G \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que

$$\begin{cases} \|w_n - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \\ \|\partial_j w_n - \partial_j w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_j G\|_{L^1(\Omega-\Omega)} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \end{cases}$$

ce qui montre que $w_n \to w$ dans $H^1(\Omega)$. Par ailleurs, l'estimation (4.2.1) implique que $\|D^2 w_n - D^2 w_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)}$, ce qui montre que $(D^2 w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet. La suite $(D^2 w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite dans $L^2(\Omega)$ qui doit coïncider avec $D^2 w$. En particulier, $w \in H^2(\Omega)$ et, par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité

$$\int_\Omega |D^2 w_n|^2\,dx \leq \int_\Omega |f_n|^2\,dx,$$

il vient

$$\int_\Omega |D^2 w|^2\,dx \leq \int_\Omega |f|^2\,dx.$$

Enfin, comme $-\Delta w_n = f_n$ dans Ω, on obtient que $-\Delta w = f$ p.p. dans Ω. $\square$

Malheureusement, l'argument précédent ne s'adapte pas pour $p \neq 2$. Pour $p = 1$, nous allons montrer une version affaiblie qui repose sur la décomposition de Calderon-Zygmund d'une fonction intégrable f en une partie "good" notée g, où celle ci-est "essentiellement petite" et une autre "bad", noté b où elle peut prendre de grandes valeurs mais"oscille peu".

Théorème 4.2.5 (Decomposition de Calderon-Zygmund). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $t > 0$. Alors il existe une suite de cubes $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs deux à deux disjoints tels que*

1. $|f(x)| \leq t$ *p.p. tout* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right)$ *;*

2. *pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a*
$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq 2^N t.$$
3. $\sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| \leq t^{-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

On peut alors décomposer f en
$$f = g + b$$
où
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right), \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\, dy & \text{si } x \in Q_j. \end{cases}$$
qui satisfont

1. $|g| \leq 2^N t$ *p.p. sur* $\mathbb{R}^N$ *;*
2. $b = 0$ *p.p. sur* $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right)$ *;*
3. $\int_{Q_j} b(y)\, dy = 0$.

Démonstration du Théorème 4.2.5. Soit $l \in \mathbb{N}$ assez grand tel que
$$\frac{1}{l^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx \leq t.$$
On recouvre $\mathbb{R}^N$ par des cubes d'intérieurs deux à deux disjoints et dont les côtés sont de longueur l (la mesure de tels cubes est donc l^N). On décompose chacun de ces cubes Q en 2^N sous-cubes d'intérieurs deux à deux disjoints de longueur $l/2$. Les sous-cubes C qui satisfont
$$\frac{1}{|C|} \int_C |f(x)|\, dx \leq t$$
sont de nouveau décomposés de la même manière et le procédé est répété indéfiniment. Notons $\mathcal{F} = \{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la famille des cubes qui satisfont
$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx > t.$$
Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit C l'unique cube dont la subdivision donne Q_j. On a alors nécessairement que $\frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|\, dx \leq t$ (puisque ce cube a été décomposé) et comme $|C|/|Q_j| = 2^N$, on a
$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq 2^N \frac{1}{|C|} \int_C |f(x)|\, dx \leq 2^N t.$$

Par définition de Q_j, on a que $|Q_j| < t^{-1} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx$. Comme les cubes sont d'intérieurs deux à deux disjoints et que l'intersection des frontières de cubes est de mesure nulle, il vient que $\sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| \leq t^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx$.

Soit enfin $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ un point de Lebesgue de f. On peut alors trouver une suite décroissante de cubes ouverts $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant x_0 et dont le diamètre tend vers zéro quand $n \to +\infty$ satisfaisant
$$\frac{1}{|C_n|} \int_{C_n} |f(x)|\, dx \leq t \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En notant $C_n = x_n+(-l_n, l_n)^N$ où $x_n \in \mathbb{R}^N$ est le centre et $l_n > 0$ est la longueur des côtés du cube C_n, on en déduit que $C_n \subset B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)$. Par conséquent, d'après le théorème de différentiation de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{|C_n|}\int_{C_n}|f(x)-f(x_0)|\,dx &\leq \frac{|B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)|}{|C_n|}\frac{1}{|B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)|}\int_{B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)}|f(x)-f(x_0)|\,dx\\ &= \omega_N N^{N/2}\frac{1}{|B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)|}\int_{B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)}|f(x)-f(x_0)|\,dx \to 0,\end{aligned}$$

ce qui montre que

$$|f(x_0)| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{|C_n|}\int_{C_n}|f(x)|\,dx \leq t.$$

Posons alors

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right), \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy & \text{si } x \in Q_j. \end{cases}$$

et $b = f - g$. Par construction, $b = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right)$ et $b = f - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy$ p.p. sur Q_j de sorte que $\int_{Q_j} b(y)\,dy = 0$. Par ailleurs, on sait déjà que $|g| = |f| \leq t$ p.p. sur $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right)$ et, par construction des cubes Q_j, $|g| \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j}|f(x)|\,dx \leq 2^N t$ sur Q_j. On a ainsi montré que $|g| \leq 2^N t$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. □

L'application linéaire $f \in L^2(\Omega) \mapsto Tf = \partial^2_{ij}(G * f)$ n'est en général pas continue sur $L^1(\Omega)$. Nous avons toutefois le résultat plus faible suivant.

Lemme 4.2.6. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de N telle que*

$$\sup_{t>0} t|\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Démonstration. On étend f par zéro à tout $\mathbb{R}^N$ et on continue à noter f cette extension. D'après la décomposition de Calderon-Zygmund, on peut décomposer f sous la forme $f = g + b$ où g et b satisfont les conclusions du Théorème 4.2.5. Comme de plus $f \in L^2(\Omega)$, on en déduit que g et $b \in L^2(\Omega)$ ce qui montre que Tg et Tb sont bien définis. Par linéarité de T, $Tf = Tg + Tb$ et, pour tout $t > 0$, on a

$$\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\} \subset \{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\} \cup \{x \in \Omega : |Tb(x)| > t/2\},$$

d'où, en passant à la mesure

$$|\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq |\{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\}| + |\{x \in \Omega : |Tb(x)| > t/2\}|. \tag{4.2.2}$$

Estimation de Tg : D'après l'inégalité de Chebychev et le Lemme 4.2.4,

$$|\{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\}| \leq \frac{4}{t^2}\int_\Omega |Tg|^2\,dx \leq \frac{4}{t^2}\int_\Omega |g|^2\,dx \leq \frac{2^{2+N}}{t}\int_\Omega |g|\,dx,$$

car $|g| \leq 2^N t$ p.p. sur Ω, puis comme $\int_\Omega |g|\,dx \leq \int_\Omega |f|\,dx$,

$$|\{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\}| \leq \frac{2^{2+N}}{t}\|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.2.3}$$

Estimation de Tb : On pose $b_k := b\chi_{Q_k}$ de sorte que $b = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et p.p. tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |b| \; \chi_{Q_k} \leq \sum_{k=1}^{n} (2^N t + |f|) \; \chi_{Q_k} \leq 2^N t \chi_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k} + |f| \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

ce qui montre, par convergence dominée que $b = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, comme T est une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, il vient que

$$Tb = \sum_{k=0}^{+\infty} Tb_k \quad \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Soit y_k le centre du cube Q_k et $\delta_k = \operatorname{diam}(Q_k)$ de sorte que $\overline{Q}_k \subset B_k = B_{\delta_k}(y_k)$. Comme $\int_{Q_k} b_k(y)\, dy = 0$, pour tout $x \notin B_k$, on a

$$Tb_k(x) = \int_{Q_k} \partial^2_{ij} G(x-y) b_k(y)\, dy = \int_{Q_k} [\partial^2_{ij} G(x-y) - \partial^2_{ij} G(x-y_k)] b_k(y)\, dy.$$

Comme $x \notin B_k$, l'application $y \mapsto \partial^2_{ij} G(x-y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le cube Q_k. Pour tout $y \in Q_k$, le théorème des accroissements finis montre alors l'existence un $\hat{y}_k \in [y, y_k]$ tel que

$$|\partial^2_{ij} G(x-y) - \partial^2_{ij} G(x-y_k)| \leq |\nabla \partial^2_{ij} G(x-\hat{y}_k)| \; |y-y_k| \leq \frac{C_N}{|x-\hat{y}_k|^{N+1}} \; |y-y_k|.$$

Or comme Q_k est convexe, $\hat{y}_k \in Q_k$ et donc $|x-\hat{y}_k| \geq \operatorname{dist}(x, Q_k)$. On obtient finalement que

$$|Tb_k(x)| \leq \frac{C_N \delta_k}{\operatorname{dist}(x, Q_k)^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy,$$

et il vient alors que

$$\int_{\Omega \setminus B_k} |Tb_k(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_k} |Tb_k(x)|\, dx \; \leq C_N \delta_k \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_k} \frac{dx}{\operatorname{dist}(x, Q_k)^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy.$$

Or si $x \notin B_k$ et $z \in Q_k$, on a que $|x-y_k| \geq \delta_k$ et $|z-y_k| \leq \delta_k/2 \leq |x-y_k|/2$. Par conséquent, $|x-z| \geq |x-y_k| - |y_k-z| \geq |x-y_k|/2$ et donc $\operatorname{dist}(x, Q_k) \geq |x-y_k|/2$. D'après la formule de changement de variables en coordonnées polaires, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \setminus B_k} |Tb_k(x)|\, dx \; &\leq C_N \delta_k \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_k} \frac{dx}{|x-y_k|^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy \\ &= C_N \delta_k \int_{\delta_k}^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{r^{N+1}}\, dr \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy \leq C_N \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy.\end{aligned}$$

En notant $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ et $G = \Omega \setminus F$, on obtient après sommation en $k \in \mathbb{N}$ que

$$\int_G |Tb|\, dx \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_G |Tb_k|\, dx \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega \setminus B_k} |Tb_k|\, dx \leq C_N \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{Q_k} |b_k|\, dx = C_N \int_\Omega |b|\, dx.$$

Mais comme $b = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ et $b = f - \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(y)\, dy$ p.p. sur Q_k, on en déduit que

$$\int_\Omega |b|\, dx \leq 2 \int_\Omega |f|\, dx,$$

ce qui montre que
$$\int_G |Tb|\,dx \leq C_N \int_\Omega |f|\,dx.$$
Or comme,
$$|\{x \in G : |Tb(x)| > t/2\}| \ \leq \frac{2}{t} \int_G |Tb|\,dx \leq \frac{C}{t}\int_\Omega |f|\,dx,$$
et $|B_k| = C_N|Q_k|$,
$$|F| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |B_k| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_N\delta_k^N = C_N \sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| \leq \frac{C_N}{t}\int_\Omega |f|\,dx,$$
il vient finalement que
$$|\{x \in \Omega : |Tb(x)| > t/2\}| \ \leq \frac{C}{t}\int_\Omega |f|\,dx. \tag{4.2.4}$$
En regroupant (4.2.2), (4.2.3) et (4.2.4), on obtient le résultat annoncé. □

Le résultat général dans le cas $1 < p < 2$ repose sur le théorème suivant d'interpolation de Marcinkiewicz et un argument de dualité quand $p > 2$.

Théorème 4.2.7 (**Interpolation de Marcinkiewicz**)**.** *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $1 \leq q < r < \infty$ des exposants et $T : L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega) \to L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ une application linéaire. Supposons qu'il existe des constantes K_1 et $K_2 > 0$ telles que*
$$|\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq \left(\frac{K_1\|f\|_{L^q(\Omega)}}{t}\right)^q, \quad |\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq \left(\frac{K_2\|f\|_{L^r(\Omega)}}{t}\right)^r$$
pour tout $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et tout $t > 0$. Alors T s'étend en une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ pour tout $q < p < r$ et
$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \ \leq CK_1^\theta K_2^{1-\theta}\|f\|_{L^p(\Omega)}$$
pour tout $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ où
$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r}$$
et $C > 0$ ne dépend que de p, q et r.

Avant de démontrer ce théorème, rappelons un résultat d'intégration.

Lemme 4.2.8. *Pour tout $p \geq 1$ et $f \in L^p(\Omega)$, on a*
$$\mu(t) := |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}| \ \leq \frac{1}{t^p}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx$$
et
$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mu(t)\,dt.$$

Démonstration. La première inégalité (dite de Chebychev) est une conséquence de
$$t^p\mu(t) \leq \int_{\{|f|>t\}} |f|^p\,dx \leq \int_\Omega |f|^p\,dx.$$

Par ailleurs, si $f \in L^1(\Omega)$, en notant $A = \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ : |f(x)| > t\}$, le Théorème de Fubini montre que

$$\int_\Omega |f(x)|\,dx = \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} dt\,dx = \int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} \chi_A(x,t)\,dx\,dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}^+}\int_\Omega \chi_{\{x\in\Omega:|f(x)|>t\}}\,dx\,dt = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(t)\,dt.$$

Si $p > 1$, on applique le cas précédent à la fonction $|f|^p \in L^1(\Omega)$, puis on effectue le changement de variables $t = s^p$. Il vient alors

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx = \int_{\mathbb{R}^+} |\{x\in\Omega : |f(x)|^p > t\}|\,dt = \int_{\mathbb{R}^+} |\{x\in\Omega : |f(x)| > s\}|\,ps^{p-1}\,ds,$$

ce qui montre l'égalité désirée. □

Venons en à la preuve du Théorème de Marcinkiewicz.

Démonstration du Théorème 4.2.7. Pour $f \in L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega)$, $A > 0$ et $t > 0$, on écrit

$$f = f_1 + f_2$$

où

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > A^{-1}t, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \le A^{-1}t, \end{cases}$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > A^{-1}t, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \le A^{-1}t. \end{cases}$$

Par linéarité de T, on a $|Tf| \le |Tf_1| + |Tf_2|$ et donc

$$|\{x\in\Omega : |Tf(x)| > t\}| \le |\{x\in\Omega : |Tf_1(x)| > t/2\}| + |\{x\in\Omega : |Tf_2(x)| > t/2\}|$$
$$\le \left(\frac{2K_1}{t}\right)^q \int_\Omega |f_1|^q\,dx + \left(\frac{2K_2}{t}\right)^r \int_\Omega |f_2|^r\,dx.$$

Par suite, le Lemme 4.2.8 implique que

$$\int_\Omega |Tf|^p\,dx = p\int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1}|\{x\in\Omega : |Tf(x)| > t\}|\,dt$$
$$\le p(2K_1)^q \int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1-q}\left(\int_{\{|f|>A^{-1}t\}} |f|^q\,dx\right)dt + p(2K_2)^r\int_{\mathbb{R}^+} t^{p-1-r}\left(\int_{\{|f|\le A^{-1}t\}} |f|^r\,dx\right)dt.$$

On pose $t = As$ où $A > 0$ sera déterminé ultérieurement. On obtient alors

$$\int_\Omega |Tf|^p\,dx \le p(2K_1)^q A^{p-q}\int_{\mathbb{R}^+} s^{p-1-q}\left(\int_{\{|f|>s\}} |f|^q\,dx\right)ds$$
$$+ p(2K_2)^r A^{p-r}\int_{\mathbb{R}^+} s^{p-1-r}\left(\int_{\{|f|\le s\}} |f|^r\,dx\right)ds.$$

Or, le Théorème de Fubini donne

$$\int_{\mathbb{R}^+} s^{p-1-q}\left(\int_{\{|f|>s\}} |f(x)|^q\,dx\right) ds = \int_\Omega |f(x)|^q \left(\int_0^{|f(x)|} s^{p-1-q}\,ds\right) dx = \frac{1}{p-q}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx$$

et de même

$$\int_{\mathbb{R}^+} s^{p-1-r}\left(\int_{\{|f|\le s\}} |f(x)|^r\,dx\right) ds = \int_\Omega |f(x)|^r \left(\int_{|f(x)|}^{+\infty} s^{p-1-r}\,ds\right) dx = \frac{1}{r-p}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx.$$

En regroupant les estimations précédentes, on obtient que

$$\int_\Omega |Tf|^p\,dx \le \left\{\frac{p}{p-q}(2K_1)^q A^{p-q} + \frac{p}{r-p}(2K_2)^r A^{p-r}\right\}\int_\Omega |f(x)|^p\,dx$$

pour tout $A > 0$. En prenant la valeur de A qui minimise l'expression entre accolades, i.e.

$$A = 2K_1^{q/(r-q)}K_2^{r/(r-q)},$$

on obtient

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \le 2\left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p}\right)^{1/p} K_1^\theta K_2^{1-\theta}\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

comme attendu. □

Lemme 4.2.9. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in L^p(\Omega)$ ($1 < p < \infty$). Alors le potentiel Newtonien $G * f \in W^{2,p}(\Omega)$, $-\Delta(G * f) = f$ p.p. sur Ω et il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de N et p telle que*

$$\|D^2(G * g)\|_{L^p(\Omega)} \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier, l'application $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ donnée par

$$Tf = \partial^2_{ij}(G * f)$$

est une application linéaire continue sur $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Le cas $p = 2$ a déjà été traité dans le Lemme 4.2.4. Si $1 < p < 2$, il suffit d'appliquer les Lemmes 4.2.4, 4.2.6 et le Théorème 4.2.7 d'interpolation de Marcinkiewicz avec $q = 1$ et $r = 2$. Il reste à traiter le cas $p > 2$ qui repose sur un argument de dualité. En effet, en posant $q = p/(p-1) \in]1, 2[$, si f et $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, alors une intégration par parties et le Théorème de Fubini montrent que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (Tf)g\,dx &= \int_\Omega \partial^2_{ij}(G * f)g\,dx = \int_\Omega (G * f)\partial^2_{ij}g\,dx\\ &= \int_\Omega\int_\Omega G(x-y)f(y)\partial^2_{ij}g(x)\,dy\,dx = \int_\Omega f(Tg)\,dy \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|Tg\|_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Comme $1 < q < 2$, on a que $\|Tg\|_{L^q(\Omega)} \le C\|g\|_{L^q(\Omega)}$ et donc

$$\int_\Omega (Tf)g\,dx \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)},$$

d'où

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} = \sup\left\{\int_\Omega (Tf)g\,dx : g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega), \|g\|_{L^q(\Omega)} \le 1\right\} \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Par conséquent, T s'étend en une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$. □

Le Théorème 4.2.1 est maintenant une conséquence immédiate des Lemmes 4.2.3 et 4.2.9.

Les estimations de Calderon-Zygmund sont fausses dans les cas critiques $p = 1$ et $p = \infty$.

Exemple 4.2.10. Supposons $N = 2$ et $D = B_1(0)$. On peut vérifier facilement les calculs suivants :
- si, pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, on a $u(x) = \ln \ln(e|x|^{-1})$, alors $\Delta u(x) = -\frac{1}{|x|^2 \ln^2(e|x|^{-1})}$. On montre dans ce cas que $D^2u \notin L^1(D)$ mais que $\Delta u \in L^1(D)$;
- si, pour tout $(r, \theta) \in]0, 1[\times]0, 2\pi[$, on a en coordonnées polaires $u(r, \theta) = r^2 \ln r \cos(2\theta)$, alors $\Delta u(r, \theta) = 4 \cos(2\theta)$. On montre alors que $\Delta u \in L^\infty(D)$ mais $D^2u \notin L^\infty(D)$.

Remarque 4.2.11. On peut en fait montrer, à l'aide de techniques d'analyse harmonique qui dépassent le cadre de ce cours, que
- si $f \in L^1(\Omega)$, alors D^2u appartient à l'espace de Lorentz $L^{1,\infty}(\Omega)$, ce qui signifie (voir le Lemme 4.2.6) que
$$\sup_{t>0} t|\{x \in \Omega : |D^2u(x)| > t\}| < +\infty;$$
- si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $D^2u \in BMO(\Omega)$ qui est un espace isomorphe à l'espace de Campanato $\mathcal{L}^{1,N}(\Omega)$.

De plus, si f appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$ (qui peut être identifié au dual de $BMO(\Omega)$), alors $u \in W^{2,1}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Les estimations de Calderon-Zygmund se généralisent en des estimations globales pour les solution d'une équation elliptique du second ordre sous forme divergence. A l'aide de techniques d'approximation, elles permettent également de montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte pour un second membre $f \in L^p(\Omega)$ (voir par exemple le Theorem 9.15 dans [6]).

Théorème 4.2.12. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et A une matrice satisfaisant la condition d'ellipticité (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \le i, j \le N$. Alors il existe une unique solution $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ telle que*
$$-\text{div}(A\nabla u) = f \quad \textit{presque partout dans } \Omega.$$
De plus, il existe une constante $C > 0$ dépendant de N, p, λ, A et Ω telle que
$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

4.3 Autres résultats de régularité

Nous terminons ce chapitre par un exposé de quelques autres résultats de régularité. Contrairement aux résultats décrits jusqu'ici, les résultats suivants ont la particularité d'être valables sans aucune hypothèse supplémentaire sur les coefficients a_{ij} de l'EDP qui peuvent par conséquent être discontinus (contrairement aux Théorèmes 3.4.1 et 4.2.12 qui nécessitent des coefficients a_{ij} continûment différentiables).

Un premier résultat dû à Meyers montre une meilleure intégrabilité du gradient de la solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ d'une équation elliptique du second ordre sous forme divergence.

Théorème 4.3.1 (Meyers). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ l'unique solution faible de*
$$\begin{cases} -\text{div}(A\nabla u) = f & \textit{dans } \ \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
Alors il existe $\delta > 0$ qui ne dépend que de Ω, N, λ et $\|A\|_{L^\infty(\Omega)}$ tel que pour tout $2 < p < 2 + \delta$, si $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Une première démonstration relativement élémentaire se trouve dans [1] (Chapitre I, Section 4). Elle consiste à décomposer l'opérateur différentiel $L = -\mathrm{div}(A\nabla u)$ en une partie symétrique $L_1 = -\mathrm{div}(A_1\nabla u)$ avec $A_1^T = A_1$ ayant une grande constante d'ellipticité et une partie antisymétrique $L_2 = -\mathrm{div}(A_2\nabla u)$ avec $A_2^T = -A_2$ et $\|A_2\|_{L^\infty(\Omega)}$ petit. Les arguments principaux reposent sur le fait que $-\Delta$ réalise un isomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p}(\Omega)$ (qui est par définition le dual topologique de $W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $1/p + 1/q = 1$) et le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Une autre démonstration de portée plus générale se trouve par exemple dans [7] (Chapitre 6). Elle est basée sur l'inégalité de Caccioppoli et l'injection de Sobolev qui permettent d'établir une inégalité de Hölder inversée sur $|\nabla u|^2$. Un résultat général d'intégration appelé Lemme de Gehring montre alors que toute fonction satisfaisant une telle propriété possède une meilleure intégrabilité (voir [7, Theorem 6.6]).

Il s'agit d'un résultat de portée très générale qui peut se généraliser dans beaucoup de situations notamment pour les EDP elliptiques non linéaires, pour des problèmes variationnels et les problèmes vectoriels.

Un résultat dû à Stampacchia assure que la solution d'une EDP elliptique du second ordre sous forme divergence est toujours bornée.

Théorème 4.3.2 (Stampacchia). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ $(p > N/2)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Si u est l'unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$ de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Deux démonstrations sont accessibles, toutes deux reposant sur l'inégalité de Caccioppoli qui permet de contrôler $\|\nabla u\|_{L^2(B_{R/2})}$ par $\|u\|_{L^2(B_R)}$ pour toute boule $B_R \subset \Omega$. La première preuve basée sur des itérations de Moser qui consiste à combiner l'inégalité de Caccioppoli et l'injection de Sobolev pour contrôler la norme L^q de u (pour tout $q < \infty$), en prenant comme fonctions tests des puissances de la solution (voir [5, Proposition 8.20]). La deuxième démonstration due à De Giorgi consiste à travailler plutôt sur les ensembles de niveaux de la solution (voir [5, Theorem 8.13]). Dans les deux cas, il s'agit d'une approche scalaire qui se généralise mal pour les problèmes vectoriels.

Les techniques développées précedemment peuvent encore être rafinée pour montrer une inégalité de Harnack permettant de contrôler l'oscillation de la solution faible sur des boules. En découle alors un résultat de régularité Höldérienne obtenu indépendamment par Nash (pour les équations paraboliques, mais la philosophie est la même) et par De Giorgi (voir [5, Chapter 8]).

Théorème 4.3.3 (De Giorgi, Nash, Moser). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ $(p > N/2)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Si u est l'unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$ de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

On renvoit au livre [5] pour une approche générale de ce type de résultats de régularité. Remarquons qu'on ne fait aucune hypothèse de régularité sur les coefficients a_{ij} excepté leur mesurabilité, ce qui rend le résultat spectaculaire. Le théorème de De Giorgi-Nash-Moser est particulièrement célèbre pour deux raisons. D'abord parce qu'il clôt la résolution du XIXe problème de Hilbert, qui concerne la régularité des solutions de problèmes variationnels, et ensuite parce que le peu d'hypothèses sur la matrice A permet de traiter des versions non linéaires de cette équation.