Chapitre 5

Equations non linéaires sous forme divergence

5.1 Théorèmes de points fixes

Commençons par rappeler un résultat classique d'existence et d'unicité de point fixe pour des applications contractantes.

Théorème 5.1.1 (**Point fixe de Banach, Picard).** *Soit* (X, d) *un espace métrique complet et* $f : X \to X$ *une application contractante, i.e., il existe un constante* $0 < K < 1$ *telle que*

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y) \quad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

Alors, f *admet un unique point fixe* $\bar{x}$ *dans* X*, i.e.,*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Nous allons à présent établir deux nouveaux théorèmes de point fixe, l'un en dimension finie (le théorème de Brouwer) et l'autre en dimension infinie (le théorème de Schauder) qui permettrons de montrer l'existence de solutions à des EDP elliptiques semi-linéaires.

Théorème 5.1.2 (**Point fixe de Brouwer).** *Soient* K *un ensemble compact et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une fonction continue. Alors* f *admet un point fixe dans* K*.*

Démonstration. **Etape 1 : On se ramène au cas où K est une boule fermée.** Supposons le résultat vrai dans le cas des boules fermées. Considérons alors un convexe compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction continue $f : K \to K$. Comme K est borné, il existe une boule fermée B telle que $K \subset B$. On définit $g = f \circ P_K$ où P_K est la projection orthogonale sur le convexe fermé K. On a alors que $g : B \to K \subset B$ est continue comme composée d'applications continues. Par conséquent, il existe un $\bar{x} \in B$ tel que $f(P_K(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}$. Comme f prend ses valeurs dans K, alors nécessairement $\bar{x} \in K$ et $P_K(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Sans restreindre la généralité, on peut également supposer que B est la boule unité fermée.

Etape 2 : On se ramène au cas où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. En effet, comme dans l'étape 1, si $f : B \to B$ est une fonction continue, posons $g = f \circ P_B$ où P_B est la projection orthogonale sur la boule fermée B. Alors $g : \mathbb{R}^n \to B$ est continue comme composée de fonctions continues. Il existe alors un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(P_B(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}$. Comme f prend ses valeurs dans B, alors $\bar{x} \in B$ et $P_B(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Etape 3 : On se ramène au cas où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. En effet, si $f : \mathbb{R}^n \to B$ est une fonction continue, on pose $f_\varepsilon := f * \rho_\varepsilon$, où ρ_ε est un noyau régularisant. Les propriétés classiques de la convolution montrent que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $|f_\varepsilon| \leq 1$. De plus f étant continue, on a que $f_\varepsilon \to f$ uniformément sur tout compact. Soit $x_\varepsilon \in B$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Comme B est une boule fermée donc un compact, il existe une sous-suite $x_{\varepsilon_j} \to \bar{x} \in B$. Comme $f_{\varepsilon_j} \to f$ uniformément sur B, alors $f_{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}) \to f(\bar{x})$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Nous supposons par contradiction que f n'admet pas de point fixe sur B, de sorte que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B$. Comme f prend ses valeurs dans B, on a en fait que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Etape 4 : Construction d'une rétraction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de B dans ∂B. Construisons une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \partial B$ telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in \partial B$. On considère la demi-droite d'extrémité $f(x)$ et qui est dirigée par le vecteur $x - f(x)$. Cette demi-droite coupe la sphère ∂B en un unique point noté $g(x)$. Il est clair par construction que g est à valeurs dans ∂B et que

$$g(x) = x \quad \text{si } x \in \partial B.$$

Par définition de g, il existe un nombre $\lambda_x \geq 0$ tel que $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$. Ce nombre s'obtient en résolvant l'équation du second degré

$$1 = |g(x)|^2 = |f(x)|^2 + 2\lambda f(x) \cdot (x - f(x)) + \lambda^2 |x - f(x)|^2,$$

et en prenant la racine positive. Le calcul du discriminant donne

$$\Delta_x = \big(f(x) \cdot (x - f(x))\big)^2 + (1 - |f(x)|^2)|x - f(x)|^2 \geq 0$$

car $|f(x)| \leq 1$. On obtient donc que

$$\lambda_x = \frac{-f(x) \cdot (x - f(x)) + \sqrt{\big(f(x) \cdot (x - f(x))\big)^2 + (1 - |f(x)|^2)|x - f(x)|^2}}{|x - f(x)|^2}$$

et que $x \mapsto \lambda_x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que g est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Notons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\Delta_x \geq \delta$ pour tout $x \in B$. En effet, comme $x \mapsto \Delta_x$ est continue sur le compact B elle atteint son minimum en un point $x_0 \in B$. Si $\Delta_{x_0} = 0$, alors on aurait $|f(x_0)| = 1$ et $x_0 \cdot f(x_0) = 1$ ce qui impliquerait que $x_0 = f(x_0)$ qui est impossible. Par conséquent, en posant $\delta = \Delta_{x_0} = \min_{x \in B} \Delta_x$, on constate effectivement que $\Delta_x \geq \delta$ pour tout $x \in B$. On déduit de cela que la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathring{B}$, donc que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathring{B})$ et, de plus,

$$c := \max_B |\nabla g| < +\infty.$$

Etape 5. Pour tout $0 \leq t \leq 1$ et pour tout $x \in B$, on pose

$$\varphi_t(x) = (1 - t)x + tg(x)$$

de sorte que $\varphi_0(x) = x$ et $\varphi_1(x) = g(x)$. Montrons que si $0 < t < 1/(1 + c)$, alors φ_t réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{B}$ sur $\mathring{B}$.

Tout d'abord, notons que l'on a toujours $\varphi_t(B) \subset B$ car si $x \in B$, alors $g(x) \in \partial B \subset B$ et par convexité de B, $\varphi_t(x) = (1 - t)x + tg(x) \in B$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout x, $y \in B$,

$$|g(x) - g(y)| \leq c|x - y|.$$

Comme

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| \geq (1 - t)|x - y| - t|g(x) - g(y)| \geq ((1 - t) - ct)|x - y|,$$

on en déduit que φ_t est injective dès que $0 \leq t < 1/(1+c)$. Comme φ_t est l'identité sur ∂B, il vient que $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$.

On remarque également que pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, on a

$$\nabla\varphi_t = (1-t)I + t\nabla g = (1-t)\left(I + \frac{t}{1-t}\nabla g\right)$$

avec

$$\frac{t}{1-t}|\nabla g| \leq \frac{ct}{1-t} < 1.$$

Par conséquent, pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, $\nabla\varphi_t(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathring{B}$ et le théorème d'inversion globale montre que φ_t réalise un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme de $\mathring{B}$ sur son image $\varphi_t(\mathring{B})$ qui est donc ouverte.

Montrons que φ_t est surjective en supposant par l'absurde que $\varphi_t(\mathring{B}) \neq \mathring{B}$. Il existe donc $y \in \mathring{B} \setminus \varphi_t(\mathring{B})$. Soit $y_0 \in \varphi_t(\mathring{B})$ et posons

$$\lambda_0 := \inf\{\lambda \geq 0 : \ y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y \notin \varphi_t(\mathring{B})\}.$$

Comme $\varphi_t(\mathring{B})$ est ouvert, on a $\lambda_0 > 0$. On a aussi $\lambda_0 \leq 1$ car $y \notin \varphi_t(\mathring{B})$. Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, on a que $y_{\lambda_0 - 1/k} \in \varphi_t(\mathring{B})$ ce qui implique l'existence d'un $x_k \in \mathring{B}$ tel que $\varphi_t(x_k) = y_{\lambda_0-1/k}$. Comme B est compacte, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_k \to x_0 \in B$ et par continuité de φ_t, on a $\varphi_t(x_0) = y_{\lambda_0}$. Il vient alors que $x_0 \notin \partial B$ car sinon, on aurait $x_0 = y_{\lambda_0} \in \partial B$ et, par convexité le segment $[y_0, y] \subset \mathring{B}$. Par conséquent, $x_0 \in \mathring{B}$ et donc $\varphi_t(\mathring{B})$ est un voisinage de y_{λ_0}. On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $y_\lambda \in \varphi_t(\mathring{B})$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon]$, ce qui contredit la définition de λ_0 comme borne inférieure.

Etape 6. Comme

$$t \mapsto \det(\nabla\varphi_t(x)) = a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_n(x)t^n$$

est une fonction polynômiale de degré n par rapport à t, on en déduit que $P : t \mapsto \int_B \det(\nabla\varphi_t(x))\,dx$ est également une fonction polynômiale. Par ailleurs, du fait que $\nabla\varphi_t = (1-t)I + t\nabla g \to I$ uniformément sur B, alors $\det(\nabla\varphi_t) \to 1$ uniformément sur B ce qui montre l'existence d'un $t_0 < 1/(1+c)$ tel que pour tout $0 < t < t_0$ et tout $x \in B$, on a $\det(\nabla\varphi_t(x)) > 0$. D'après la formule de changement de variables, on a alors que pour tout $0 < t < t_0$,

$$|\mathring{B}| = |\varphi_t(\mathring{B})| = \int_B \det(\nabla\varphi_t(x))\,dx = P(t),$$

ce qui montre que le polynôme P est constant sur $]0, t_0[$ et donc constant sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$|\mathring{B}| = P(1) = \int_B \det(\nabla\varphi_1(x))\,dx = \int_B \det(\nabla g(x))\,dx.$$

Par ailleurs, s'il existait un $x \in B$ tel que $\det(\nabla g(x)) \neq 0$, le théorème d'inversion locale montrerait que g réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de x et donc que l'image de g ne serait pas d'intérieur vide, ce qui est absurde puisque g prend ses valeurs dans la sphère ∂B. Par conséquent $\det(\nabla g) = 0$ sur B ce qui est impossible puisque $|B| \neq 0$. On en déduit finalement que f admet au moins un point fixe dans B. $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'étendre ce dernier résultat en dimension infinie.

Théorème 5.1.3 (Point fixe de Schauder). *Soient E un espace de Banach, K un sous ensemble compact et convexe de E et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe dans K.*

Démonstration. L'idée consiste à se ramener au point fixe de Brouwer par approximation. Soit $\varepsilon > 0$, par compacité de K, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \dots, x_n \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Notons que $\sum_{i=1}^n \mathrm{dist}(x, B(x_i,\varepsilon)^c) > 0$ pour tout $x \in K$, car sinon on pourrait trouver un point $\bar{x} \in K$ tel que $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)^c = \left(\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)\right)^c$ ce qui est impossible. On peut alors définir pour tout $x \in K$,

$$\alpha_i^\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, B(x_i,\varepsilon)^c)}{\sum_{j=1}^n \mathrm{dist}(x, B(x_j,\varepsilon)^c)} \geq 0.$$

Les fonctions α_i^ε sont continues sur K et $\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in K$. On pose $J_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) x_i$ pour tout $x \in K$. Pour tout $x \in K$, on a alors

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x)(x_i - x)\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x)\|x_i - x\|.$$

Si $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$, alors $x \in B(x_i,\varepsilon)$, par conséquent,

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) = \varepsilon. \tag{5.1.1}$$

En notant $K_\varepsilon := \overline{\mathrm{conv}}\{x_1, \dots, x_n\}$ l'enveloppe convexe fermée de $\{x_1, \dots, x_n\}$, on a que $K_\varepsilon \subset K$ car K est convexe et fermé. De plus K_ε est convexe et compact car c'est un sous ensemble borné de $\mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E dimension finie.

Comme J_ε est continue, alors $f_\varepsilon := J_\varepsilon \circ f : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ est également continue. Le théorème du point fixe de Brouwer assure alors l'existence d'un $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Du fait que $K_\varepsilon \subset K$ et K est compact, on peut extraire une sous-suite (x_{ε_j}) et trouver un point $\bar{x} \in K$ tels que $x_{\varepsilon_j} \to \bar{x}$. On en déduit alors que

$$\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leftarrow \|f(x_{\varepsilon_j}) - x_{\varepsilon_j}\| = \|f(x_{\varepsilon_j}) - J_{\varepsilon_j}(f(x_{\varepsilon_j}))\| \leq \varepsilon_j \to 0,$$

ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. □

Il sera parfois utile d'utiliser la version suivante du point fixe de Schauder.

Corollaire 5.1.4. *Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné et $f : C \to C$ une fonction continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact. Alors f admet un point fixe dans C.*

Démonstration. L'ensemble $A := \overline{f(C)}$ est compact par hypothèse, mais il n'est pas convexe. On considère alors l'enveloppe convexe fermée $K := \overline{\mathrm{conv}}(A)$ de A. Nous admettons temporairement que K est compact. Comme $f(C) \subset C$, alors $A = \overline{f(C)} \subset C$ car C est fermé, puis $K \subset C$ car C est convexe et fermé. Par conséquent, $f : K \to K$ et le théorème du point fixe de Schauder montre l'existence d'un point fixe de f dans $K \subset C$.

Il reste à montrer que K est compact. Soit $\varepsilon > 0$, comme A est compact, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \dots, x_m \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon/2) = \{x_1, \dots, x_m\} + B(0, \varepsilon/2).$$

Par conséquent,

$$K \subset \overline{\text{conv}}\{x_1, \ldots, x_m\} + \overline{B}(0, \varepsilon/2).$$

Comme $\overline{\text{conv}}\{x_1, \ldots, x_m\}$ est un sous ensemble convexe fermé de $\text{Vect}\{x_1, \ldots, x_m\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $\overline{\text{conv}}\{x_1, \ldots, x_m\}$ est convexe et compact. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $y_1, \ldots, y_n \in \overline{\text{conv}}\{x_1, \ldots, x_m\}$ tels que

$$\overline{\text{conv}}\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon/2) = \{y_1, \ldots, y_n\} + B(0, \varepsilon/2).$$

On en déduit alors

$$K \subset \{y_1, \ldots, y_n\} + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon),$$

ce qui montre que K est précompact et donc compact. □

5.2 Equations semi-linéaires

Le théorème du point fixe de Schauder permet de montrer l'existence de solutions d'EDP elliptiques *semi-linéaires*, i.e. d'EDP non linéaires mais dont la partie principale est linéaire par rapport à u. On considère tout d'abord l'EDP sous forme divergence suivante :

$$\begin{cases} -\text{div}(A\nabla u) = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Le terme principal de cette équation $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u(x)$ est effectivement linéaire par rapport à u.

On rappelle tout d'abord la définition et quelques propriétés des *fonctions de Carathéodory.*

Définition 5.2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si $f(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^m$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $f(\cdot, z)$ est mesurable sur Ω pour tout $z \in \mathbb{R}^m$.

Lemme 5.2.2. *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $w : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. Alors la fonction $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable.*

Démonstration. La fonction w étant mesurable, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge vers w p.p. sur Ω. On peut alors trouver $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}^m$ et des ensembles mesurables $A_1, \ldots, A_k \subset \Omega$ deux à deux disjoints tels que

$$w_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Par conséquent, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$f(x, w_n(x)) = \sum_{i=1}^{k} f(x, \alpha_i)\chi_{A_i}(x).$$

La fonction f étant de Carathéodory, on a que $x \mapsto f(x, \alpha_i)$ est mesurable. Par suite, $x \mapsto f(x, w_n(x))$ est mesurable comme produit et somme de fonctions mesurables. Comme $w_n(x) \to w(x)$, et $f(x, \cdot)$ est continue presque pour tout $x \in \Omega$, on en déduit que $f(x, w_n(x)) \to f(x, w(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$, ce qui montre que $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable comme limite p.p. de fonctions mesurables. □

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;

(H_2) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$ telle que $|f(x,s)| \leq a(x)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et presque pour tout $x \in \Omega$.

(H_3) Pour tout $1 \leq i,j \leq N$, les fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 5.2.3. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), il existe une solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ de (5.2.1), i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x))w(x)\,dx \quad \textit{pour tout } w \in H^1_0(\Omega).$$

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder. Pour ce faire, on considère l'application $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ qui à $u \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution $v = T(u) \in H^1_0(\Omega)$ de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H^1_0(\Omega).$$

L'existence et l'unicité de v découle du théorème de Lax-Milgram puisque la fonction $x \mapsto f(x,u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$ d'après le Lemme 5.2.2 et l'hypothèse (H_2).

En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, en utilisant les hypothèses (H_2), (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\,dx \leq \|a\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite, l'inégalité de Poincaré donne

$$\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|a\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui montre que

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R := \frac{C_\Omega\|a\|_{L^2(\Omega)}}{\lambda}.$$

En notant $K := \{v \in H^1_0(\Omega) : \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R\}$, nous avons montré que $T : L^2(\Omega) \to K$. Par ailleurs, l'ensemble K est convexe et le théorème de Rellich montre que K est compact dans $L^2(\Omega)$.

Il reste à montrer que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est continue. Pour ce faire, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et on note $v_n := T(u_n) \in H^1_0(\Omega)$. L'argument précédent montre que $\|v_n\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$. On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$\begin{array}{lll} v_{\sigma(n)} & \rightharpoonup v & \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega), \\ v_{\sigma(n)} & \to v & \text{fortement dans } L^2(\Omega), \\ u_{\sigma(n)} & \to u & \text{p.p. sur } \Omega. \end{array}$$

Comme f est une fonction de Carathéodory, on a que $f(x,u_{\sigma(n)}(x)) \to f(x,u(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$ et l'hypothèse (H_2) montre que $|f(x,u_{\sigma(n)}(x))| \leq a(x)$ p.p. tout $x \in \Omega$ avec $a \in L^2(\Omega)$.

Le théorème de la convergence dominée montre alors que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre que T est continue sur $L^2(\Omega)$.

Nous avons donc montré que $T : K \to K$ est continue et que K est sous ensemble un convexe et compact de $L^2(\Omega)$. Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence d'un point fixe $u \in K$ de T dans K, i.e., $T(u) = u$, autrement dit

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

□

On peut aussi considérer un problème un peu plus général en autorisant f de dépendre de ∇u. On s'intéresse alors à l'EDP suivante.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Pour ce faire on rajoute l'hypothèse suivante :

(H_2') $f : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$, $b > 0$ et $0 < \beta < 1$ tels que $|f(x, s, \xi)| \leq a(x) + b(|s|^\beta + |\xi|^\beta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et presque pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 5.2.4. *Sous les hypothèses* (H_1), (H_2') *et* (H_3), *il existe une solution faible* $u \in H_0^1(\Omega)$ *de* (5.2.2), *i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\, dx \quad \textit{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On définit l'application $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ par $v = T(u)$, où $v \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Notons que v est unique car $x \mapsto f(x, u(x), \nabla u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$. En effet, d'après le Lemme 5.2.2, cette fonction est mesurable, et d'après l'hypothèse (H_2'), on a

$$|f(x, u(x), \nabla u(x))| \leq a(x) + b(|u(x)|^\beta + |\nabla u(x)|^\beta) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega.$$

Comme la fonction $a + b(|u|^\beta + |\nabla u|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (car $\beta < 1$ et Ω est borné), on en déduit que $f(\cdot, u, \nabla u) \in L^2(\Omega)$.

En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle et en utilisant les hypothèses (H_2'), (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))v(x)\,dx$$
$$\leq \Big(\|a\|_{L^2(\Omega)} + b(\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)}\Big)\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après les inégalité de Cauchy-Schwarz et Poincaré, on a

$$\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} \leq \big(\|u\|^\beta_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^\beta_{L^2(\Omega)}\big)|\Omega|^{(1-\beta)/2} \leq C\|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)}$$

où $C > 0$ ne dépend que de N, Ω et β. Par conséquent, en utilisant de nouveau l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_*(1 + \|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)}),$$

où $C_* > 0$ est une constante ne dépendant que λ, N, $\|a\|_{L^2(\Omega)}$, b, Ω et β. Comme $\beta < 1$, on peut trouver un $R > 0$ tel que $C_*(1 + R^\beta) \leq R$ de sorte que si $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$, alors $\|T(u)\|_{H^1_0(\Omega)} = \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$. Si C désigne la boule fermée dans $H^1_0(\Omega)$ centre 0 et rayon R (un ensemble convexe, fermé et borné), on a donc montré que $T : C \to C$.

Montrons que T est continue sur $H^1_0(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H^1_0(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1_0(\Omega)$ et on note $v_n := T(u_n)$. L'argument précédent montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ et donc, on peut extraire une sous-suite et trouver une fonction $v \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega).$$

Par ailleurs, la réciproque de la convergence dominée montre qu'on peut encore extraire des sous-suites et trouver des fonctions G et $H \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \to u \quad \text{p.p. sur } \Omega,\\ \nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u \quad \text{p.p. sur } \Omega,\\ |u_{\sigma(n)}| \leq G \quad \text{p.p. sur } \Omega,\\ |\nabla u_{\sigma(n)}| \leq H \quad \text{p.p. sur } \Omega.\end{cases}$$

La fonction f étant de Carathéodory, on en déduit que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ p.p. sur Ω. Par suite, l'hypothèse (H_2') montre que

$$|f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)})| \leq a + b(|G|^\beta + |H|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

car $\beta < 1$. Le théorème de la convergence dominée implique que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x), \nabla u_{\sigma(n)}(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H^1_0(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H^1_0(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $H^1_0(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre que T est continue sur $H^1_0(\Omega)$.

Montrons enfin que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C et $v_n := T(u_n) \in C$. Comme C est borné, on en déduit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc extraire des sous-suites et trouver des fonctions $u, v \in H_0^1(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Par ailleurs, le théorème de Rellich montre que

$$v_{\sigma(n)} \to v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{5.2.3}$$

En notant $h_n := f(\cdot, u_n, \nabla u_n)$ on déduit de (H_2') que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que

$$h_{\sigma(n)} \rightharpoonup h \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \tag{5.2.4}$$

(notons qu'à ce stade de la preuve, on n'a pas que $h = f(\cdot, u, \nabla u)$). Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x), \nabla u_{\sigma(n)}(x)) w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega h(x) w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $w = v_{\sigma(n)}$ comme fonction test, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla v_{\sigma(n)}(x)\, dx &= \int_\Omega h_{\sigma(n)}(x) v_{\sigma(n)}(x)\, dx \\ &\to \int_\Omega h(x) v(x)\, dx = \int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)\, dx, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (5.2.3), (5.2.4). D'après la propriété de coercivité (H_3), on a donc

$$\lambda \int_\Omega |\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)}|^2\, dx \le \int_\Omega A(\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)}) \cdot (\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)})\, dx \to 0$$

ce qui montre que $\nabla v_{\sigma(n)} \to \nabla v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, ou encore $T(u_{\sigma(n)}) \to T(v)$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Ceci montre que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous sommes alors en mesure d'appliquer le Corollaire 5.1.4 qui montre que l'application T admet un point fixe dans C. Il existe donc un $u \in C \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $T(u) = u$, i.e.,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) w(x)\, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

□

L'exemple suivant montre que l'hypothèse $\beta < 1$ dans (H_2') est optimale.

Exemple 5.2.5. Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet sur le bord. On rappelle que λ_1 peut être calculée en considérant le problème de minimisation du quotient de Rayleigh

$$\lambda_1 = \min\left\{ \int_\Omega |\nabla\varphi|^2\, dx : \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}.$$

Soit $\varphi_1 \in H^1_0(\Omega)$ une solution de ce problème. Notons que comme $\varphi_1 \in H^1_0(\Omega)$, alors $|\varphi_1| \in H^1_0(\Omega)$ et $\nabla|\varphi_1| = \nabla\varphi_1\chi_{\varphi_1\geq 0} - \nabla\varphi_1\chi_{\varphi_1<0}$ de sorte que $|\nabla|\varphi_1|| = |\nabla\varphi_1|$. Quitte à remplacer φ_1 par $|\varphi_1|$, on peut donc toujours supposer que $\varphi_1 \geq 0$ p.p. sur Ω. La fonction propre φ_1 est solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla v\, dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 v\, dx \qquad \text{pour tout } v \in H^1_0(\Omega). \tag{5.2.5}$$

Posons, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f(s) = 1 + \lambda_1 s$ et supposons que $u \in H^1_0(\Omega)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

i.e.,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f(u)v\, dx = \int_\Omega v\, dx + \lambda_1 \int uv\, dx \qquad \text{pour tout } v \in H^1_0(\Omega). \tag{5.2.6}$$

En prenant $v = u$ dans (5.2.5) et $v = \varphi_1$ dans (5.2.6), on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla u\, dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u\, dx, \qquad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_1\, dx = \int_\Omega \varphi_1\, dx + \lambda_1 \int u\varphi_1\, dx,$$

ce qui implique que $\int_\Omega \varphi_1\, dx = 0$, ou encore que $\varphi_1 = 0$, ce qui est impossible.

En général, il n'y a aucune raison pour que l'unicité ait lieu. Terminons cette section par un exemple de critère assurant l'unicité des solutions.

Théorème 5.2.6. *On suppose, en plus de (H_1), (H_2) et (H_3), que la fonction $s \mapsto f(x,s)$ est décroissante pour presque tout $x \in \Omega$. Alors, il existe une unique solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ de (5.2.1), i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\, dx \qquad \textit{pour tout } w \in H^1_0(\Omega).$$

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Comme $v = u_1 - u_2 \in H^1_0(\Omega)$ est une fonction test, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(x)\nabla u_1 \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx &= \int_\Omega f(x, u_1)(u_1 - u_2)\, dx, \\ \int_\Omega A(x)\nabla u_2 \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx &= \int_\Omega f(x, u_2)(u_1 - u_2)\, dx. \end{aligned}$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, il vient,

$$\int_\Omega A(x)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\, dx = \int_\Omega (f(x, u_1) - f(x, u_2))(u_1 - u_2)\, dx \leq 0,$$

d'après l'hypothèse de décroissance de f. En utilisant la propriété de coercivité (H_3) de A, on en déduit que

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2\, dx \leq 0,$$

ce qui montre que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. sur Ω. Enfin, l'inégalité de Poincaré implique que $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, et donc que $u_1 = u_2$ p.p. sur Ω. $\square$

5.3 Equations quasi-linéaires

Une EDP est dite *quasi-linéaire* si elle est non linéaire, mais linéaire par rapport aux dérivées d'ordre maximal. On s'intéresse ici aux EDP elliptiques *quasi-linéaires* du second ordre sous forme divergence dont la forme la plus générale est la suivante :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\, a(x,u,\nabla u) = f(x,u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notons que le terme principal, donné par $\sum_{i,j=1}^N \partial_{\xi_j} a_i(x,u,\nabla u)\partial^2_{ij} u$, est bien linéaire par rapport à $D^2 u$.

Quand $a(x,u,\nabla u) = A(x,u)\nabla u$ est linéaire par rapport à ∇u, on sait encore prouver l'existence de solutions à l'aide du théorème de Schauder, sous l'hypothèse que les coefficients $a_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la matrice A sont des fonctions de Carathéodory satisfaisant la condition suivante : il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $\Lambda > 0$ telles que

$$\lambda|\xi|^2 \leq A(x,s)\xi \cdot \xi \leq \Lambda|\xi|^2$$

pour tout $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et p.p. tout $x \in \Omega$. Dans le cas général, nous allons utiliser une méthode de Galerkin en considérant un problème approché en dimension finie et faire une hypothèse de monotonie sur la dépendance de a en ∇u.

Nous allons nous intéresser aux EDP de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\, a(x,u,\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

i.e., on suppose que le second membre f est indépendant de u et ∇u. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;

(H_2) $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un opérateur de *Leray-Lions* :

- (a) pour tout $1 \leq i \leq N$, $a_i : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory ;
- (b) (Coercivité) il existe $\lambda > 0$ et $1 < p < \infty$ tels que

$$a(x,s,\xi) \cdot \xi \geq \lambda|\xi|^p \quad \text{pour tout } (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x \in \Omega;$$

- (c) (Croissance) il existe $\Lambda > 0$ tel que

$$|a(x,s,\xi)| \leq \Lambda(1 + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \quad \text{pour tout } (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x \in \Omega;$$

- (d) (Monotonie) pour tout $s \in \mathbb{R}$, ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^N$ et p.p. tout $x \in \Omega$,

$$(a(x,s,\xi_1) - a(x,s,\xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq 0;$$

(H_3) $f \in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Remarque 5.3.1. 1. L'hypothèse de monotonie est satisfaite par exemple dans le cas où $a(x,s,\xi) = DW(\xi)$ où $W : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ et DW désigne la différentielle de W (voir le Chapitre 6). En effet, si ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^N$ et $t \in]0,1[$, alors par convexité de W,

$$W(\xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1)) = W(t\xi_2 + (1-t)\xi_1) \leq tW(\xi_2) + (1-t)W(\xi_1).$$

Par conséquent,
$$\frac{W(\xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1)) - W(\xi_1)}{t} \le W(\xi_2) - W(\xi_1),$$
puis par passage à la limite quand $t \to 0$,
$$DW(\xi_1) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \le W(\xi_2) - W(\xi_1).$$
En inversant les rôles de ξ_1 et ξ_2, on obtient aussi
$$DW(\xi_2) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \le W(\xi_1) - W(\xi_2),$$
ce qui implique, en sommant les deux inégalités
$$(DW(\xi_2) - DW(\xi_1)) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \ge 0.$$

2. Quand $W(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p$, alors $DW(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ et l'équation
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
est celle du *p-Laplacien.*

Commençons par établir un résultat sur les opérateurs coercifs en dimension finie.

Lemme 5.3.2. *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et coercive, i.e.,*
$$\frac{T(u) \cdot u}{|u|} \to +\infty \text{ quand } |u| \to +\infty.$$
Alors T est surjectif, i.e., pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, il existe un $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(u) = b$.

Démonstration. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Nous allons nous ramener au théorème du point fixe de Brouwer. Soit B_R la boule fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$. Il s'agit clairement d'un compact convexe. La projection orthogonale $P_R : \mathbb{R}^n \to B_R$ est donnée par
$$P_R(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \le R, \\ R\frac{u}{|u|} & \text{si } |u| > R \end{cases}$$
et elle est caractérisée par
$$(u - P_R(u)) \cdot (v - P_R(u)) \le 0 \quad \text{pour tout } v \in B_R.$$

On définit la fonction $T_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par
$$T_R(u) := P_R(u - T(u) + b) \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^n.$$
Clairement T_R est continue comme composée de fonctions continues et $T_R : B_R \to B_R$. Le théorème de Brouwer montre donc que T_R admet un point fixe, noté u_R, dans B_R. D'après la caractérisation de la projection orthogonale, on a donc
$$(u_R - T(u_R) + b - P_R(u_R - T(u_R) + b)) \cdot (v - P_R(u_R - T(u_R) + b)) \le 0 \quad \text{pour tout } v \in B_R.$$
En utilisant le fait que $P_R(u_R - T(u_R) - b) = T_R(u_R) = u_R$, il vient que
$$(b - T(u_R)) \cdot (v - u_R) \le 0 \quad \text{pour tout } v \in B_R. \tag{5.3.2}$$

En prenant $v = 0 \in B_R$, on obtient

$$T(u_R) \cdot u_R \leq b \cdot u_R \leq |b||u_R|$$

et la propriété de coercivité implique que $|u_R| \leq C$, où $C > 0$ est une constante indépendante de R. Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, on peut trouver un $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u_R \to u$ quand $R \to +\infty$. Comme T est continue, $T(u_R) \to T(u)$ et par passage à la limite dans (5.3.2), il vient

$$(b - T(u)) \cdot (v - u) \leq 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que $T(u) = b$. □

En fixant une base, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 5.3.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $T : E \to E'$ un opérateur continu et coercif, i.e.,*

$$\frac{\langle T(u), u\rangle_{E',E}}{\|u\|_E} \to +\infty \quad \textit{quand } \|u\|_E \to +\infty.$$

Alors, pour tout $b \in E'$, il existe un $u \in E$ tel que $T(u) = b$.

Théorème 5.3.4. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), il existe une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (5.3.1), i.e.,*

$$\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x) w(x)\, dx \quad \textit{pour tout } w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration. La démonstration est basée sur une méthode de Galerkin qui consiste à approcher le problème en un problème posé en dimension finie, puis en faisant tendre la dimension vers l'infini.

Etape 1 : définition d'un opérateur. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fixé. Alors p.p. tout $x \in \Omega$, on a d'après l'hypothèse de croissance

$$|a(x, u(x), \nabla u(x))| \leq \Lambda(1 + |u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}),$$

ce qui montre que $a(\cdot, u, \nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$. Par conséquent, l'application linéaire

$$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \langle A(u), v\rangle = \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v\, dx$$

est continue car, d'après les inégalités de Hölder et de Poincaré

$$|\langle A(u), v\rangle| \leq \Lambda \left(|\Omega|^{1-1/p} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right) \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(1 + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right) \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Par conséquent, $A(u)$ définit un élément du dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$ noté $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Montrons que $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est un opérateur continu. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après la réciproque de la convergence dominée, on peut extraire une sous-suite notée $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver des fonctions G et $H \in L^p(\Omega)$ telles que $u_{\sigma(n)} \to u$, $\nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u$, $|u_{\sigma(n)}| \leq G$ et $|\nabla u_{\sigma(n)}| \leq H$ p.p. sur Ω. Comme a est une fonction de Carathéodory, on a que $a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to a(\cdot, u, \nabla u)$ p.p. sur Ω et d'après la propriété de croissance, $|a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)})| \leq \Lambda(1 + |G|^{p-1} + |H|^{p-1}) \in L^{p'}(\Omega)$. Par convergence dominée, on en déduit que $a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to a(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ et comme la limite est indépendante de la sous-suite, on a en fait que toute la suite $a(\cdot, u_n, \nabla u_n) \to a(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq 1$, on a par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\langle A(u_n) - A(u), v\rangle &= \int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla v \, dx \\ &\leq \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par passage au sup parmi tous les v, on obtient que

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0,$$

ce qui montre bien que A est continu.

Montrons enfin que A est coercive. En effet, d'après la propriété de coercivité,(H_2)-b, on a

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \geq \lambda \frac{\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \lambda \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Comme $p > 1$, on en déduit que

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \to +\infty \quad \text{quand } \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty,$$

ce qui montre que A est coercive.

Etape 2 : problème approché en dimension finie. Nous allons nous ramener à un problème en dimension finie. En effet, comme $1 < p < \infty$, alors l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable ce qui signifie qu'il contient un ensemble dénombrable dense $D = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On note $E_n = \mathrm{vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $W_0^{1,p}(\Omega)$ de dimension finie et

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\bigcup_{n=1}^\infty E_n}. \tag{5.3.3}$$

Pour tout $u \in E_n$, on pose $T_n = A|_{E_n}$. Alors $T_n : E_n \to E_n'$ est continu et coercif d'après l'étape 1. Comme $f \in L^{p'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \subset E_n'$, le Corollaire 5.3.3 montre l'existence d'un $u_n \in E_n$ tel que $T_n(u_n) = f$, i.e.

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx \quad \text{pour tout } w \in E_n. \tag{5.3.4}$$

Etape 3 : estimations a priori. D'après la propriété de coercivité et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\lambda \|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} &\leq \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \, dx = \langle T_n(u_n), u_n\rangle_{E_n', E_n} \\ &= \langle f, u_n\rangle_{E_n', E_n} = \int_\Omega f u_n \, dx \leq \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient que

$$\|\nabla u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\lambda} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par ailleurs, d'après la propriété de croissance, on a que

$$\|a(x,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \Lambda\left(|\Omega|^{1-1/p} + \|u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right)$$

ce qui montre également que la suite $(a(\cdot,u_n,\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$.

Comme $1<p<\infty$, alors on a aussi que $1<p'<\infty$. Par conséquent $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont des espaces réflexifs. On peut alors extraire une sous-suite, notée $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver des fonctions $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\xi\in L^{p'}(\Omega)$ telles que $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $a(\cdot,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)}) \rightharpoonup \xi$ faiblement dans $L^{p'}(\Omega)$.

Etape 4 : passage à la limite. Soit $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après (5.3.3), il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n\in E_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $v_n\to v$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En prenant $w=v_{\sigma(n)}$ comme fonction test dans (5.3.4), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla v_{\sigma(n)}\,dx = \int_\Omega f v_{\sigma(n)}\,dx$$

puis par passage à la limite quand $n\to+\infty$,

$$\int_\Omega \xi\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \quad \text{pour tout } v\in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{5.3.5}$$

En particulier, comme $u_{\sigma(n)}\rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla u_{\sigma(n)}\,dx = \int_\Omega f u_{\sigma(n)}\,dx \to \int_\Omega f u\,dx = \int_\Omega \xi\cdot\nabla u\,dx.$$

Nous allons utiliser l'*astuce de Minty* basée sur la propriété de monotonie pour montrer que $\mathrm{div}\xi = \mathrm{div}a(\cdot,u,\nabla u)$. Pour ce faire, on remarque que la propriété de monotonie implique que

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_\Omega [a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)}) - a(x,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)})]\cdot[\nabla u_{\sigma(n)} - \nabla v_{\sigma(n)}]\,dx \\
&= \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla u_{\sigma(n)}\,dx - \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla v_{\sigma(n)}\,dx \\
&- \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)})\cdot\nabla u_{\sigma(n)}\,dx + \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)})\cdot\nabla v_{\sigma(n)}\,dx \\
&=: I_1^n - I_2^n - I_3^n + I_4^n.
\end{aligned}$$

On a déjà vu que

$$I_1^n \to \int_\Omega \xi\cdot\nabla u\,dx, \quad I_2^n \to \int_\Omega \xi\cdot\nabla v\,dx.$$

Par ailleurs, $\nabla v_{\sigma(n)}) \to \nabla v$ fortement dans $L^p(\Omega)$ et, par le Théorème de Rellich $u_{\sigma(n)}\to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Comme a est une fonction de Carathéodory à croissance $p-1$, on en déduit que $a(\cdot,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)})\to a(\cdot,u,\nabla v)$ fortement dans $L^{p'}(\Omega)$. On en déduit que

$$I_4^n \to \int_\Omega a(x,u,\nabla v)\cdot\nabla v\,dx$$

mais aussi que

$$I_3^n \to \int_\Omega a(x,u,\nabla v)\cdot\nabla u\,dx$$

car $\nabla u_{\sigma(n)} \rightharpoonup \nabla u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$. En regroupant les quatre convergences ci-dessus, on en déduit que

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla v)] \cdot (\nabla u - \nabla v)\,dx \geq 0 \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En choisissant $v = u + \varepsilon w$ avec $\varepsilon > 0$ et $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla u + \varepsilon \nabla w)] \cdot \nabla w \leq 0.$$

Comme $u + \varepsilon w \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que $a(\cdot,u,\nabla u + \varepsilon \nabla w) \to a(\cdot,u,\nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Par conséquent,

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla u)] \cdot \nabla w \ \leq 0,$$

où encore, en changeant w en $-w$

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla u)] \cdot \nabla w \ = 0 \quad \text{pour tout } w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En reportant dans (5.3.5), on a établi que

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \quad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

La question de l'unicité est plus délicate à traiter. Quand la fonction a est indépendante de u, on a le résultat général suivant :

Proposition 5.3.5. *On suppose de plus que la fonction $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est indépendente de s et qu'elle est strictement monotone, i.e., pour tout ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^N$ avec $\xi_1 \neq \xi_2$ et p.p. tout $x \in \Omega$,*

$$(a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) > 0.$$

Alors, il existe une unique solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (5.3.1), i.e.,

$$\int_\Omega a(x,\nabla u(x)) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x) w(x)\,dx \quad \textit{pour tout } w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration. Considérons deux solutions u_1 et $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $v = u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une fonction test, on a, pour $i = 1, 2$,

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_i) \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx,$$

ce qui montre que

$$\int_\Omega [a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\,dx = 0.$$

Par l'hypothèse de monotonie, on sait que $[a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \geq 0$ p.p. sur Ω. Par conséquent, on a en fait que $[a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0$ p.p. sur Ω. On utilise maintenant l'hypothèse de stricte monotonie qui implique que nécessairement $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. sur Ω. Comme $u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré donne

$$\|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

soit $u_1 = u_2$ p.p. sur Ω. □

Dans le cas général où $a = a(x,s,\xi)$, on peut toujours démontrer l'unicité dans le cas $1 < p \leq 2$ sous des hypothèses de plus fortes de monotonie de a par rapport à ξ. Par contre, quand $p > 2$, la solution n'est en général pas unique (voir [2]).