Chapitre 6

Introduction au calcul des variations

6.1 La méthode directe en calcul des variations

Soit E un espace de Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle que l'on cherche à minimiser. L'idée de la méthode directe du calcul des variations consiste à considérer une suite minimisante. En effet, si l'on suppose que l'infimum

$$m := \inf_{u \in E} J(u)$$

est fini, la définition de l'infimum assure l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_{n \in E}$ d'éléments de E telle que $J(u_n) \to m$. Tout point d'accumulation (pour une topologie raisonnable) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors un candidat pour être un point de minimum. Se posent alors deux problèmes :

— la compacité de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

— montrer que si u est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $F(u) = m$.

Pour le problème de compacité, il est en général difficile d'obtenir de telles propriétés dans un espace de Banach général de dimension infini (penser au théorème d'Ascoli dans l'espace des fonctions continues, ou le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans les espaces de Lebesgue). Pour cette raison, nous privilègerons la convergence faible à la convergence forte (de la norme) car, au moins dans le cas où E est réflexif, nous savons que toute suite bornée admettra une sous-suite faiblement convergente. Quant à la bornitude de la suite minimisante, elle résultera généralement d'une propriété de coercivité de la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser.

En ce qui concerne le second problème, si l'on sait déjà que $u_n \to u$ en un certain sens, il suffit de montrer que $J(u) \leq \liminf_n J(u_n)$ ce qui nous conduit à la notion de semi-continuité inférieure.

Définition 6.1.1. On dit que J est *semi-continue inférieurement* (*sci*) au point $u \in E$ si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans E, alors

$$J(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(u_n).$$

On dit que J est sci sur E si elle est sci en tout point de E.

Il convient d'étendre cette définition pour la convergence faible.

Définition 6.1.2. On dit que J est *séquentiellement faiblement sci* en $u \in E$ si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E, on a

$$J(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(u_n).$$

On dit que J est séquentiellement faiblement sci sur E si elle est séquentiellement faiblement sci en tout point de E.

Remarque 6.1.3. On a clairement que si J est séquentiellement faiblement sci, alors J est sci. La réciproque est fausse : il suffit de prendre $J(u) = 1 - \|u\|^2$ pour tout $u \in H$ un espace de Hilbert séparable. Alors J est continue donc sci (pour la convergence forte). En revanche, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H, alors $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H et

$$J(0) = 1 > 0 = \liminf_{n\to+\infty} J(e_n).$$

Dans le cas convexe, les deux notions de semi-continuité inférieure coïncident. On rappelle la définition suivante.

Définition 6.1.4. Une fonction $J : E \to \mathbb{R}$ est *convexe* si

$$J(tu + (1-t)v) \le tJ(u) + (1-t)J(v), \qquad \text{pour tout } t \in [0,1] \text{ et tout } u, v \in E.$$

On dit que J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte dès lors que $u \neq v$ et $t \in]0,1[$.

Exemple 6.1.5.

1. les applications linéaires sont convexes ;
2. les normes $x \mapsto \|x\|$ sont convexes ;
3. dans un espace de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe car si $t \in]0,1[$ et $x \neq y$,

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y\|^2 - t\|x\|^2 - (1-t)\|y\|^2 &= t(t-1)\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y\rangle - t(1-t)\|y\|^2 \\ &= -t(1-t)\|x-y\|^2 < 0. \end{aligned}$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.1.6. *Soit $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et sci. Alors J est séquentiellement faiblement sci.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E. Si $\liminf_n J(x_n) = +\infty$, le résultat est évident. Si $\alpha := \liminf_n J(u_n) < +\infty$, on considère une suite décroissante $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\alpha_k \searrow \alpha$. Comme J est convexe et sci, l'ensemble $\{J \le \alpha_k\}$ est convexe et fermé. Par ailleurs, comme $\alpha_k > \alpha = \liminf_n J(u_n)$, il existe une sous-suite, notée $(u_{\sigma_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_{\sigma_k(n)} \in \{J \le \alpha_k\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $u \in \{J \le \alpha_k\}$. En effet, si $u \notin \{J \le \alpha_k\}$, d'après le théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique, on pourrait séparer strictement le convexe fermé non vide $\{J \le \alpha_k\}$ du convexe compact $\{u\}$. Il existerait donc un $L \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle L, u\rangle < \alpha < \langle L, v\rangle, \qquad \text{pour tout } v \in \{J \le \alpha_k\}.$$

En particulier pour $v = u_{\sigma_k(n)}$, on obtient que $\alpha < \langle L, u_{\sigma_k(n)}\rangle$, puis par passage à la limite quand $n \to +\infty$, $\alpha \le \langle L, u\rangle$, ce qui est absurde. Par conséquent, $J(u) \le \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui implique par passage à la limite quand $k \to +\infty$ que

$$J(u) \le \alpha = \liminf_{n\to+\infty} J(u_n),$$

ce qui montre que J est séquentiellement faiblement sci. □

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer un résultat général d'existence de solutions à des problèmes de minimisation.

Théorème 6.1.7 (Weierstrass). *Soient E un espace de Banach réflexif et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle est convexe, sci et coercive, i.e.,*

$$J(u) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_E \to +\infty.$$

Alors il existe un $\bar{u} \in E$ tel que $J(\bar{u}) \leq J(v)$ pour tout $v \in E$. Si de plus J est strictement convexe, alors le point de minimum $\bar{u}$ est unique.

Démonstration. Comme J ne prend que des valeurs finies, alors nécessairement,

$$m := \inf_E J < +\infty.$$

Soit (u_n) une suite minimisante, i.e., $J(u_n) \to m$. Si (pour une sous-suite) $\|u_n\|_E \to +\infty$, alors d'après la coercivité de J, on aurait que $J(u_n) \to +\infty$ ce qui est impossible puisque $J(u_n) \to m < +\infty$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Banach réflexif E. Il existe donc une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{u} \in E$ tels que $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup \bar{u}$ faiblement dans E. Comme la fonctionnelle J est convexe et sci, elle est séquentiellement faiblement sci, et donc

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = m \leq J(\bar{u}).$$

Il vient donc que $J(\bar{u}) = m$ ce qui montre que $\bar{u}$ est un point de minimum de J sur E.

Quant à l'unicité, si J est strictement convexe et $\bar{u}_0$ et $\bar{u}_1$ sont deux minima distincts de J sur E, alors

$$\inf_E J \leq J\left(\frac{\bar{u}_0 + \bar{u}_1}{2}\right) < \frac{1}{2}J(\bar{u}_0) + \frac{1}{2}J(\bar{u}_1) = \inf_E J,$$

ce qui est absurde. On en conclut l'unicité du point de minimum. □

6.2 Application aux fonctionnelles intégrales

Soit $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$J(u) = \int_\Omega W(x, \nabla u(x))\, dx - \int_\Omega f u\, dx. \tag{6.2.1}$$

On s'intéresse à la minimisation de J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;

(H_2) $W : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$\lambda|\xi|^p \leq W(x, \xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x \in \Omega,$$

où $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ et $1 < p < \infty$;

(H_3) la fonction $\xi \mapsto W(x, \xi)$ est convexe p.p. $x \in \Omega$;

(H_4) $f \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1/p + 1/p' = 1$.

Notons que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) et d'après le Lemme 5.2.2 , $x \mapsto W(x, \nabla u(x)) \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de sorte que la fonctionnelle J est bien définie sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 6.2.1. *Sous les hypothèses (H_1)–(H_4) la fonctionnelle J admet un point de minimum $\bar{u}$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ étant réflexif (car $p \in]1,\infty[$), d'après le théorème de Weierstrass, il suffit d'établir que J est convexe, sci et coercive.

Coercivité. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après l'hypothèse de coercivité (H_2) et l'inégalité de Hölder, on a

$$J(u) \geq \lambda \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

L'inégalité de Poincaré implique ensuite que

$$J(u) \geq \lambda \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_\Omega \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$$

quand $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$, ce qui établit la coercivité de J.

Convexité. Soient u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t \in [0,1]$. D'après l'hypothèse de convexité (H_3), on a p.p. tout $x \in \Omega$,

$$W(x, t\nabla u(x) + (1-t)\nabla v(x)) \leq tW(x, \nabla u(x)) + (1-t)W(x, \nabla v(x)),$$

puis en intégrant sur Ω

$$\int_\Omega W(x, t\nabla u + (1-t)\nabla v)\, dx \leq t \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx + (1-t) \int_\Omega W(x, \nabla v)\, dx.$$

Par ailleurs, on a

$$-\int_\Omega f(tu + (1-t)v))\, dx = -t \int_\Omega fu\, dx - (1-t) \int_\Omega fv\, dx.$$

En sommant les deux relations précédentes, il vient

$$J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v),$$

ce qui montre bien que J est convexe.

Semi-continuité inférieure. Nous allons en fait montrer que J est continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $f \in L^{p'}(\Omega)$, on a clairement que

$$\int_\Omega fu_n\, dx \to \int_\Omega fu\, dx.$$

Il reste à passer à la limite dans le terme non linéaire. D'après la réciproque de la convergence dominée, on peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telles que $\nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u$ et $|\nabla u_{\sigma(n)}| \leq h$ p.p. sur Ω. Comme W est une fonction de Carathéodory, on a $W(x, \nabla u_{\sigma(n)}(x)) \to W(x, \nabla u(x))$ p.p. tout $x \in \Omega$. Par ailleurs la propriété de croissance (H_2) implique que $0 \leq W(\cdot, \nabla u_{\sigma(n)}) \leq \Lambda(1 + |h|^p) \in L^1(\Omega)$. Le théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\int_\Omega W(x, \nabla u_{\sigma(n)})\, dx \to \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx.$$

Comme la limite est indépendante de la sous-suite, on a en fait la convergence de toute la suite

$$\int_\Omega W(x, \nabla u_n)\, dx \to \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx.$$

On obtient donc que $J(u_n) \to J(u)$ ce qui montre que J est continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

6.3 Equation d'Euler-Lagrange

Nous allons nous intéresser ici à une condition nécessaire d'optimalité. En dimension 1, lorsqu'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atteint son minimum en un point, alors la dérivée s'annule en ce point. Nous allons développer des outils qui vont nous permettre d'écrire une condition nécessaire analogue en dimension infinie.

Définition 6.3.1. Soient E un espace vectoriel normé et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que J est Gâteaux-differentiable en $u \in E$ s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E'$ telle que pour tout $v \in E$,

$$\frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \to \langle L, v\rangle_{E',E} \text{ quand } t \to 0.$$

On vérifie aisément que si une telle application L existe, alors elle est unique. On note alors $L = d_G J(u)$.

Théorème 6.3.2. *Soient E un espace vectoriel normé et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Si $\bar{u} \in E$ est tel que*

$$J(\bar{u}) \le J(v), \quad \textit{pour tout } v \in E$$

et J est Gâteaux-différentiable en $\bar{u}$, alors

$$d_G J(\bar{u}) = 0, \tag{6.3.1}$$

autrement dit $\bar{u}$ est un point critique de J.

Démonstration. Si $\bar{u}$ est un point de minimum pour J, alors

$$J(\bar{u}) \le J(\bar{u} + tv) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et tout } v \in E.$$

Il en résulte que si $t > 0$,

$$\frac{J(\bar{u} + tv) - J(\bar{u})}{t} \ge 0,$$

alors que si $t < 0$,

$$\frac{J(\bar{u} + tv) - J(\bar{u})}{t} \le 0.$$

Comme J est Gâteaux-différentiable en $\bar{u}$, il vient par passage à la limite quand $t \to 0$ dans les deux inégalités précédentes que $d_G J(\bar{u}) = 0$. □

La condition (6.3.1) est appelée *condition d'optimalité d'ordre* 1 ou encore *équation d'Euler-Lagrange*. Cette condition est nécessaire mais nullement suffisante en général car un point critique peut être aussi bien un minimum local, qu'un maximum local ou même un point selle.

Appliquons cela à la minimisation de la fonctionnelle intégrale (6.2.1). Pour ce faire nous devons rajouter une hypothèse sur W :

(H_5) p.p. $x \in \Omega$ la fonction $W(x, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|DW(x, \xi)| \le C(1 + |\xi|^{p-1}) \quad \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x \in \Omega.$$

Théorème 6.3.3. *Sous les hypothèses* (H_1)–(H_5)*, si* $\bar{u}$ *est un point de minimum de* J *sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, alors* $\bar{u}$ *est une solution faible de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(DW(x,\nabla\bar{u})\big) = f & \text{dans } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

i.e.

$$\int_\Omega DW(x,\nabla\bar{u})\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration. D'après le Théorème 6.3.2, il suffit d'établir que J est Gâteaux-différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après le théorème des accroissements finis, pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $t \in]0,1[$, il existe un $\theta_{x,t} \in]0,1[$ tel que

$$\frac{W(x,\nabla u(x)+t\nabla v(x)) - W(x,\nabla u(x))}{t} = DW(x,\nabla u(x)+\theta_{x,t}t\nabla v(x))\cdot\nabla v(x),$$

d'où on déduit que p.p. tout $x \in \Omega$,

$$\frac{W(x,\nabla u(x)+t\nabla v(x)) - W(x,\nabla u(x))}{t} \to DW(x,\nabla u(x))\cdot\nabla v(x) \qquad \text{quand } t \to 0.$$

Par ailleurs, l'hypothèse (H_5) montre que

$$\begin{aligned} \left|\frac{W(x,\nabla u(x)+t\nabla v(x)) - W(x,\nabla u(x))}{t}\right| &\leq C(1+|\nabla u(x)+\theta_{x,t}t\nabla v(x)|^{p-1}|\nabla v| \\ &\leq C'(1+(|\nabla u(x)|^{p-1}+|\nabla v(x)|^{p-1})|\nabla v|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $|a+b|^{p-1} \leq C_p(|a|^{p-1}+|b|^{p-1})$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, l'inégalité de Young $|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{p'}}{p'}$ montre que

$$|\nabla u(x)|^{p-1}|\nabla v(x)| \leq \frac{|\nabla v(x)|^p}{p} + \frac{|\nabla u(x)|^p}{p'},$$

où $1/p + 1/p' = 1$, ce qui implique que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\left|\frac{W(x,\nabla u(x)+t\nabla v(x)) - W(x,\nabla u(x))}{t}\right| \leq C''(|\nabla v(x)| + |\nabla u(x)|^p + |\nabla v(x)|^p).$$

Or la fonction dans le membre de droite est dans $L^1(\Omega)$ puisque u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et Ω est borné. On est alors en mesure d'appliquer le théorème de la convergence dominée qui assure que

$$\int_\Omega \frac{W(x,\nabla u+t\nabla v) - W(x,\nabla u)}{t}\,dx \to \int_\Omega DW(x,\nabla u)\cdot\nabla v\,dx.$$

Par conséquent,

$$\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} \to \int_\Omega DW(x,\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx.$$

Comme l'application

$$v \mapsto \int_\Omega DW(x,\nabla u)\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx$$

est linéaire et continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que J est Gâteaux-différentiable et la conclusion suit du Théorème 6.3.2. $\square$

En général, être point critique n'implique aucunement la propriété de minimalité. Toutefois, dans le cas convexe, ces deux propriétés sont équivalentes.

Théorème 6.3.4. *Sous les hypothèses (H_1)–(H_5), si $\bar{u}$ est une solution faible de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(DW(x,\nabla\bar{u})\big) = f & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors $\bar{u}$ est un point de minimum de J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, par convexité de J, pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$J(\bar{u} + t(v-\bar{u})) = J(tv + (1-t)\bar{u}) \leq tJ(v) + (1-t)J(\bar{u}).$$

Par conséquent,

$$\frac{J(\bar{u} + t(v-\bar{u})) - J(\bar{u})}{t} \leq J(v) - J(\bar{u}).$$

En utilisant la Gâteaux-différentiabilité de J, il vient par passage à la limite quand $t \to 0$ que

$$\langle d_G J(\bar{u}), v - \bar{u}\rangle \leq J(v) - J(\bar{u})$$

comme annoncé. Du fait que $\bar{u}$ est une solution faible, on en déduit que $d_G J(\bar{u}) = 0$, ce qui montre que

$$J(\bar{u}) \leq J(v)$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et donc que $\bar{u}$ est un point de minimum de J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$