Chap II : Equations non linéaires sous forme de divergence

Théorème V-2-3

$u_n \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega) \Rightarrow T(u_{\sigma(n)}) \xrightarrow{L^2(\Omega)} T(u)$

$\Rightarrow T(u_n) \longrightarrow T(u)$ dans $L^2(\Omega)$

$v = T(u) \in H^1_0(\Omega)$ est solution de

$$\int_\Omega A \nabla v \cdot \nabla w = \int f(x, u)\, w \, dx \quad \forall w \in H^1_0(\Omega)$$

Par Lax-Milgram, v est unique

Si φ est une extraction $u_{\varphi(n)} \longrightarrow u$ dans L^2

l'argument marche $\exists \sigma$ extraction tq

$$T(u_{\varphi\circ\sigma(n)}) \longrightarrow \underbrace{T(u)}_{\text{ne dépend pas de la sous-suite.}} \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Lemme $(X, \mathcal{C})$ espace topologique

$x_n \xrightarrow{\mathcal{C}} x \Leftrightarrow \forall \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\nearrow$, $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\nearrow$

tq $x_{\varphi\circ\sigma(n)} \xrightarrow{\mathcal{C}} x$

Donc $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$

Deux : $\Rightarrow$: OK

$\Leftarrow$: Supposons $x_n \not\to x$, alors $\exists \mathcal{U} \in \mathcal{C}$ tq $x \in \mathcal{U}$, $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗ tq

$$x_{\varphi(n)} \notin \mathcal{U} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par hypothèse. $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $x_{\varphi \circ \sigma(n)} \xrightarrow{\mathcal{C}} x$

absurde.

Convergence dominée

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ pp dans } \Omega \\ |u_n| \le g, \ g \in L^p(\Omega) \end{cases} \qquad (1 \le p < \infty)$$

$\Rightarrow u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$

Réciproque de la convergence dominée :

Si $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega)$ $(1 \le p < \infty)$

$\Rightarrow$ $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tq $u_{\sigma(n)} \to u$ pp

$\exists g \in L^p(\Omega)$ tq $|u_{\sigma(n)}| \le g$

H Hilbert

$\begin{cases} x_n \to x & \text{faible de } H \\ y_n \to y & \text{fort de } H \end{cases}$

$\Rightarrow \langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

⚠ En général, le produit de 2 cv faibles n'est pas convergente.

Ex: $\{e_n\}$ base Hilbertienne de H

$\forall x \in H$,

Parseval $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty$

$\Rightarrow \langle x, e_n \rangle \to 0 \quad \forall x \in H$

$\Rightarrow e_n \to 0$ faiblement de H.

$\langle e_n, e_n \rangle = \|e_n\|^2 = 1 \not\to 0$

$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle|$

$= |\langle x_n, y_n - y \rangle + \langle x_n - x, y \rangle|$

$\leq \underbrace{|\langle x_n, y_n - y \rangle|}_{\leq \|x_n\| \|y_n - y\| \text{ (CS)}} + \underbrace{|\langle x_n - x, y \rangle|}_{\to 0 \text{ car } x_n \to x} \to 0$

$\|x_n\| \leq C$, $\|y_n - y\| \to 0$ car $y_n \to y$

Banach-Steinhaus : $x_n \to x \Rightarrow \|x_n\| \leq C$

5.2 Équations semi-linéaires sous forme divergence :

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f(x, u, \nabla u)$$

Le terme d'ordre max (d'ordre 2) est linéaire par rapport à u

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\, \partial^2_{ij} u(x)$$

5.3 Équations quasi-linéaires sous forme divergence :

Le terme d'ordre max (2) est linéaire par rapport à $\partial^2 u$.

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x, u, \nabla u)\, \partial^2_{ij} u(x)$$

$$\boxed{-\underbrace{\operatorname{div}\big(a(x, u, \nabla u)\big)}_{\sum_j \partial_j \left(a_j(x, u(x), \nabla u(x)\right)} = f(x, u, \nabla u)}$$

$$= \frac{\partial a_j}{\partial x_j}(x, u, \nabla u) + \frac{\partial a_j}{\partial s}(x, u, \nabla u)\frac{\partial u}{\partial x_j} \underbrace{\sum \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i}(x, u, \nabla u)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{linéaire } / \partial^2 u}$$

$a(x, s, \xi) \qquad x \in \Omega, \ s \in \mathbb{R}, \ \xi \in \mathbb{R}^N$

En utilisant une méthode de point fixe, on peut traiter le cas

$$a(x,s,\xi) = A(x,s)\xi$$

où $A(x,s) = (A_{ij}(x,s))_{1\le i,j\le N}$

Même conditions sur f

$$A_{ij} : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ Caratheodory

④ Hypothèse d'ellipticité : $\exists\ 0 < \lambda < \Lambda < \infty$

$$\lambda|\xi|^2 \le (A(x,s)\xi)\cdot\xi \le \Lambda|\xi|^2$$

pp $\forall x \in \Omega$

$\forall (s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$.

On fixe $u \in H_0^1(\Omega)$, soit $v \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution (Lax-Milgram) de

$$\int_\Omega \underbrace{A(x,u(x))}_{\bar{A}(x)} \nabla v \cdot \nabla w = \int \overline{f(x)}\, f(x,u,\nabla u)\cdot w$$

$\forall w \in H_0^1(\Omega)$

$u \in H_0^1(\Omega) \longrightarrow T(u) = v \in H_0^1(\Omega)$

Théorème du point fixe ?

Exercice

Def: $a : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ est un opérateur de Leray-Lions si :

(i) $a_i : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ Caratheodory $\forall 1 \le i \le N$

(ii) Coercivité (ellipticité) : $\exists \lambda > 0, \exists 1 < p < \infty$ tq $a(x,s,\xi) \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^p$ pp. $x \in \Omega$ $\forall (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

(iii) Croissance : $\exists \Lambda > 0$ tq $|a(x,s,\xi)| \le \Lambda \left(1 + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1} \right)$

(iv) Monotonie : $\forall s \in \mathbb{R}, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$, pp $x \in \Omega$

$$\left(a(x,s,\xi_1) - a(x,s,\xi_2) \right) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq 0$$

Cas simplifié : $a(x,s,\xi) = a(\xi)$

~~(i)~~ $a : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continue

~~(ii)~~ $a(\xi) \cdot \xi \geq \lambda |\xi|^p$

~~(iii)~~ $|a(\xi)| \le \Lambda \left(1 + |\xi|^{p-1} \right)$

(iv) $\left(a(\xi_1) - a(\xi_2) \right) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \geq 0$.

Exemple : $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, C^1

$DW : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continue.

$\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N, \quad t \in]0,1[.$

$$W(t\xi_2 + (1-t)\xi_1) \le t\,W(\xi_2) + (1-t)\,W(\xi_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad W(\xi_1 + t(\xi_2-\xi_1)) \le W(\xi_1) + t\,(W(\xi_2) - W(\xi_1))$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{W(\xi_1 + t(\xi_2-\xi_1)) - W(\xi_1)}{t} \le W(\xi_2) - W(\xi_1)$$

$\downarrow t \to 0$

$$DW(\xi_1)\cdot(\xi_2-\xi_1) \le W(\xi_2) - W(\xi_1)$$

$$+ \quad DW(\xi_2)\cdot(\xi_1-\xi_2) \le W(\xi_1) - W(\xi_2)$$

$$\big(DW(\xi_2) - DW(\xi_1)\big)\cdot(\xi_2-\xi_1) \ge 0$$

$\Leftrightarrow$ $a(\xi) := DW(\xi)$ est monotone.

Ex: $W(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p \qquad (1 < p < \infty)$

convexe, C^1

$a(\xi = DW(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ opérateur de Leray Lions.

$\longrightarrow$ p-laplacien

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right), \quad u \in W^{1,p}$$

$p=2 \quad \Delta_2 u = \Delta u$

Thm: (H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert borné
(H_2) $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ Leray-Lions
(H_3) $f \in L^{p'}(\Omega)$ $\quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$

Alors $\exists\, u \in W^{1,p}_0(\Omega)$ tq

$$\int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla w = \int_\Omega f w \quad \forall w \in W^{1,p}_0(\Omega)$$

[solution faible de $\begin{cases} -\operatorname{div}(a(\nabla u)) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$]

Lemme : Soit E ev de dim finie et E' son dual.
Soit $T : E \to E'$ continue et coercive :

$$\frac{\langle T(u), u \rangle_{E',E}}{\|u\|_E} \xrightarrow[\|u\|_E \to \infty]{} \infty$$

Alors, $\forall b \in E'$, $\exists\, u \in E$ tq $T(u) = b$.

Dem: $E = \mathbb{R}^d$, $E' = E = \mathbb{R}^d$

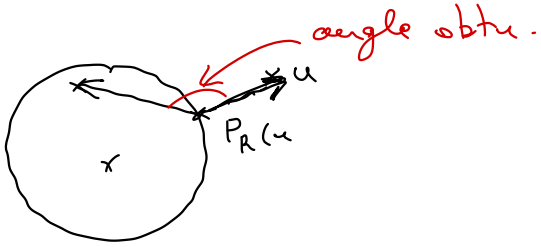
Idée: $T(u) = b \iff b - T(u) = 0$
$\iff b - T(u) + u = u.$
$\iff u$ point fixe de $b - T - id.$

Soit P_R la projection orthogonale sur la boule fermée $\overline{B}_R$ de rayon $R > 0$.

$$P_R(u) = \begin{cases} u & \text{si } \|u\| \le R \\ \dfrac{Ru}{\|u\|} & \text{si } \|u\| > R. \end{cases}$$

$P_R(u)$ est caractérisé par :

$$\begin{cases} P_R(u) \in \overline{B}_R \\ \langle u - P_R(u), v - P_R(u) \rangle \le 0 \quad \forall v \in \overline{B}_R \end{cases}$$



$$T_R(u) = P_R(u - T(u) + b)$$

$T_R : \overline{B}_R \longrightarrow \overline{B}_R$ continue comme composée d'applications continues.

Brouwer $\Rightarrow \exists\, u_R \in \overline{B}_R$ tq

$$P_R(u_R - T(u_R) + b) = T_R(u_R) = u_R$$

Par caractérisation de la projection, $\forall v \in \overline{B}_R$

$$\langle \cancel{u_R} - T(u_R) + b - \underbrace{P_R(u_R - T(u_R) + b)}_{T_R(u_R) = \cancel{u_R}}, \underbrace{T_R(u_R) = u_R}\ v - P_R(u_R - T(u_R) + b) \rangle \le 0$$

$$\langle b - T(u_R), v - u_R \rangle \le 0 \quad \forall v \in \overline{B}_R \quad (*)$$

$v = 0 \Rightarrow$ $\langle T(u_R), u_R \rangle \le \langle b, u_R \rangle$

$\le \|b\| \|u_R\|$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\langle T(u_R), u_R \rangle}{\|u_R\|} \leq \|b\|$

Si $\|u_R\| \to \infty$, alors $\dfrac{\langle T(u_R), u_R \rangle}{\|u_R\|} \to \infty$ absurde

$\Rightarrow$ $\|u_R\| \leq C$

Comme on est en dimension finie,

$u_{R_j} \longrightarrow \bar{u}$

Soit $v \in \mathbb{R}^d$, $\exists j_0 \in \mathbb{N}$ tq $R_j \geq \|v\|$ $\forall j \geq j_0$

$\Rightarrow$ $v \in \overline{B}_{R_j}$

D'après avec $R = R_j$,

$\langle b - T(u_{R_j}), v - u_{R_j} \rangle \leq 0$

$T(u_{R_j}) \to T(\bar{u})$ $\quad$ $u_{R_j} \to \bar{u}$

$\Rightarrow$ $\langle b - T(\bar{u}), v - \bar{u} \rangle \leq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^d$

$v = \bar{u} + b - T(\bar{u})$

$\Rightarrow$ $\|b - T(\bar{u})\|^2 \leq 0 \Rightarrow b = T(\bar{u})$ $\square$.

Preuve du Théorème :

Etape ① : def d'un opérateur. $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$

$u \in W^{1,p}_0(\Omega)$

$|a(\nabla u)| \leq \Lambda(1 + |\nabla u|^{p-1}) \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$

$\Rightarrow a(\nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$

$\|a(\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \Lambda\left(|\Omega|^{1/p'} + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right)$

Si $v \in W^{1,p}_0(\Omega) \Rightarrow \nabla v \in L^p(\Omega)$

$\int_\Omega \underbrace{a(\nabla u)}_{L^{p'}} \cdot \underbrace{\nabla v}_{L^p}$ est bien définie

$\underbrace{\qquad\qquad}_{L^1}$

$v \longmapsto \int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla v$ est linéaire

et $\left|\int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla v\right| \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|a(\nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}$

$\leq \Lambda\left(|\Omega|^{1/p'} + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right) \|v\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}$

On $A(u) : W^{1,p}_0(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto \langle A(u), v\rangle = \int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla v$

$A(u)$ est linéaire et continue.

Donc $A(u) \in [W_0^{1,p}(\Omega)]' =: W^{-1,p'}(\Omega)$

$$A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$
$$u \longmapsto A(u)$$

où $\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega a(\nabla u).\nabla v \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

On va montrer que A est continue.

Lemme : Si $\xi_n \longrightarrow \xi$ dans $L^p(\Omega)$, alors
$a(\xi_n) \longrightarrow a(\xi)$ dans $L^{p'}(\Omega)$.

Dem : Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗ une extraction
$\xi_{\varphi(n)} \longrightarrow \xi$ dans $L^p(\Omega)$

Réciproque partielle du lemme de convergence :
$\exists\, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ↗
$\exists\, g \in L^p(\Omega)$ tq
$\xi_{\varphi\circ\sigma(n)} \xrightarrow{pp} \xi$ et $|\xi_{\varphi\circ\sigma(n)}| \le g$.

a continue $\Rightarrow a(\xi_{\varphi\circ\sigma(n)}) \xrightarrow{pp} a(\xi)$

Croissance : $|a(\xi_{\varphi\circ\sigma(n)})| \le \Lambda(1 + |\xi_{\varphi\circ\sigma(n)}|^{p-1})$
$\le \Lambda(1 + g^{p-1}) \in L^{p'}(\Omega)$

CV dominée
$\Rightarrow a(\xi_{\varphi\circ\sigma(n)}) \xrightarrow{L^{p'}} a(\xi)$

Par le lemme topologique, $a(\xi_u) \xrightarrow[L^{p'}]{} a(\xi)$ □

Claim 1: $A : W^{1,p}_0(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ est continue

Soit $u_n \longrightarrow u$ $W^{1,p}_0(\Omega)$

$\Rightarrow \nabla u_n \longrightarrow \nabla u$ $L^p(\Omega)$

$\Rightarrow a(\nabla u_n) \longrightarrow a(\nabla u)$ $L^{p'}(\Omega)$

$$\langle A(u_n) - A(u), v \rangle = \int_\Omega (a(\nabla u_n) - a(\nabla u)) \cdot \nabla v$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \|a(\nabla u_n) - a(\nabla u)\|_{L^{p'}} \cdot \underbrace{\|\nabla v\|_{L^p}}_{\|v\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}}$$

Soit $v \neq 0$, $v \in W^{1,p}_0$:

$$\frac{\langle A(u_n) - A(u), v \rangle}{\|v\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}} \leq \|a(\nabla u_n) - a(\nabla u)\|_{L^{p'}}$$

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \|a(\nabla u_n) - a(\nabla u)\|_{L^{p'}} \longrightarrow 0$$

Donc $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.

$A : W^{1,p}_0(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$ continue.

Claim 2: A est coercive. Soit $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$

$$\frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}} = \frac{1}{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}} \int_\Omega a(\nabla u) \cdot \nabla u$$

$$\geq \underset{(ii)}{\frac{1}{\|\nabla u\|_{L^p}}} \lambda \int_\Omega |\nabla u|^p$$

$$= \lambda \|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}$$

$$= \lambda \|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}^{p-1} \longrightarrow \infty \quad \text{quand } \|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \to \infty$$

$(p > 1)$

Rq : Ω borné $\Rightarrow$ Poincaré

$\exists C_\Omega > 0$ tq $\forall u \in W^{1,p}_0(\Omega)$

$$\int_\Omega |u|^p \leq C_\Omega \int_\Omega |\nabla u|^p$$

$$\Rightarrow \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq \underbrace{\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}}_{\|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}} \geq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Etape (2) : Pb approché en dimension finie

$1 < p < \infty$

$W^{1,p}_0(\Omega)$ est séparable, i.e. il contient une partie $D = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dénombrable, dense.

$E_n = \text{Vect}\{e_0, \dots, e_n\}$ sev de $W^{1,p}_0(\Omega)$ de dimension finie

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} = D$$

dense dans $W^{1,p}_0(\Omega)$.

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} = W^{1,p}_0(\Omega).$$

$\forall v \in W^{1,p}_0(\Omega)$, $\exists v_n \in E_n$ tq $v_n \to v$ dans $W^{1,p}_0(\Omega)$.

* $T_n = A_{|E_n}$

$u \in E_n$, $T_n(u) = A(u) \in W^{-1,p'}(\Omega)$

$\forall v \in E_n$, $\langle T_n(u), v\rangle_{E_n', E_n} = \langle A(u), v\rangle_{W^{-1,p'}, W^{1,p}_0}$

$T_n : E_n \to E_n'$ continue et coercive.

* $b_n : E_n \to \mathbb{R}$

$v \mapsto \langle b_n, v\rangle = \int_\Omega f v$ ($f \in L^{p'}$) bien définie, bien sûr continue.

D'après le lemme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists u_n \in E_n$ tq

$$T_n(u_n) = b_n$$

i.e. $\forall v \in E_n$

$$\langle A(u_n), v\rangle = \langle T_n(u_n), v\rangle_{E_n', E_n} = \langle b_n, v\rangle_{E_n', E_n}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\int_\Omega a(\nabla u_n)\cdot \nabla v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in E_n}$$

Il reste à étendre cette formulation variationnelle à toutes les fonctions tests $v \in W^{1,p}(\Omega)$ en faisant $n \to \infty$ (densité).

Méthode de compacité.