Calcul matriciel

Exercice 1 Soient les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Le produit ABC est-il possible ? Si oui, le calculer. Même question pour CAB.

Exercice 2 Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Pour $p \geq 1$ entier, on note I_p la matrice identité dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Existe-t-il des matrices B à coefficients réels ou complexes telles que $BA = I_p$? Telles que $AB = I_p$? Si oui les calculer.

Exercice 3 Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et soit $B = A - I_3$. Calculer B^n, pour $n \geq 1$. En déduire A^n, $n \geq 1$. Calculer A^{-1} en fonction de B.

Exercice 4

a) Soit $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille de vecteurs libres de $\mathbb{C}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et soient $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq k}$ des nombres complexes non nuls. Soit M la matrice définie par

$$M = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i x_i^*$$

Déterminer l'image, le rang, et le noyau de M.

b) Même question pour la matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, avec $a_{i,j} = \cos(\theta_i + \theta_j)$.

Exercice 5 a) Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$M = \begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{bmatrix}.$$

Calculer $P = MA$ et $\det P$.

b) En déduire que

$$\det M = (x+a+b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)(x-a-b+c).$$

Exercice 6 Montrer par récurrence sur n la formule suivante pour le calcul du déterminant de Van Der Monde

$$(\forall (\alpha_i)_{1\le i\le n} \in \mathbb{C}^n) \quad D(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Exercice 7 Montrer que :

a) Le produit de deux matrices carrées triangulaires inférieures (respectivement supérieures) est une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure).

b) L'inverse (s'il existe) d'une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure) est une matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure).

c) Les éléments diagonaux d'une matrice triangulaire inversible et de son inverse sont inverses les uns des autres.

Exercice 8 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\sigma(A)$ son spectre.

a) Montrer que si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

b) Montrer que si A est unitaire, alors $|\det(A)| = 1$ et $\sigma(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

c) Montrer que si A est inversible, alors $\sigma(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

d) Montrer que $\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A)\}$.

e) On suppose que $A^2 = A$. Calculer $\sigma(A)$.

f) On suppose A strictement triangulaire (*i.e.* triangulaire, dont les éléments diagonaux sont nuls). Montrer que $A^n = [0]$.

Exercice 9 Toutes les matrices considérées appartiennent à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Est-il possible d'avoir $AB - BA = \lambda I$ avec $\lambda \neq 0$? On pourra comparer la trace des deux membres.

b) On suppose que A et B sont inversibles. Montrer que si $AB + BA = [0]$ alors n est pair.

c) Montrer que si A est diagonalisable, on a $\mathbb{C}^n = \ker(A) \oplus \operatorname{Im}(A)$.

Exercice 10 Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que les matrices A et B sont inversibles et on définit, par blocs, la matrice $M = \begin{bmatrix} A & C \\ [0] & B \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

4.1 Montrer que M est inversible, d'inverse $M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & D \\ [0] & B^{-1}, \end{bmatrix}$ où $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est à préciser.

4.2 Soit $b \in \mathbb{C}^{2n}$, montrer (sans calculer M^{-1}) que la résolution du système linéaire $Ma = b$ (de taille $(2n) \times (2n)$) peut se ramener à la résolution de deux systèmes linéaires de taille $n \times n$.

Note : Le système linéaire $Aa = b$ est dit de taille $m \times n$ si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.

Exercice 11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer que si $(\forall a \in \mathbb{C}^n)\ \langle Aa \mid a \rangle = 0$, alors $A = [0]$.

Exercice 12 a) Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que si $\alpha \neq v^t u$, alors la matrice $I - \frac{1}{\alpha} uv^t$ est inversible et $\left(I - \frac{1}{\alpha} uv^t\right)^{-1} = I - \frac{1}{\beta} uv^t$, où on a noté $\beta = v^t u - \alpha$.

b) Soit A une matrice inversible de taille n, et u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Donner une condition qui assure que la matrice $A + uv^t$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 13 Normes de vecteurs dans $\mathbb{C}^n$.

a) Soit a un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$. Trouver les plus petites constantes κ_i telles que $\|a\|_1 \leq \kappa_1 \|a\|_2$, $\|a\|_1 \leq \kappa_2 \|a\|_\infty$, $\|a\|_2 \leq \kappa_3 \|a\|_1$, $\|a\|_2 \leq \kappa_4 \|a\|_\infty$, $\|a\|_\infty \leq \kappa_5 \|a\|_1$, $\|a\|_\infty \leq \kappa_6 \|a\|_2$.

b) Montrer que l'application $a \mapsto \left(\sum_{i=1}^n \mid \alpha_i \mid^p\right)^{1/p}$ n'est pas une norme sur $\mathbb{C}^n$ lorsque $0 < p < 1$ et $n \geq 2$.

Exercice 14 Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(A_k)_{k \geq 0}$ de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\lim_{k \to +\infty} A_k = A.$$

Exercice 15 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne semi-définie positive.

a) Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne et semi-définie positive telle que $A = S^2$.

b) Montrer que $\ker A = \ker S$.

c) Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitienne semi-définie positive telle que $A = S^2$. Montrer A et S ont les mêmes sous-espaces propres. En déduire que S est unique.

Exercice 16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. Montrer qu'il existe une matrice hermitienne semi-définie positive $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaire telles que $A = SQ$. Montrer que cette représentation est unique si A est inversible.

Exercice 17 Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \;\; \gamma_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

et on note D_i le disque $D_i = \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid \; |z - a_{i,i}| \; \leq \gamma_i \Big\}$.

a) Montrer que $\sigma(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ (théorème de Gerschgorin-Hadamard).

b) Montrer qu'une matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, i.e.

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \;\; |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|,$$

est inversible.

c) Soit $A = [a_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante. On définit

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\}) \;\; \tau_i = |a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}| \quad \text{et} \quad \tau = \min_{1 \leq i \leq n} \tau_i.$$

Montrer que $\|A^{-1}\|_\infty \leq 1/\tau$.

Exercice 18 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ une matrice de rang m. Pour toute norme $\| \cdot \|$ définie sur $\mathbb{C}^n$, montrer que la fonction $a \mapsto \|Aa\|$ est une norme sur $\mathbb{C}^m$.

Exercice 19 a) Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale. Montrer que, pour tout $p \in [1, +\infty[$,

$$\|D\|_p = \|D\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |d_{i,i}|.$$

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable. Montrer qu'il existe une norme matricielle $\| \cdot \|$ telle que $\varrho(A) = \|A\|$.

Exercice 20 Pour n entier ≥ 1, on définit l'application φ

$$\begin{array}{rcl} \varphi\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ A & \longmapsto & \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|^2} \end{array}$$

a) Montrer que φ est une norme matricielle. On la notera $\|\cdot\|$ dans la suite.

b) Soient $(\mu_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs singulières de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que

$$\|A\|^2 = \operatorname{tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2.$$

c) En déduire que $\|A\|_2 \leq \|A\| \leq \sqrt{n}\|A\|_2$.

d) Montrer les inégalités $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_p \leq \|A\| \leq \sqrt{n}\|A\|_p$, pour $p = 1$ et $p = \infty$.

e) Montrer que pour toute matrice unitaire $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\|U\| = \sqrt{n}$ et $\|AU\| = \|UA\| = \|A\|$.

Exercice 21 1) Pour tout réel α, on note A_α la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

a) Quelles sont les valeurs propres de A_α ?

b) Pour quelles valeurs de α, A_α est-elle inversible ?

c) Calculer les normes $\|A_\alpha\|_1$, $\|A_\alpha\|_2$ et $\|A_\alpha\|_\infty$.

2) Mêmes questions pour la matrice

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Exercice 22 Une matrice $B = [b_{i,j}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite être une M-matrice si ses éléments diagonaux sont strictement positifs, ses éléments extra-diagonaux sont négatifs et pour tout i, $\sum_j b_{i,j} > 0$.

a) Montrer que toute M-matrice est inversible.

b) Montrer que tous les coefficients de l'inverse d'une M-matrice sont positifs.

c) Montrer que l'ensemble des M-matrices est une cône convexe non fermé.