Université Pierre et Marie Curie – Paris 6 | Feuille de T.D. n°2
Licence de Mathématiques | Année universitaire 2009-2010
LM334 | Introduction à l'Analyse Numérique

Approximation de solutions d'équations

Exercice 1 (Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 1)
Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue. Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$, c'est-à-dire, il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 2 (Théorème des valeurs intermédiaires par une méthode de dichotomie)
On se propose de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires à l'aide d'une méthode de dichotomie. Soient a, $b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a)f(b) \leq 0$. On définit trois suites (a_n), (b_n) et (c_n) en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

et si $f(a_n)f(c_n) \leq 0$, alors

$$\begin{cases} a_{n+1} := a_n, \\ b_{n+1} := c_n, \end{cases}$$

et sinon

$$\begin{cases} a_{n+1} := c_n, \\ b_{n+1} := b_n. \end{cases}$$

a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers une même limite ℓ.
b) Montrer que $f(\ell) = 0$.

Exercice 3 On considère l'équation

$$\sin x - x + 2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Trouver un intervalle I de longueur 2 qui contient l'ensemble des solutions.
b) Montrer que dans cet intervalle I, il existe une solution et une seule, notée $\bar{x}$, de l'équation considérée, et que quelque soit $x_0 \in I$, la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = 2 + \sin x_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

converge vers $\bar{x}$.

Exercice 4 On considère une méthode itérative pour l'approximation d'une solution d'équation non linéaire. On suppose avoir construit une suite (x_n) approximant la solution $\bar{x}$ du problème et on note $\varepsilon_n := x_n - \bar{x}$ l'erreur à l'étape n. On dit que la suite (x_n) converge vers $\bar{x}$ avec un ordre $p \geq 1$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varepsilon_{n+1}| \leq C|\varepsilon_n|^p.$$

Si $p = 1$, on dit que la convergence est linéaire, si $p = 2$ elle est quadratique etc... Il est clair que plus l'ordre de la méthode est élevé plus celle-ci convergera rapidement vers la solution de l'équation.

a) Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction contractante alors elle admet un unique point fixe $\bar{x}$. On pourra considérer comme dans le cours la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ et montrer que c'est une suite de Cauchy.

b) On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ et qu'elle satisfait

$$f^{(i)}(\bar{x}) = 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \ldots, p \text{ et } f^{(p+1)}(\bar{x}) \neq 0.$$

Montrer que la méthode du point fixe est d'ordre $p + 1$.

Exercice 5 (Calcul approché de π)

On cherche une approximation de π comme zéro de la fonction $f : x \mapsto \cos(\frac{x}{2})$. Ecrire l'algorithme de Newton correspondant. Quel est son ordre ?

Exercice 6 (Calcul approché d'une racine carrée)

On se propose d'utiliser la méthode de Newton pour calculer la valeur approchée de la racine carrée d'un nombre réel.

a) Soit $a > 0$, déterminer une fonction f telle que $f(\sqrt{a}) = 0$. La fonction f doit être entièrement déterminée à partir du nombre a puisque c'est la seule donnée connue au départ du processus. Soit $x_0 > 0$, montrer que l'application de la méthode de Newton permet de construire la suite

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Montrer que la suite est bien définie, c'est-à-dire que l'on a toujours $x_n > 0$ pour tout n entier.

b) Montrer que l'on a

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2.$$

En déduire que $x_n > \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 1$ (si $x_0 \neq \sqrt{a}$).

c) On suppose $x_0 \neq \sqrt{a}$, montrer que l'on a alors $x_{n+1} < x_n$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que la suite (x_n) converge vers une limite x_∞. Montrer que nécessairement, $x_\infty = \sqrt{a}$.

d) Dans le cas $a = 2$ et $x_0 = 1$, calculer x_1, x_2 et x_3. Comparer ces premiers itérés avec ceux obtenus par dichotomie. On partira par exemple de l'encadrement $1 < \sqrt{2} < 2$.

Exercice 7 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle fermé I. On suppose que f admet un unique zéro a sur I. On introduit la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = x - \alpha f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

avec $\alpha > 0$.

a) Montrer que g possède un unique point fixe.

b) Si pour tout $x \in I$ la dérivée de f vérifie $0 < m \leq f'(x) \leq M$, sur quel intervalle choisir la constante α pour que g soit contractante sur I ? Quelle valeur de α faut-il choisir pour que $\sup_I |g'|$ soit le plus petit possible ?

c) Construire une méthode itérative de type point fixe pour approcher la valeur de $\sqrt{a}$ avec $a > 1$. On pourra prendre $f(x) = x^2 - a$ et $I = [1, a]$.

Exercice 8 (Méthodes de Newton et Steffensen)

Soit (x_n) une suite itérée associée à une fonction $f \in \mathcal{C}^2(I)$, où I est un intervalle fermé voisinage de la racine a de l'équation $f(x) = 0$. On suppose ici que $f'(a) \neq 0$.

a) Montrer que l'ordre de convergence de la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n + h_n, \quad h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

est $p = 2$ (convergence quadratique).

b) Montrer que la méthode de Steffensen

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}, \quad g(x_n) = \frac{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}{f(x_n)}$$

a également pour ordre de convergence $p = 2$. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à celle de Newton ?

Exercice 9 (Méthode d'Aitken – accélération de convergence)

Pour calculer la racine α de l'équation $f(x) = 0$, on considère une méthode d'approximations successives

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_0 \neq \alpha \text{ donné}$$

que l'on suppose convergente avec

$$\|f'\|_\infty = \sup_{x \in I} |f'(x)| = k < 1,$$

où I est un intervalle fermé contenant α.

1. On pose $e_n := x_n - \alpha$. Déterminer $L := \lim_{n \to +\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|}$.
2. On considère les suites (ε_n) et $(\bar{x}_n)$ définies respectivement par

$$\varepsilon_n = \frac{e_{n+1}}{e_n} - L \text{ et } \bar{x}_n = x_n - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}.$$

Déterminer $\frac{\bar{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha}$ en fonction de L, ε_n et ε_{n+1} et en déduire que les approximations d'Aitken $\bar{x}_n$ convergent plus vite que les approximations x_n, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\bar{x}_n - \alpha}{x_n - \alpha} = 0.$$

3. **Application :** On considère la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 2$ et on souhaite trouver par approximations successives sa racine double 1.
   a) Montrer que la méthode de Newton a une convergence linéaire mais pas quadratique et justifier pourquoi les théorèmes usuels ne s'appliquent pas.

b) On utilise maintenant la méthode d'Aitken définie à partir de la méthode de Newton. Déterminer $\frac{\bar{x}_n-\alpha}{x_n-\alpha}$ en fonction de $\frac{x_{n+1}-\alpha}{x_n-\alpha}$. Que gagne-t-on en vitesse de convergence ?

Exercice 10 (Méthode de Newton pour la recherche de racines carrées de matrices) On rappelle qu'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

a) Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

b) Montrer que la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées.

c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et soit $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la fonction définie par $F(X) = X^2 - A$. Déterminer la différentielle de F en X.

d) Ecrire l'algorithme de Newton pour F.

Exercice 11 On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} -x + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4} \\ \\ -\frac{1}{2}x + y^2 + \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les points fixes de ϕ.

b) Ces points fixes sont-ils attractifs ?

c) Soit B le point non attractif de ϕ. Montrer que ϕ possède un inverse local en B. Le point B est-il attractif pour l'inverse ?