Université Pierre et Marie Curie – Paris 6 — Feuille de T.D. n°5
Licence de Mathématiques — Année universitaire 2009-2010
LM334 — Introduction à l'Analyse Numérique

Approximation des équations différentielles

Exercice 1 Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2(x - ty) \\ y' & = & 2y. \end{array}\right. \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

1. Déterminer la solution de ce système qui passe par le point (x_0, y_0) en $t = 0$.
2. On utilise la méthode d'Euler explicite avec pas constant h démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
   a) Ecrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).
   b) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0 et y_0.
   c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée qui interpole linéairement les points (x_n, y_n) aux temps t_n, converge sur $\mathbb{R}^+$ vers la solution exacte du système quand $h \to 0$.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle du second ordre avec conditions initiales

$$\left\{\begin{array}{rcll} y''(t) & = & f(t, y(t)) & \text{pour tout } t \in [0, T], \\ y(0) & = & y_0, & \\ y'(0) & = & y_0'. & \end{array}\right.$$

On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([0, T] \times \mathbb{R})$ et y_0, $y_0' \in \mathbb{R}$. On choisit de discrétiser l'équation par le schéma à deux pas

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(t_n, y_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,$$

où $t_n = nh$ et $h = T/N$. Majorer l'erreur de consistance définie par

$$\varepsilon(h) := \sup_{1 \leq n \ \leq T/N-1} \left| f(t_n, y(t_n)) - \frac{y(t_{n+1}) - 2y(t_n) + y(t_{n-1})}{h^2} \right|.$$

Exercice 3 (Méthode de Heun)
Soit le problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcll} y'(t) & = & f(t, y(t)) & \text{pour tout } t \in [0, T], \\ y(0) & = & y_0, & \end{array}\right.$$

où $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est globalement Lipschitzienne par rapport à y et uniformément en t. On suppose que la solution y de cette équation différentielle est de classe $\mathcal{C}^3$.

1. Etudier l'erreur de consistance de la méthode de Heun :

$$y_{n+1} = y_n + h \left[\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_n + h f(t_n, y_n)) \right],$$

   où $t_n = nh$ et $h = T/N$.
2. Montrer que cette méthode est convergente d'ordre 2.

Exercice 4 On considère le système différentiel suivant

$$\begin{cases} u_1'(t) + 2u_1(t) - u_2(t) + u_1(t)e^{u_1(t)} &= 0, \\ u_2'(t) - u_1(t) + 2u_2(t) + u_2(t)e^{u_2(t)} &= 0, \end{cases} \quad \text{pour tout } t > 0,$$

avec la condition initiale $u_1(0) = u_2(0) = 1$. Dans la suite, on pose $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que si u est solution du problème, alors la fonction g définie par $g(t) := \|u(t)\|^2$ pour tout $t > 0$ est décroissante.
2. Si $h > 0$ est le pas de temps et si $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$, écrire le schéma d'Euler implicite qui permettra de calculer les approximations u^n de $u(t_n)$.
3. Démontrer que si u^n est solution du schéma d'Euler implicite, alors la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $g_n = \|u^n\|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est décroissante.
4. Expliquer la méthode de Newton-Raphson qui permettra de calculer u^{n+1} à partir de u^n.