TD 11. Intégrales dépendant d'un paramètre : convergence, sommation, dérivation.

Echauffement

⋆ **Exercice 1.** Déterminer la limite des suites $(I_n)_{n\geq 1}$ suivantes après avoir justifié l'existence de I_n pour $n \geq 1$:

$$\text{(i) } I_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}}{nx+1}dx \qquad \text{(ii) } I_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3}$$

$$\text{(iii) } I_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{x^2}+\pi}{ne^{2x^2}+4x^4}dx \qquad \text{(iv) } I_n = \int_{]0,+\infty[} \frac{\sin x}{x^2}\frac{x^{1/n}}{1+x^{1/n}}dx$$

$$\text{(v) } I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}dx.$$

Interversions somme-intégrale

Exercice 2. La fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2|x-\frac{1}{n}|^{1/2}}$ est-elle intégrable sur $[0,1]$?

⋆ **Exercice 3.**

a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+1}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^{ax} f(x)$ est intégrable. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{zx} f(x)dx = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)dx$.

Intégrales à paramètre

⋆ **Exercice 4.** Le but de cet exercice est de montrer que $I := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

a) i) Montrer que l'intégrale généralisée I est convergente.

ii) La fonction $g : x \mapsto \sin(x)/x$ est-elle Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

b) Soit $f(x,t) = e^{-xt}\dfrac{\sin x}{x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$.

i) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est Lebesgue intégrable.

ii) Montrer que la fonction $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)dx$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

iii) Calculer $F'(t)$ puis $\lim_{t\to+\infty} F(t)$. En déduire que : $F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t$.

c) Soient $A > 0$ et $t > 0$. Montrer que $\left|\int_A^{+\infty} f(x,t)dx\right| \leq \frac{2}{A}$.

d) Montrer que pour $A > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_0^A f(x,t)dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}dx.$$

e) Conclure.

Exercice 5. Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\varphi(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos x}{x}\,dx$.

a) Montrer que φ est dérivable pour tout $t \in]0,+\infty[$ et calculer explicitement sa dérivée.

b) Calculer la limite de $\varphi(t)$ quand $t \to +\infty$. En déduire la valeur de $\varphi(t)$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}dx$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'. En déduire une expression simple de f.

⋆ **Exercice 7.** Soit Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1}e^{-x}dx.$$

a) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n+1) = n!$.

c) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\Gamma(t+1) = \sqrt{t}\,t^t e^{-t}\displaystyle\int_{-\sqrt{t}}^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy$.

d) Montrer que, pour tout $y \geq 0$, la fonction $t \mapsto t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et que pour tout $y \in \left]-\sqrt{t},0\right[$, $t\ln\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - y\sqrt{t} \leq -\frac{y^2}{2}$.

e) Montrer que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\sqrt{t}}^0 \left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy = \lim_{t\to+\infty}\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{y}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-\sqrt{t}y}dy = \int_0^{+\infty} e^{-y^2/2}dy.$$

f) En déduire la formule de Stirling : $\Gamma(t+1) \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi t}\,t^t\,e^{-t}$.

Pour aller plus loin

Exercice 8. [Théorème de Bohr-Mollerup] Le but de cet exercice est de montrer que la fonction Γ définie à l'exercice précédent est l'unique fonction $G : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie :

(i) $\ln G$ est une fonction convexe (on dit aussi que G est log-convexe),

(ii) $\forall x > 0,\ G(x+1) = xG(x)$,

(iii) $G(1) = 1$.

1/ On montre d'abord que la fonction Γ vérifie ces trois conditions.

a) Montrer que Γ vérifie les conditions (ii) et (iii).

b) Montrer qu'une fonction G est log-convexe ssi

$$\forall \lambda \in [0,1],\ \forall x, y > 0,\ G(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq G(x)^\lambda G(y)^{1-\lambda}.$$

c) En déduire que Γ est log-convexe (on pourra utiliser l'inégalité de Hölder).

2/ Montrons maintenant l'unicité. Soit $G : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction vérifiant (i), (ii) et (iii).

a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$. Montrer que

$$G(n+x) \leq n^x (n-1)! \quad \text{ et } \quad n! \leq G(n+x)(n+x)^{1-x}$$

(Indication : écrire $n+x$ (resp. $n+1$) comme une combinaison convexe de n et $n+1$ (resp. de $n+x$ et $n+x+1$)).

b) En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1]$,

$$\frac{n!(n+x)^{x-1}}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} \leq G(x) \leq \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}.$$

c) Conclure.