Université Pierre & Marie Curie (Paris 6) — Licence de Mathématiques L3
UE LM364 – Intégration 1 — Année 2014–15

TD2. Suites d'ensembles.

Échauffements

Exercice 1. Un sous-ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ est cofini si $\mathbb{N} \setminus A$ est fini. Montrer que :

a) l'intersection de deux ensembles cofinis est cofinie ;

b) tout ensemble contenant un ensemble cofini est cofini.

Est-ce encore vrai avec des ensembles finis ? avec des ensembles dénombrables ? codénombrables ?

⋆ **Exercice 2.** Soit $(a_n)_{\mathbb{N}}$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$.

a) Montrer que $\liminf\,]-\infty, a_n] \subseteq\,]-\infty, \liminf a_n]$, mais que l'inclusion peut être stricte.

b) Montrer que $]-\infty, \liminf a_n[\, \subseteq \liminf\,]-\infty, a_n[$, mais que l'inclusion peut être stricte.

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties d'un ensemble X. Classer par ordre d'inclusion les parties suivantes de X :

$$\varnothing, X, \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \liminf A_n, \limsup A_n.$$

Est-il possible que toutes les inclusions soient strictes ?

Suites d'ensembles

Exercice 4. Soient $(A_n)_{n\geq 0}$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ deux suites de parties d'un ensemble X. Soit C une partie de X. Que pensez-vous des assertions suivantes ?

a) $\lim_{n\to\infty} A_n^c = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)^c$

b) $\lim_{n\to\infty} (A_n \cap C) = \left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) \cap C$

c) $\lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} A_n \cup \lim_{n\to\infty} B_n$

d) $(\exists n_0 \geq 0\, \forall n \geq n_0\ A_n \subset B_n) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} A_n \subset \lim_{n\to\infty} B_n$

⋆ **Exercice 5.** Soient $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble X et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extraction.

a) Montrer que $\limsup A_{\varphi(n)} \subseteq \limsup A_n$.

b) Montrer que $\liminf A_n \subseteq \liminf A_{\varphi(n)}$.

c) On suppose que (A_n) converge vers $B \subseteq X$. Montrer que $(A_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers B.

d) Trouver un cas où $(A_{\varphi(n)})$ converge mais pas (A_n).

e) On suppose que $(A_{2n})_n$ et $(A_{2n+1})_n$ convergent vers le même ensemble B. Montrer que (A_n) tend aussi vers B.

⋆ **Exercice 6.**

a) Déterminer $\lim_n \left[-\frac{1}{n}, 1\right]$ et $\lim_n \left]-\frac{1}{n}, 1\right]$.

b) Donner un exemple de suite non constante de parties de $\mathbb{R}$ dont la limite est $]0, 1]$.

c) Déterminer les limites supérieure et inférieure de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de parties de $\mathbb{R}$ définie par

$$B_{2n-1} = \left]-2 - \frac{1}{n}, 1\right] \quad \text{et} \quad B_{2n} = \left[-1, 2 + \frac{1}{n^2}\right[.$$

d) Existe-t-il une suite d'ensembles de limite supérieure $[-1, 2]$ et de limite inférieure $[-2, 1]$?

e) Trouver une condition portant sur les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui soit nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$\lim_n \, [a_n, b_n] = [-1, 1[.$$

f) Est-il possible que $\lim_n [a_n, 6]$ n'existe pas quand la suite réelle a converge vers 5 ?

Pour aller plus loin...

Exercice 7. Existe-t-il une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ infinis et deux à deux disjoints ?

Remarque. On peut même montrer qu'il existe une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ telle que :

– si $X \neq Y$ sont dans $\mathcal{A}$, alors $X \cap Y$ est fini

– la famille $\mathcal{A}$ a le cardinal de $\mathbb{R}$!