TD3. Cardinaux.

Échauffement

⋆ **Exercice 1.**

a) Montrer que $\mathbb{N}^{\{0,1\}}$ est dénombrable, alors que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

b) Montrer que l'ensemble des parties finies d'un ensemble dénombrable est toujours dénombrable.

c) Montrer que l'ensemble des parties infinies d'un ensemble infini n'est jamais dénombrable.

d) Existe-t-il un ensemble infini dont l'ensemble des parties dénombrables n'est que dénombrable ?

Ensembles dénombrables

⋆ **Exercice 2.**

a) Montrer que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dénombrable. (On pourra considérer les ensembles $J(n) = \{x \in]a,b[\; ; \; |f(x+) - f(x-)| > 1/n\}$...)

b) Qu'en est-il pour une fonction réelle croissante définie sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

Exercice 3. On rappelle qu'un nombre réel est dit algébrique s'il est racine d'un polynôme à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des réels algébriques est dénombrable.

Quel cardinal ?

⋆ **Exercice 4.** Soit X un ensemble infini. On admet que $\operatorname{Card} X^2 = \operatorname{Card} X$. Montrer que $\operatorname{Card} X^X = \operatorname{Card} \mathcal{P}(X)$.

⋆ **Exercice 5.** Reconnaître dans la liste ci-après les ensembles dont le cardinal est égal à celui de $\mathbb{N}$, ceux dont le cardinal vaut celui de $\mathbb{R}$, et ceux ayant même cardinal que l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.

a) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$	b) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$	c) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$	d) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$	e) $\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N}^n$
f) $\mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$	g) $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	h) $\mathbb{N}^{\mathbb{Q}}$	i) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$	j) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$

k) $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ l) $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ m) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n) $\mathbb{N}^{\mathbb{R}}$ o) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

p) l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$

q) l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^2$

r) l'ensemble des fonctions continues réelles

s) l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$

t) l'ensemble des polygones du plan $\mathbb{R}^2$ dont chaque sommet est élément de $\mathbb{Q}^2$

Pour aller plus loin…

Exercice 6. [théorème de Cantor] Montrer que si A est un ensemble, il n'existe pas de surjection de A sur $\mathcal{P}(A)$.

Exercice 7. [théorème de Cantor-Bernstein] Soient A et B deux ensembles ; on suppose qu'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A. Montrer sans théorie des cardinaux qu'il existe une bijection entre A et B.
On pourra procéder comme suit. Poser $C_0 = A \setminus g(B)$, pour tout n entier, $C_{n+1} = g(f(C_n))$, et $C = \bigcup_n C_n$. Montrer que $C = C_0 \cup g(f(C))$, puis que $g(B \setminus f(C)) = A \setminus C$. Montrer que f induit une bijection entre C et $f(C)$, et g une bijection entre $B \setminus f(C)$ et $A \setminus C$. Conclure.

Remarque. Une petite remarque terminologique : $\operatorname{Card} \mathbb{R}$ est parfois appelé "la puissance du continu", ou "le continu". Cela ne va pas sans créer quelques malentendus : "puissance" signifie ici "cardinal", et n'a aucun rapport avec la fonction puissance $\mathcal{P}(X)$.

Le coin du curieux. Tous les ensembles que nous avons rencontrés ont un cardinal agréable, qui se ramène plus ou moins facilement à celui d'un ensemble bien connu ($\mathbb{N}$, ou $\mathbb{R}$, ou $\mathcal{P}(\mathbb{R})$). Une question reste en suspens : tout sous-ensemble infini non dénombrable de $\mathbb{R}$ est-il en bijection avec $\mathbb{R}$? Cette propriété, baptisée "hypothèse du continu", a fait couler beaucoup d'encre. Cantor s'est usé la santé à tenter de la montrer ; Hilbert l'inscrivit en tête de ses problèmes pour le vingtième siècle. Gödel puis Cohen (ce dernier obtint ainsi la médaille Fields) montrèrent qu'elle n'est pas décidable sur la base des axiomes de Zermelo et Fraenkel.
Une autre question est donc de comprendre pourquoi malgré cette "indécidabilité de l'hypothèse du continu", nous continuons dans ce cours à ne rencontrer que des ensembles dont nous savons toujours déterminer le cardinal !