# TD6. Rappels de topologie. Ensemble de Cantor.

## Échauffements

⋆ **Exercice 1.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. Soit $f : X \to Y$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) L'image réciproque par $f$ de tout ouvert est un ouvert.
b) L'image réciproque par $f$ de tout fermé est un fermé.
c) Pour tout $x$ de $X$, l'image réciproque par $f$ de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de $x$.

**Exercice 2.** Donner un exemple de suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n$, $A_n$ est infini et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

**Exercice 3.** Dans un espace métrique $E$, un ensemble $A$ est dit dense par rapport à un ensemble $B$, si tout point de $B$ est un point adhérent à $A$, en d'autres termes si $B \subset \overline{A}$ (ou, ce qui est équivalent, si, pour tout $x \in B$, il existe une suite à valeurs dans $A$ convergeant vers $B$).
Montrer que si $A$ est dense par rapport à $B$, et $B$ est dense par rapport à $C$, alors $A$ est dense par rapport à $C$.

## Topologie générale

**Exercice 4.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace topologique (ou métrique). Supposons qu'elle converge vers $l$, et posons $K = \{l\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{u_n\}$. Montrer que $K$ est compact.

⋆ **Exercice 5.** Soit $K$ un espace topologique compact. Montrer que si $F \subseteq K$ est fermé, alors $F$ est compact. (K n'est pas nécessairement un espace métrique. Il faut donc utiliser la notion de compacité de Borel-Lebesgue. )

⋆ **Exercice 6.**

a) Montrer que l'image continue d'un compact est un compact.
b) On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une topologie en ajoutant aux ouverts usuels $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ les unions d'ouverts de la forme $\Omega \cup ]a, +\infty]$ et $\Omega \cup [-\infty, a[$ où $a$ décrit $\mathbb{R}$ et $\Omega$ décrit $\mathcal{O}$. Montrer que $\overline{\mathbb{R}}$, muni de cette topologie, est homéomorphe à $[0, 1]$.
c) En déduire que $\overline{\mathbb{R}}$ est compact.

**Exercice 7.** Soit $E$ un espace métrique, et $A \subset E$, $A \neq \emptyset$. On définit $d(x, A) = \inf_{y\in A} d(x, y)$.

a) Montrer que $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
b) Établir que pour tout $x \in E$, $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
c) Que dire de $x$ tel que $d(x, A) = 0$ ?

# Pour aller plus loin...

⋆ **Exercice 8.** [L'ensemble triadique de Cantor]
On construit une suite d'ensembles récursivement comme suit :

$$F_0 := [0,1]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} := \frac{F_n}{3} \cup \frac{2+F_n}{3}$$

a) Montrer qu'il s'agit d'une suite décroissante de fermés.
b) Donner rigoureusement un sens à $F_\infty$.
c) Montrer que $F_\infty$ est compact.
d) Montrer que $F_\infty$ est totalement discontinu (ne contient aucun segment d'intérieur non vide).
e) Caractériser les points de $F_\infty$.
f) Montrer que $F_\infty$ est sans point isolé ($x \in F_\infty$ est dit isolé s'il possède un voisinage $V$ tel que $V \cap F_\infty = \{x\}$).
g) Montrer que $F_\infty$ est équipotent à $\mathbb{R}$.
h) Montrer que $F_\infty$ est homéomorphe à $2^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit (de Tychonoff).

# Le coin du curieux

Il peut être prouvé que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est du cardinal de $\mathbb{R}$ seulement, et non du cardinal ses parties $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Ainsi il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ non boréliens.
Si la mesure de Lebesgue est bien définie sur la tribu borélienne, on peut la compléter avec les parties incluses dans des boréliens de mesure nulle. La mesure de Lebesgue est alors définie sur une tribu *complétée* $L$, dite de Lebesgue.
Cette tribu est bien plus grande que la tribu borélienne. Pour le voir, comme l'ensemble triadique de Cantor $F_\infty$ est un borélien de mesure nulle, $\mathcal{P}(F_\infty) \subset L \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, ce qui implique une inégalité sur les cardinaux. De plus $F_\infty$ a la puissance du continu, donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(F_\infty)) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$, et l'égalité $\mathrm{Card}(L) = \mathrm{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$ est prouvée.

A ce niveau, l'argument de cardinalité ne permet plus d'affirmer qu'il existe des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dans la tribu complétée. Des constructions existent comme l'ensemble de Vitali donné dans le polycopié ou le paradoxe de Banach-Tarski, mais font toutes appel à l'axiome du choix ! A cet égard, on peut se demander si l'axiome du choix est essentiel.

Le surprise fut au rendez-vous : Robert Solovay a répondu de façon satisfaisante au problème en démontrant que la proposition "Tout ensemble de réels est Lebesgue mesurable" est consistante avec les axiomes ZF sans l'axiome du choix ! Ainsi dans le seul cadre des axiomes ZF, l'existence de non-mesurables réels est une proposition indécidable.