TD9. Intégration. Convergence monotone. Lemme de Fatou.

Echauffements

Exercice 1. Vrai ou Faux ? Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Si $f = \mathbb{1}_A$, avec $A \in \mathcal{A}$, alors $\int_X f d\mu = \mu(A)$.

b) Si $f : X \to [0, +\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}\{+\infty\}) = 0$, alors f est intégrable.

c) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

d) Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions mesurables positives et f sa limite.

i) $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$ toujours.

ii) $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$ si $\exists N$ tel que $\int f_N d\mu < \infty$.

iii) $\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$ ssi $\exists N$ tel que $\int f_N d\mu < \infty$.

iv) $\int f d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$ toujours.

Exercice 2. Soit (f_n) une suite d'applications boréliennes de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$. Dans les quatre cas suivants, montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}^+} f_n d\lambda)_n$ converge et déterminer sa limite (aucun calcul d'intégrale n'est exigé).

a) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$,

b) $f_n(x) = \dfrac{ne^{-nx}}{\sqrt{1 + n^2x^2}}$,

c) $f_n(x) = \sin(nx)\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$,

d) $f_n(x) = |cos(x)|^{1/n}e^{-x}$.

⋆ **Exercice 3.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{A}-$mesurable positive. Montrer qu'alors :

$$\int_X f d\mu = 0 \text{ si, et seulement si, } f \text{ est négligeable, c'est-à-dire } f = 0 \ \mu - p.p..$$

Quelques applications du théorème de convergence monotone

⋆ **Exercice 4. Ensembles de niveau.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Pour $t > 0$, on pose $S_f(t) = \{x \in X, f(x) > t\}$ et $\Psi_f(t) = \mu(S_f(t))$. Montrer que

$$\int_X f d\mu = \int_0^\infty \Psi_f(t) dt.$$

$\star$ **Exercice 5.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\int_A f d\mu = 0$. Montrer que $f = 0$ μ-presque partout.

b) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et F un fermé de $\mathbb{R}$ tel que :

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{A} \text{ tel que } \mu(A) > 0, \text{ on a } \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in F.$$

i) Soit $I \subset F^c$ un intervalle ouvert. Montrer que $\mu(f^{-1}(I)) = 0$.

ii) En déduire que $f(x) \in F$ pour presque tout x.

$\star$ **Exercice 6.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré de masse totale finie et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} n\mu(\{n \leq |f| < n+1\}) < +\infty$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mu(\{k \leq |f| < k+1\}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\{|f| \geq k\}) - n\mu(\{|f| \geq n+1\})$.

c) Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ décroissante, convergente vers 0 et telle que la suite $v_n = \sum_{k=1}^n u_k - nu_{n+1}$ est bornée. Montrer que : $\forall p \geq n$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k - nu_{p+1} \leq v_p$. En déduire que : $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n < +\infty$.

d) Montrer que $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ si et seulement si $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mu(\{|f| \geq n\}) < +\infty$.

e) Donner un contre-exemple lorsque $\mu(X) = +\infty$.

Exercice 7.

a) **Lemme de Borel-Cantelli.** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables tels que $\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mu(\limsup_n A_n) = 0$.

b) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables telles que $\int_X |f_n|^2 d\mu \leq M$ pour tout $n \geq 1$, pour un certain $M > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathcal{A}$ de mesure nulle tel que pour tout $x \notin N$, à partir d'un certain rang, $|f_n(x)| < n$.

Exercice 8. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables. Soit $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable telle que :

$$\int_X |\mathbb{1}_{A_n} - f| d\mu \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

a) Montrer que μ-p.p. $|f| \leq 2$.

b) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $f = \mathbb{1}_A$ $\mu - p.p.$.

c) Montrer que si $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \mu(A_n \Delta A) < +\infty$ alors $\mathbb{1}_{A_n} \xrightarrow{\mu-p.p.} 1_A$.

⋆ **Exercice 9.** Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, et $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$.

a) Montrer que :

$$\int_X |f| \mathbb{1}_{\{|f|>n\}} d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

b) En déduire que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$,

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f| d\mu \leq \varepsilon$$

(continuité de l'intégrale par rapport à la mesure).

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et intégrable pour la mesure de Lebesgue. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} f d\lambda, & \text{si } x \geq 0, \\ -\int_{[x,0]} f d\lambda, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Montrer que F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Autour du lemme de Fatou

Exercice 10.

a) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f. On suppose qu'il existe une constante K telle que :

$$\sup_{n\geq 0} \int_X f_n d\mu \leq K.$$

Montrer que $\int_X f d\mu \leq K$.

b) On considère sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1], \lambda)$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par $f_{2n} = \mathbb{1}_{[0,1/2]}$ et $f_{2n+1} = \mathbb{1}_{[1/2,1]}$. Calculer $\int \limsup_n f_n d\lambda$ et $\limsup_n \int f_n d\lambda$.

⋆ **Exercice 11.** Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesurables et positives. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f μ-p.p., et que :

$$\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu < +\infty.$$

Montrer que $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$.

Le coin du curieux

Il est très facile de construire des exemples où $\int \liminf f_n < \liminf \int f_n$, même si la convergence a lieu presque partout. Voici trois situations typiques, sur l'espace $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit φ une fonction continue, positive, nulle en-dehors de l'intervalle $[0,1]$, non identiquement nulle. Pour $n \geq 1$ on définit

$$\begin{cases} f_n(x) = n\varphi(nx), \\ g_n(x) = n^{-1}\varphi(n^{-1}x), \\ h_n(x) = \varphi(x-n). \end{cases}$$

Alors les suites de fonctions (f_n), (g_n) et (h_n) convergent vers 0 partout sur $\mathbb{R}$, pourtant il est facile de montrer, par des changements de variables évidents, que $\int f_n = \int g_n = \int h_n = \int \varphi$. On dit que la suite (f_n) illustre un phénomène de **concentration** (toute la masse de la suite se concentre près de 0), la suite (g_n) un phénomène d'**évanescence** (toute la masse part à l'infini de manière diffuse), tandis que la suite (h_n) présente un comportement de **bosse glissante** (la masse « glisse »à l'infini, sans s'étaler).