TD3. Mesure image. Changement de variable.

Exercice 1.

On note $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ l'espace euclidien usuel de dimension n et $B(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| < r\}$ la boule euclidienne de rayon $r > 0$. On va calculer le volume V_1 de la boule unité $B(0,1)$ en jouant avec la fonction Γ. On rappelle que pour $s > 0$, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$.

a) Montrer que $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \pi^{\frac{n}{2}}$.

b) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = \int_0^{+\infty} \lambda_n(\{x \in \mathbb{R}^n : e^{-\|x\|^2} > t\})dt\,.$$

c) En utilisant l'homogénéité de la fonction volume, déduire de la formule ci-dessus que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} d\lambda_n(x) = V_1 \int_0^1 (-\ln t)^{\frac{n}{2}} dt\,.$$

d) En déduire que $V_1 = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.

e) Montrer que pour $s > 1$, on a $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$. En déduire par récurrence la valeur de $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, pour tout entier naturel n, puis le volume V_1 de la boule unité, en toute dimension :

$$V_1 = \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & \text{si} \quad n = 2k \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \dfrac{2^{k+1}\pi^k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} & \text{si} \quad n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\}$ la boule unité correspondante.

a) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction C^1 décroissante, tendant vers 0 à l'infini. Montrer qu'il existe une constante $c(n,\varphi)$ que l'on précisera, ne dépendant que de φ et de n, telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|)\, dx = c(n,\varphi)|K|,$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue (ou volume) sur $\mathbb{R}^n$.

b) En déduire qu'il existe une constante c_n ne dépendant que de n (et pas de la norme choisie) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|}\, dx = c_n|K|$$

c) Montrer que si B est la boule unité euclidienne pour la structure euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$, on a

$$|B| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces de probabilité. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des mesures de probabilité sur le produit $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ qui ont μ et ν pour marginales, c'est-à-dire que $\pi \in \mathcal{P}$ si π est une probabilité sur le produit telle que μ et ν sont les mesures image respectives de π par les projections $(x,y) \in (X,Y) \mapsto x$ et $(x,y) \in (X,Y) \mapsto y$.

a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\mu(A) = \pi(A \times Y) \quad \text{ et } \nu(B) = \pi(X \times B).$$

b) Montrer que $\mathcal{P}$ est non-vide.

c) Soit $T : X \to Y$ une application mesurable, on note $G(T) = \{(x, y) \; ; \; x \in X, \; y = T(x)\} \subset X \times Y$ son graphe. On se donne $\pi \in \mathcal{P}$ telle que $\pi(E) = \pi(E \cap G(T))$ pour tout $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Montrer que la mesure image de μ par T est égale à ν.

Exercice 4. Soit Δ et D deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \Delta \to D$ un C^1-difféomorphisme de jacobien J_φ.

a) Montrer que J_φ est intégrable sur Δ si et seulement si $\lambda_d(D) < +\infty$.

b) Montrer que J_φ est borné sur Δ si et seulement si il existe $c > 0$ tel que, pour tout ouvert $\Omega \subset \Delta$, $\lambda_d(\varphi(\Omega)) \leq c\lambda_d(\Omega)$.

Exercice 5. Soit $\Delta =]0,1[^2 \times] - \pi, \pi[$ et $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $\varphi(u, v, w) = (u, uv \cos w, v \sin w)$.

a) Montrer que φ est un C^1 difféomorphisme de Δ sur son image.

b) Calculer $\lambda_3(\varphi(\Delta))$.

Exercice 6.

a) Déterminer les ouverts connexes maximaux Δ et D de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que l'application φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(u, v) = (u^2 + v^2, 2uv)$ définisse un C^1-difféomorphisme de Δ sur D.

b) En déduire la valeur de $\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4| e^{-(u+v)^2} du dv$.

Exercice 7.

a) Déterminer l'image $A \subset \mathbb{R}^3$ de l'application définie sur $]0, +\infty[\times]0, \pi[\times] - \pi, \pi[$ par $f(r, \theta, \varphi) = (r \sin\theta \cos\varphi, r \sin\theta \sin\varphi, r \cos\theta)$, sa matrice jacobienne et le déterminant de celle-ci.

b) Utiliser le changement de variables sphérique défini à la question précédente pour calculer le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^3$.

c) Calculer le volume d'une calotte (l'intersection de la boule unité avec le demi-espace $r \cos\theta > a$ pour $0 < a < 1$).

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable.

a) Montrer qu'il existe un réel $\nu_n > 0$ indépendant de f tel que

$$\int_{(\mathbb{R}_*^+)^n} f(x_1 + \ldots + x_n) x_1^{a_1 - 1} \ldots x_n^{a_n - 1} d\lambda_n(x) = \nu_n \int_0^{+\infty} f(t) t^{a_1 + \ldots + a_n - 1} dt \, .$$

On pourra effectuer le changement de variable $t = x_1 + \ldots + x_n$ et $x_i = t\zeta_i$ si $1 \leq i \leq n - 1$.

b) Pour $a_1, \ldots, a_n > 0$, calculer ν_n en termes de la fonction β, définie par

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt \quad \text{pour } x, y > 0 \, .$$

c) En déduire qu'il existe une constante $\omega_n > 0$ indépendante de f telle que

$$\int_{(\mathbb{R}_*^+)^n} f(x_1^{b_1} + \ldots + x_n^{b_n}) x_1^{a_1 - 1} \ldots x_n^{a_n - 1} d\lambda_n(x) = \omega_n \int_0^{+\infty} f(t) t^{\frac{a_1}{b_1} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} - 1} dt \, .$$

d) En déduire le volume de la boule unité pour la norme $p \geq 1$ dans $\mathbb{R}^n$.

e) En déduire la formule d'intégration des fonctions radiales (en norme euclidienne $| \cdot |$)

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|) d\lambda_n(x) = \mu_n \int_0^{+\infty} f(r) r^{n-1} dr \, .$$