Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désignera dans ce chapitre par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Normes

Définition 2.1.1. Une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ est une *norme* sur E si elle vérifie
i) *Séparation* : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
ii) *Homogénéité* : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$;
iii) *Inégalité triangulaire* : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout x, $y \in E$.
On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un *espace vectoriel normé*.

On vérifie aisément que l'application

$$(x, y) \in E \times E \mapsto \|x - y\|$$

est une distance sur E ce qui confère à E une structure d'espace métrique. La structure d'espace vectoriel normé rend continu les applications canoniques données par la loi interne et la loi externe.

Proposition 2.1.2. *Les applications $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ et $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$ sont continues.*

Démonstration. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0,$$

ce qui montre que $x_n + y_n \to x + y$.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$, alors d'après la propriété d'homogénéité et de nouveau l'inégalité triangulaire,

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n - \lambda)x_n + \lambda(x_n - x)\| \leq |\lambda_n - \lambda|\|x_n\| + |\lambda|\|x_n - x\|.$$

Comme $x_n \to x$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \leq M|\lambda_n - \lambda| + |\lambda|\|x_n - x\| \to 0,$$

ce qui montre que $\lambda_n x_n \to \lambda x$ dans E. □

Définition 2.1.3. On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé complet.

Exemple 2.1.4. Un premier exemple que nous étudierons plus en détail dans la section 2.2 est l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^d$. On montre que l'application

$$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d \mapsto |x|_\infty := \sup_{1\leq i\leq d} |x_i|$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^d$. L'espace $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ est de plus un espace de Banach.

Exemple 2.1.5. Un deuxième exemple en dimension infinie (mais pas trop grande quand même) est donné par des espaces de suites. On définit

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \begin{cases} \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

qui sont des espaces vectoriels normés pour la norme

$$\|x\|_{\ell^p(\mathbb{N})} = \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L'espace

$$c_0(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$ est également un espace vectoriel normé. Les espaces $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^p(\mathbb{N})})$ et $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})})$ sont des espaces de Banach.

Exemple 2.1.6. Un troisième exemple que nous étudierons en détail au Chapitre 3 est l'espace $\mathcal{C}_b(X)$ des fonctions $f : (X, d) \to \mathbb{K}$ continues bornée sur un espace métrique (X, d) à valeurs dans $\mathbb{K}$. Muni de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

cet espace est un espace de Banach.

Exemple 2.1.7. Un dernier exemple qui sera étudié au Chapitre 4 est l'espace $L^p(X)$ des (classes d'équivalences de) fonctions $\mathcal{A}$-mesurables $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{K}$ (où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré) à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\|f\|_{L^p(X)} := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{C > 0 : \ \mu(\{|f| > C\}) = 0\} < \infty & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les espaces $(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p(X)})$ sont des espaces de Banach. Notons que les espaces de suites $\ell^p(\mathbb{N})$ correspondent aux espaces $L^p(X)$ quand $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$, où $\#$ est la mesure de comptage.

2.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Nous allons commencer par nous intéresser à l'espace vectoriel normé de dimension finie $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$. Le résultat fondamental suivant permet de caractériser toutes les parties compactes de $\mathbb{K}^d$.

Théorème 2.2.1 (Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On se ramène au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (quitte à considérer séparément les parties réelles et imaginaires dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Etape 1 : Le cas $d = 1$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$, il existe $M > 0$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$y_k := \sup_{n\geq k} x_n \in [-M, M]$$

de sorte que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, étant décroissante et minorée par $-M$, converge vers une limite notée ℓ.

Soit $k(1) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|y_{k(1)} - \ell| \leq \frac{1}{2}.$$

Par définition du sup, il existe un entier $\sigma(1) \geq k(1)$ tel que

$$x_{\sigma(1)} \leq y_{k(1)} \leq x_{\sigma(1)} + \frac{1}{2},$$

ce qui implique que

$$|x_{\sigma(1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(1)} - y_{k(1)}| + |y_{k(1)} - \ell| \leq 1.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe des entiers $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ tels que

$$|x_{\sigma(k)} - \ell| \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq p.$$

Comme $y_k \to \ell$, il existe $k(p+1) \geq \sigma(p) + 1$ tel que

$$|y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{2(p+1)}.$$

Par ailleurs, par définition du sup, il existe un entier $\sigma(p+1) \geq k(p+1)$ tel que

$$x_{\sigma(p+1)} \leq y_{k(p+1)} \leq x_{\sigma(p+1)} + \frac{1}{2(p+1)},$$

ce qui montre que

$$|x_{\sigma(p+1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(p+1)} - y_{k(p+1)}| + |y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{p+1}.$$

On a donc montré par récurrence l'existence d'une extraction $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ telle que

$$|x_{\sigma(p)} - \ell| \leq \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui donne, par passage à la limite, que $x_{\sigma(p)} \to \ell$.

Etape 2 : Le cas $d \geq 2$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(\mathbb{R}^d, |\cdot|_\infty)$, il existe un $M > 0$ tel que $|x_n|_\infty \leq M$. En particulier, comme $|(x_n)_i| \leq |x_n|_\infty$ pour tout $1 \leq i \leq d$, on en déduit que chacune des suites numériques $((x_n)_i)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$. Par conséquent elles admettent chacune une sous-suite convergente. Plus précisément :

— pour $i = 1$, il existe une extraction $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $a_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x_{\sigma_1(n)})_1 \to a_1;$$

— pour $i = 2$, la suite $((x_{\sigma_1(n)})_2)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $a_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x_{\sigma_1\circ\sigma_2(n))})_2 \to a_2;$$

— ...

— On suppose qu'il existe des extractions $\sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $a_1, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $1 \leq i \leq d-1$ on a

$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i \to a_i.$$

La suite $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_{d-1}(n)})_d)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $a_d \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_d(n)})_d \to a_d.$$

Posons $\sigma := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante. De plus, pour tout $1 \leq i \leq d$, la suite $((x_{\sigma(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme cette dernière converge vers a_i dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $(x_{\sigma(n)})_i \to a_i$ dans $\mathbb{R}$ et donc $x_{\sigma(n)} \to a$ dans $\mathbb{R}^d$. □

Corollaire 2.2.2. *Les parties compactes de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.3.4, toute partie compacte de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ est fermée et bornée dans cet espace. Réciproquement si K est fermé et borné dans $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, le théorème de Bolzano-Weierstrass montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers un certain $x \in \mathbb{K}^d$. Comme K est fermé, la Proposition 1.1.10 montre que $x \in K$, et donc K est compact. □

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérerons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale à $d \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ désigne une base de E, alors tout élément $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \quad \text{avec } (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d.$$

On définit la quantité

$$\|x\|_* := \max_{1 \le i \le d} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in E, \tag{2.2.1}$$

et on montre aisément qu'il s'agit effectivement d'une norme sur E.

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty) \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_d). \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que Φ est une application linéaire bijective et que $|\Phi(x)|_\infty = \|x\|_*$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme isométrique de $(E, \|\cdot\|_*)$ sur $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$.

La caractérisation des parties compactes de $\mathbb{K}^d$ obtenue au Corollaire 2.2.2 s'étend aux espaces vectoriels de dimension finie. Pour ce faire, il convient de remarquer que le choix de la norme n'influe pas sur la topologie et donc sur la description des compacts.

Théorème 2.2.3. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soient E un espace vectoriel de dimension finie d et N une norme sur E. Nous allons montrer que les normes N et $\|\cdot\|_*$ sont équivalentes.

Etape 1 : Montrons que l'application

$$\begin{array}{rcl} N : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tout x et $y \in E$, d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de N, on a

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| \le N(x-y) = N\left(\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)e_i\right) \\ \le \sum_{i=1}^d N((x_i - y_i)e_i) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| N(e_i) \le L\|x-y\|_*, \end{aligned}$$

où l'on a noté $L := \sum_{i=1}^d N(e_i)$.

Etape 2 : Montrons que l'ensemble $S := \{x \in E : \|x\|_* = 1\}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Le Corollaire 2.2.2 montre que l'ensemble

$$\tilde{S} := \left\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d : \ |(x_1, \dots, x_d)|_\infty = 1\right\}$$

est un compact de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ car il est fermé (comme image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par la fonction continue $(x_1, \dots, x_d) \mapsto |(x_1, \dots, x_d)|_\infty$) et borné. Grâce à la continuité de Φ^{-1}, la Proposition 1.3.6 montre que $S = \Phi^{-1}(\tilde{S})$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$.

Etape 3 : Comme N est continue sur E, elle l'est en particulier sur le compact S. La Proposition 1.3.7 montre alors l'existence d'un minimum $a \in S$ et d'un maximum $b \in S$ tels que

$$\|a\|_* = \|b\|_* = 1, \quad N(a) \leq N(x) \leq N(b) \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Notons $m = N(a)$ et $M = N(b)$. Comme $\|a\|_* = 1$, on en déduit que $a \neq 0$ et donc que $N(a) > 0$. Par conséquent, $m > 0$, $M > 0$ et pour tout $y \in E$ ($y \neq 0$), on a $y/\|y\|_* \in S$, ce qui implique

$$m \leq N\left(\frac{y}{\|y\|_*}\right) \leq M.$$

Par la propriété d'homogénéité de la norme N, on en déduit que

$$m\|y\|_* \leq N(y) \leq M\|y\|_* \quad \text{pour tout } y \neq 0. \tag{2.2.2}$$

Cette inégalité reste bien évidemment vraie si $y = 0$, ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_*$ et N sont équivalentes.

Enfin si N_1 et N_2 sont deux normes quelconques sur E, en combinant les inégalités (2.2.2) appliquées à N_1 et N_2, on en déduit que N_1 et N_2 sont effectivement équivalentes. □

En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 2.2.4. *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie d et $K \subset E$ un ensemble fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|)$. D'après le Théorème 2.2.3, K est également fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Par continuité de Φ^{-1}, l'ensemble $\Phi(K) = (\Phi^{-1})^{-1}(K)$ est fermé dans $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$. Comme Φ est une isométrie $\Phi(K)$ est également borné dans $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$. L'ensemble $\Phi(K)$ est donc un compact de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ en vertu du Corollaire 2.2.2. La continuité de Φ^{-1} et la Proposition 1.3.6 montrent alors que $K = \Phi^{-1}(\Phi(K))$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$ puis également de $(E, \|\cdot\|)$ par une nouvelle application du Théorème 2.2.3. Réciproquement, d'après le Corollaire 1.3.4, toute partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée. □

Cette caractérisation est fausse en dimension infinie, comme l'atteste le résultat suivant.

Théorème 2.2.5 (Riesz). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Comme la boule unité fermée $B = \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$ est fermée et bornée, elle est compacte en vertu du Théorème 2.2.4.

Réciproquement, supposons que B est compacte. Par la propriété de Borel-Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_N \in B$ tels que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon). \tag{2.2.3}$$

Soit $F = \mathrm{Vect}\{x_i\}_{1\le i\le N}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $F = E$, alors le résultat suit. Dans le cas contraire, on peut trouver un $x \in E \setminus F$. Notons $d = \mathrm{dist}(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$. Comme F est de dimension finie, F est fermé dans E et donc $d > 0$. On peut alors trouver un $y_\varepsilon \in F$ tel que

$$d \le \|x - y_\varepsilon\| \le \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Posons $z_\varepsilon = \frac{x-y_\varepsilon}{\|x-y_\varepsilon\|} \in B$. Alors pour tout $y \in F$,

$$\|z_\varepsilon - y\| = \frac{\|x - y_\varepsilon - \|x - y_\varepsilon\|y\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \ge d\frac{1-\varepsilon}{d} = 1-\varepsilon$$

car $y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\|y \in F$, ce qui montre que

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \ge 1 - \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après (2.2.3), il existe un $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $z_\varepsilon \in B(x_i, \varepsilon)$ et donc, puisque $x_i \in F$,

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \le \|z_\varepsilon - x_i\| < \varepsilon.$$

On aboutit à une contradiction en choisissant $\varepsilon \le 1/2$. □

Remarque 2.2.6. Cette propriété est propre aux espaces vectoriels normés. Il existe en particulier des espaces métriques de "dimension infinie" pour lesquels les parties fermées et bornées sont compactes. C'est notamment le cas de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, ainsi que de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (pour lesquels il convient de définir une distance).

2.3 Applications linéaires continues

Théorème 2.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en 0 ;*
2. *f est continue ;*
3. *f est uniformément continue ;*
4. *f est Lipschitzienne ;*
5. *Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$,*

$$\|f(x)\|_F \le M\|x\|_E.$$

Démonstration. Par linéarité de f, il est clair que 5. ⇒ 4. ⇒ 3. ⇒ 2. ⇒ 1. Il reste à montrer que 1. implique 5. Par continuité de f en 0, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\|_E \le \delta$, alors $\|f(x)\|_F \le 1$. Soit $x \in E$ quelconque (non nul) de sorte que $x' = \delta x/\|x\|_E$ satisfait

$\|x'\|_E \leq \delta$. Alors $\|f(x')\|_F \leq 1$, ce qui implique par linéarité de f et homogénéité de la norme que

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E,$$

qui reste vrai pour $x = 0$. □

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Il s'agit clairement d'un espace vectoriel. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit la quantité

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{0<\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 2.3.2. *La quantité $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ ce qui en fait un espace vectoriel normé.*

Démonstration. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, comme $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F, il vient

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)},$$

ce qui établit l'homogénéité de la norme. On a évidemment que $\|0\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$, et si $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$, alors $\|f(x)\|_F = 0$ pour tout $x \in E$, ce qui implique que $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$, soit $f = 0$. Enfin, si f_1 et $f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, quel que soit $x \in E$ ($x \neq 0$), on a

$$\|(f_1+f_2)(x)\|_F = \|f_1(x)+f_2(x)\|_F \leq \|f_1(x)\|_F+\|f_2(x)\|_F \leq (\|f_1\|_{\mathcal{L}(E,F)}+\|f_2\|_{\mathcal{L}(E,F)})\|x\|_E.$$

En divisant par $\|x\|_E$ puis en passant au sup dans le membre de gauche, il vient $\|f_1 + f_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|f_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, ce qui montre l'inégalité triangulaire. □

Nous allons maintenant énoncer une condition suffisante pour que $\mathcal{L}(E, F)$ soit un espace de Banach.

Proposition 2.3.3. *Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi. En particulier, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq n_0$,

$$\frac{\|f_n(x) - f_m(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in E. \tag{2.3.1}$$

On en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet. Il existe donc $\ell_x \in F$ tel que $f_n(x) \to \ell_x$. On montre facilement que $x \mapsto \ell_x$ est linéaire et l'on note $\ell_x = f(x)$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$ elle est bornée dans cet espace et donc il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C$. Par conséquent, $\|f_n(x)\|_F \leq \|f_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E \leq C\|x\|_E$. Comme $f_n(x) \to f(x)$ dans F, alors

$\|f_n(x)\|_F \to \|f(x)\|_F$ et il vient par passage à la limite que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Enfin, dans (2.3.1), on passe à la limite quand $m \to \infty$ et on obtient

$$\frac{\|f_n(x) - f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq n_0 \text{ et tout } x \in E.$$

Par passage au sup en x dans le membre de gauche, il s'ensuit que $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui montre que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. □

Le résultat suivant permet de passer d'une majoration ponctuelle à une majoration uniforme.

Théorème 2.3.4 (**Banach-Steinhaus**). *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ est une famille dans $\mathcal{L}(E,F)$ telle que*

$$\sup_{i\in I} \|f_i(x)\|_F < \infty \quad \textit{pour tout } x \in E,$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|f_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Démonstration. On pose $X_n := \{x \in E : \sup_{i\in I} \|f_i(x)\|_F \leq n\}$. Comme f_i est continue, $x \mapsto \|f_i(x)\|_F$ l'est également et l'ensemble $\{x \in E : \|f_i(x)\|_F \leq n\}$ est fermé. Par suite $X_n = \bigcap_{i\in I}\{x \in E : \|f_i(x)\|_F \leq n\}$ est fermé. Par ailleurs, par hypothèse,

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

L'ensemble E étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{n_0} n'est pas d'intérieur vide. Il existe donc un $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$, soit $\|f_i(x)\|_F \leq n_0$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et tout $i \in I$. Si $x \in \overline{B}(0,1)$, alors $x_0 + r_0 x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et donc

$$\|f_i(x)\|_F \leq \frac{1}{r_0}(n_0 + \|f_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|f_i(x_0)\|_F\right).$$

Par passage au sup en x dans le membre de gauche, il vient

$$\|f_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I} \|f_i(x_0)\|_F\right),$$

d'où le résultat. □

Théorème 2.3.5 (**Application ouverte**). *Soient E et F deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application surjective. Alors f est une application ouverte, i.e., pour tout ouvert $U \subset E$, l'ensemble $f(U)$ est ouvert dans F.*

Démonstration. Notons B_E et B_F la boule unité ouverte de E et F, respectivement. Comme f est surjective, on a

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\overline{f(B_E)}.$$

Par conséquent, F étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\overline{f(B_E)}$ n'est pas d'intérieur vide dans F. On peut donc trouver un $y_0 \in F$ et $r_0 > 0$ tels que $y_0 + r_0 B_F \subset n_0\overline{f(B_E)}$. Comme $y_0 \in n_0\overline{f(B_E)}$, par symétrie de B_E par rapport à l'origine, on en déduit que $-y_0 \in n_0\overline{f(B_E)}$, d'où

$$r_0 B_F = -y_0 + y_0 + r_0 B_F \subset n_0\overline{f(B_E)} + n_0\overline{f(B_E)},$$

puis, par convexité de B_E, il vient que $r_0 B_F \subset 2n_0\overline{f(B_E)}$. En posant $c = r_0/(4n_0)$, on a donc montré que

$$2cB_F \subset \overline{f(B_E)}. \tag{2.3.2}$$

Soit $y \in cB_F$, d'après (2.3.2), on a $2y \in \overline{f(B_E)}$, il existe un $x_1 \in \frac{1}{2}B_E$ tel que $\|2y - f(2x_1)\|_F < c$, soit $\|y - f(x_1)\|_F < \frac{c}{2}$. Par récurrence, supposons avoir à notre disposition des éléments $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\|x_k\|_E < 2^{-k}, \quad \|y - f(x_1 + \cdots + x_n)\|_F < c2^{-n}.$$

Alors $2^{n+1}(y - f(x_1 + \cdots + x_n)) \in 2cB_F$ et d'après (2.3.2) il existe donc un $x_{n+1} \in 2^{-n-1}B_E$ tel que $\|2^{n+1}(y - f(x_1 + \cdots + x_n)) - f(2^{n+1}x_{n+1})\|_F < c$, soit

$$\|x_{n+1}\|_E < 2^{-n-1}, \quad \|y - f(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1})\|_F < c2^{-n-1}.$$

Pour tout $n \geq 1$, notons $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$ la suite des sommes partielles. Alors $(s_n)_{n\geq 1}$ définit une suite de Cauchy dans E, complet. Comme $\|s_n\|_E \leq 1$, il existe $x \in \overline{B}_E \subset 2B_E$ tel que $s_n \to x$ dans E et $y = f(x)$. On a donc montré que pour tout $y \in cB_F$, il existe un $x \in 2B_E$ tel que $y = f(x)$, autrement dit,

$$\frac{c}{2}B_F \subset f(B_E).$$

Enfin, si U est un ouvert de E et $y \in f(U)$, il existe un $x \in U$ et $r > 0$ tels que $y = f(x)$ et $x + rB_E \subset U$. Par conséquent, $y + \frac{cr}{2}B_F \subset f(x) + rf(B_E) \subset f(U)$, ce qui montre effectivement que $f(U)$ est ouvert dans F. □

Un corollaire immédiat du théorème de l'application ouverte est le résultat suivant, bien connu en dimension finie, qui assure que l'inverse d'une application linéaire continue reste continue.

Théorème 2.3.6 (Banach). *Soient E et F deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application inversible. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.*

Démonstration. Le théorème de l'application ouverte montre que pour tout ouvert $U \subset E$, l'ensemble $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ est un ouvert de F, ce qui montre que f^{-1} est continue. □

Le résultat suivant donne une caractérisation de la continuité d'une application linéaire en terme de son graphe.

Théorème 2.3.7 (Graphe fermé). *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire. On note $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ le graphe de f. Alors f est continue si et seulement si $G(f)$ est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration. Il est clair que si f est continue, alors son graphe est fermé. Supposons alors que $G(f)$ est fermé dans $E \times F$. Notons $\|x\|'_E := \|x\|_E + \|f(x)\|_F$ et montrons que $(E, \|\cdot\|'_E)$ est un espace de Banach. Le fait que $\|\cdot\|'_E$ est une norme résulte de la linéarité de f. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|'_E)$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Par complétude de ces deux espaces, il existe $x \in E$ et $y \in F$ tels que $x_n \to x$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f(x_n) \to y$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Comme $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$, $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$ dans $E \times F$ et $G(f)$ est fermé dans l'espace produit $E \times F$, on en déduit que $(x, y) \in G(f)$, soit $y = f(x)$. On a montré que $x_n \to x$ dans $(E, \|\cdot\|'_E)$, ce qui établit que $(E, \|\cdot\|'_E)$ est un espace de Banach.

Définissons l'application identité

$$i : (E, \|\cdot\|'_E) \to (E, \|\cdot\|_E)$$

qui à $x \in E$ associe $i(x) = x$. Cette application est évidemment linéaire, inversible. Par ailleurs, pour tout $x \in E$, on a $\|i(x)\|_E = \|x\|_E \le \|x\|_E + \|f(x)\|_F = \|x\|'_E$ ce qui montre qu'elle est continue. Le théorème de Banach implique que son inverse $i^{-1} : (E, \|\cdot\|_E) \to (E, \|\cdot\|'_E)$ est également continue. Il existe donc une constante $c > 0$ telle que

$$\|x\|'_E = \|i^{-1}(x)\|'_E \le c\|x\|_E.$$

Comme $\|x\|'_E \ge \|f(x)\|_F$, il vient $\|f(x)\|_F \le c\|x\|_E$, ce qui montre la continuité de f. $\square$