Chapitre 3

Espaces de fonctions continues

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à montrer des propriétés topologiques d'espaces de fonctions continues d'un espace métrique (X, d) dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On notera

$$\mathcal{C}(X; \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ continue}\}$$

et

$$\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ continue et bornée}\}.$$

Les espaces $\mathcal{C}(X; \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ sont clairement des espaces vectoriels et la quantité

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est finie quelque soit $f \in \mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$. On montre aisément qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$, ce qui confère à $(\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ une structure d'espace vectoriel normé.

3.1 Complétude de $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$

Proposition 3.1.1. *L'espace $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ est complet. Pour ce faire, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ et montrons qu'elle converge uniformément sur X vers une fonction $f \in \mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq n_0$ et pour tout $x \in X$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ complet, ce qui assure l'existence d'un scalaire $f(x) \in \mathbb{K}$ tel que $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{K}$. Par passage à la limite quand $m \to \infty$ dans l'inégalité précédente, puis par passage au sup en x, il vient pour tout $n \geq n_0$,

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui assure que f_n converge uniformément vers f sur X. De plus, l'inégalité précédente montre que $\|f\|_\infty \leq \|f_{n_0}\|_\infty + \varepsilon < \infty$, ce qui assure que f est bornée. Il reste à montrer que la fonction f est continue. Pour ce faire, on utilise la continuité de f_{n_0} qui assure, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que si $y \in X$ et $d(x,y) \leq \delta$, alors $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq \varepsilon$. D'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre bien la continuité de f en x et donc que $f \in \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. □

Remarque 3.1.2. En vertu de la Proposition 1.3.7, si (X,d) est un espace métrique compact, on a que $\mathcal{C}(X;\mathbb{K}) = \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. Dans ce cas, $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

3.2 Séparabilité de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$

Le Théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynômiales. Le Théorème de Stone-Weierstrass donne une généralisation de ce résultat au cas des fonctions continues $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ sur un espace métrique compact (X,d), vu comme une algèbre de Banach muni du produit ponctuel des fonctions. Ce résultat de portée générale donne une caractérisation des sous-algèbres $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ qui sont denses dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$. Nous nous concentrons ici juste sur la condition suffisante dans le cas de fonctions à valeurs réelles ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 3.2.1 (Stone-Weierstrass, cas réel). *Soient (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. On suppose que*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes ;*
- *$\mathcal{A}$ sépare les points, i.e., pour tout x, $y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$.

Nous commençons par montrer le résultat suivant d'approximation polynômiale de la fonction racine carrée.

Lemme 3.2.2. *Il existe une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.*

Démonstration. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} P_0(x) = 0, \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est polynômiale. Montrons par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. En effet, cette propriété est claire pour $n = 0$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors, $P_{n+1}(x) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x)) \\ &\leq P_n(x) + (\sqrt{x} - P_n(x)) \\ &\leq \sqrt{x}, \end{aligned}$$

car $\sqrt{x}-P_n(x)\geq 0$ et $\sqrt{x}+P_n(x)\leq 2\sqrt{x}\leq 2$ pour tout $x\in[0,1]$. On en déduit que, pour tout $x\in[0,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en majorée. Elle converge pontuellement vers une limite $\ell(x)\geq 0$ qui satisfait $\ell(x)=\ell(x)+\frac{1}{2}(x-\ell(x)^2)$, i.e. $\ell(x)=\sqrt{x}$.

Montrons à présent que la convergence est uniforme. Pour ce faire, on remarque que $x\mapsto\sqrt{x}-P_n(x)$ est continue sur $[0,1]$. D'après la Proposition 1.3.7, il existe $x_n\in[0,1]$ tel que

$$\max_{x\in[0,1]}(\sqrt{x}-P_n(x))=\sqrt{x_n}-P_n(x_n).$$

Comme $[0,1]$ est compact, il existe une sous suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{x}\in[0,1]$ tels que $x_{\sigma(n)}\to\bar{x}$. En utilisant le fait que la suite de fonctions $(\sqrt{\cdot}-P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient pour tout $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}(\sqrt{x}-P_{\sigma(n)}(x)) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x_{\sigma(n)}}-P_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\right)\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x_{\sigma(n)}}-P_m(x_{\sigma(n)})\right)\\ &= \sqrt{\bar{x}}-P_m(\bar{x}).\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $m\to\infty$, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,1]}(\sqrt{x}-P_{\sigma(n)}(x))=0.$$

Enfin, en utilisant de nouveau le fait que la suite de fonction $(\sqrt{\cdot}-P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient $\|\sqrt{\cdot}-P_n\|_\infty\to 0$. □

On montre à présent que toute sous-algèbre (fermée) de fonctions continues est stable par passage au maximum et minimum.

Corollaire 3.2.3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 3.2.4, si f et $g\in\overline{\mathcal{A}}$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g)\in\overline{\mathcal{A}}$.*

Démonstration. Par continuité de la somme et du produit, on en déduit que si $\mathcal{A}$ est une algèbre, il en est de même pour $\overline{\mathcal{A}}$. Si $\|f-g\|_\infty=0$, alors $\max(f,g)=\min(f,g)=f=g\in\overline{\mathcal{A}}$. On suppose donc désormais que $\|f-g\|_\infty>0$. On remarque tout d'abord que, du fait que

$$\max(f,g):=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)\ \text{et}\ \min(f,g):=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

il suffit de montrer que $|f-g|\in\overline{\mathcal{A}}$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômiales construite au Lemme 3.2.2. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre, il vient

$$P_n\left(\frac{(f-g)^2}{\|f-g\|_\infty^2}\right)\|f-g\|_\infty\in\overline{\mathcal{A}}$$

et d'après le Lemme 3.2.2,

$$P_n\left(\frac{(f-g)^2}{\|f-g\|_\infty^2}\right)\|f-g\|_\infty\to|f-g|\quad\text{uniformément sur } X.$$

Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermée, on en déduit que $|f-g| \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc que $\max(f,g)$ et $\min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le Théorème de Stone-Weierstrass.

Démonstration du Théorème 3.2.4. La preuve est divisée en quatre étapes.

Etape 1 : Pour tout x, $y \in X$ et tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, si $\alpha = \beta$, il suffit de considérer la fonction constante égale à $\alpha = \beta$. Par ailleurs, si $\alpha \neq \beta$, alors par hypothèse, il existe une fonction $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Dans ce cas, la fonction

$$f := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x)),$$

appartient à $\mathcal{A}$ et satisfait $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Etape 2 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f^x dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, d'après l'étape 1, pour tout $y \in X$, il existe une fonction $f_y^x \in \mathcal{A}$ telle que $f_y^x(x) = h(x)$ et $f_y^x(y) = h(y)$. Comme h et f_y^x sont continues, il existe $r_y^x > 0$ tel que pour tout $z \in B(y, r_y^x)$,

$$|f_y^x(z) - f_y^x(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(y) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Du fait que $f_y^x(y) = h(y)$, on en déduit que $f_y^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in B(y, r_y^x)$. Comme

$$X \subset \bigcup_{y \in X} B(y, r_y^x),$$

par compacité de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{B(y_i, r_{y_i}^x)\}_{1 \leq i \leq l}$. D'après le Corollaire 3.2.3, la fonction

$$f^x := \min_{1 \leq i \leq l} f_{y_i}^x$$

appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ et elle satisfait $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 3 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, soient $x \in X$ et f^x la fonction construite à l'étape 2. Les fonctions f^x et h étant continues, il existe $r'_x > 0$ tel que pour tout $z \in B(x, r'_x)$,

$$|f^x(z) - f^x(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(z) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $f^x(x) = h(x)$, on en déduit que $f^x(z) > h(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in B(x, r'_x)$. On utilise de nouveau la compacité de X pour extraire du recouvrement ouvert $\{B(x, r'_x)\}_{x \in X}$ de X un sous-recouvrement fini $\{B(x_j, r'_{x_j})\}_{1 \leq j \leq m}$. On introduit la fonction

$$f := \max_{1 \leq j \leq m} f^{x_j}$$

qui appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ en vertu du Corollaire 3.2.3, et qui satisfait $h(z)-\varepsilon < f(z) < h(z)+\varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 4 : D'après l'étape 3, pour tout $h \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f_n \to h$ uniformément sur X. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermé, on en déduit que $h \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. □

Théorème 3.2.4 (Stone-Weierstrass, cas complexe). *Soient (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$. On suppose que*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes ;*
- *$\mathcal{A}$ sépare les points ;*
- *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complexe conjugué : si $f \in \mathcal{A}$, alors $\bar{f} \in \mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_\mathbb{R} := \{\mathrm{Re}(f) : f \in \mathcal{A}\}$. Comme $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f+\bar{f})$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(-if)$, on en déduit que $\mathcal{A}_\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$. On montre que $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ qui contient les constantes et qui sépare les points, de sorte que le théorème 3.2.1 assure que $\overline{\mathcal{A}_\mathbb{R}} = \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. Par conséquent, $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X;\mathbb{C})$. □

Nous donnons à présent quelques conséquences du théorème de Stone-Weierstrass.

Corollaire 3.2.5. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K;\mathbb{K})$, il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f sur K.*

Démonstration. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}^N$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ contient les fonctions constantes et sépare les points. En effet, si x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $x_0 \neq y_0$, alors la fonction affine $f : x \mapsto (x-x_0)\cdot(x_0-y_0) + (x-y_0)\cdot(x_0-y_0)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et satisfait $f(x_0) = \|x_0-y_0\|^2 \neq -\|x_0-y_0\|^2 = f(y_0)$ (car $\|x_0-y_0\| \neq 0$). Par ailleurs, si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}[X]$ est stable par passage au complexe conjugué. La conclusion suit du Théorème de Stone-Weierstrass. □

Corollaire 3.2.6. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $\mathcal{C}(K;\mathbb{K})$ est séparable.*

Démonstration. En distinguant les parties réelles et imaginaires, on se ramène au cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. D'après le Corollaire 3.2.5, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}(K)$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{R}[X]$ est séparable pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathbf{P}_n$ (resp. $\mathbf{Q}_n$) l'ensemble des polynômes à coefficients réels (resp. rationnels) de degré inférieur ou égal à n. L'espace $\mathbf{P}_n$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $d=\dim(\mathbf{P}_n)$, on en déduit que $\mathbf{P}_n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^d$. Comme $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{Q}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^d$, il s'ensuit que $\mathbf{Q}_n$ est dénombrable et dense dans $\mathbf{P}_n$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$ (on utilise ici le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Enfin comme $\mathbb{R}[X] = \bigcup_n \mathbf{P}_n$ et $\mathbb{Q}[X] := \bigcup_n \mathbf{Q}_n$, on en déduit que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}[X]$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. □

En général l'espace $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$ n'est pas séparable comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 3.2.7. Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, on considère l'espace $\mathcal{C}_b(]a,b[)$. Nous allons montrer que $\mathcal{C}_b(]a,b[)$ n'est pas séparable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $a_n \to a$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $b_n \to b$. On pose $x_n = \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ et on considère une fonction $\varphi_n \in \mathcal{C}_c(]a,b[)$ telle que $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n(x_n) = 1$ et $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset]a_{n+1}, a_n[$. En notant $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on pose pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\varphi_A := \sum_{n\in A} \varphi_n.$$

Comme $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \cap \mathrm{Supp}(\varphi_m) = \emptyset$ dès que $n \neq m$, la somme définissant φ_A est toujours localement finie même si A est infini. Par conséquent, φ_A est continue et $0 \leq \varphi_A \leq 1$, ce qui montre que $\varphi_A \in \mathcal{C}_b(]a,b[)$.

Supposons que $\mathcal{C}_b(]a,b[)$ est séparable est considérons une famille $D = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui est dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_b(]a,b[)$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on considère le plus petit entier $k_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

On définit ainsi une application $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ qui a toute partie A de $\mathbb{N}$ associe $\Phi(A) := k_A$. Notons que si A et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont tels que $A \neq B$, alors (quitte à échanger les rôles de A et B) il existe $n_0 \in A \setminus B$ et donc

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \geq |\varphi_A(x_{n_0}) - \varphi_B(x_{n_0})| = \varphi_A(x_{n_0}) = 1.$$

Par conséquent, si $k_A = k_B$, on aurait par inégalité triangulaire

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \leq \|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty + \|\varphi_B - f_{k_B}\|_\infty < 1,$$

ce qui est absurde. On a donc montré que si $A \neq B$, alors $k_A \neq k_B$ ce qui établit l'injectivité de l'application Φ, et donc que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ ce qui est impossible car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable.[1]

3.3 Critère de compacité

Nous établissons pour finir un critère de compacité dans l'espace $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$.

Théorème 3.3.1 (Ascoli-Arzela)**.** *Soient (X,d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ telle que*

i) (bornitude) pour tout $x \in X$, il existe $M(x) > 0$ telle que $\sup_n |f_n(x)| \leq M(x)$;

ii) (uniforme équi-continuité) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in X$,

$$d(x,y) \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \leq \varepsilon.$$

1. Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il existerait une bijection $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $E = \{n \in \mathbb{N} : n \notin \Psi(n)\}$. Par surjectivité de Ψ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Psi(n_0) = E$. Si $n_0 \in E$, alors par définition de E on aurait $n_0 \notin \Psi(n_0) = E$ ce qui est impossible. Si $n_0 \notin E$, alors toujours par définition de E, on aurait $n_0 \in \Psi(n_0) = E$ ce qui est de nouveau impossible.

Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *et une fonction* $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ *telles que* $f_{\sigma(n)}$ *converge uniformément vers* f *sur* X*.*

Réciproquement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions de* $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ *uniformément convergente, alors elle est bornée et uniformément équi-continue.*

Démonstration. Pour simplifier, on ne traitera que le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'espace métrique (X, d) étant compact, la Proposition 1.4.2 assure qu'il est séparable. Il existe donc un sous-ensemble D dénombrable et dense dans X.

Etape 1 : Définition de la fonction f sur D. L'ensemble D étant dénombrable, on peut énumérer ses éléments en une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. D'après la propriété de bornitude i), pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(f_n(a_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonal de sous-suite. Pour $j = 0$, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(f_{\sigma_0(n)}(a_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $f(a_0) \in \mathbb{R}$ tels que $f_{\sigma_0(n)}(a_0) \to f(a_0)$. Pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $f(a_0), \dots, f(a_k) \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_j(n)}(a_j) \to f(a_j) \quad \text{pour tout } 0 \le j \le k.$$

La suite $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass permet de nouveau d'extraire une sous-suite notée $(f_{\sigma_0\circ\cdots\sigma_k\circ\sigma_{k+1}(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $f(a_{k+1}) \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_{\sigma(n)} := f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_n(n)}$$

de sorte que $(f_{\sigma(n)}(a_k))_{n\ge k}$ est une sous-suite de $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_k))_{n\ge k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(a_k) = f(a_k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{3.3.1}$$

Etape 2 : Convergence simple. Montrons que pour tout $x \in X$, la suite $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soient ε et δ comme dans la définition de l'uniforme équi-continuité. Par densité de D dans X, il existe un $a \in D$ tel que $d(x, a) \le \delta$. Par conséquent, pour tout n et $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \\
&\qquad \le |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a)| + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| + |f_{\sigma(m)}(a) - f_{\sigma(m)}(x)| \\
&\qquad\qquad \le 2\varepsilon + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)|.
\end{aligned}$$

Comme $a \in D$, d'après l'étape 1, la suite numérique $(f_{\sigma(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc est de Cauchy. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \ge N$, on a $|f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| \le \varepsilon$, ce qui implique que

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \le 3\varepsilon.$$

Ceci montre effectivement que $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc il existe un $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$.

Etape 3 : Uniforme continuité de f. D'après la propriété d'uniforme équi-continuité de f_n, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in X$ avec $d(x,y) \leq \delta$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(y)| \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien l'uniforme continuité de f sur X.

Etape 4 : Convergence uniforme. Soient ε et δ donnés par la propriété ii). Par compacité de X, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_{N_\varepsilon} \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(a_i, \delta/2)$. Donc si $x \in X$, il existe $i \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$ tel que $x \in B(a_i, \delta/2)$ et

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| &\leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a_i)| + |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N_\varepsilon} |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et l'uniforme continuité de f établie à l'étape 3. D'après l'étape 2, on en déduit que $|f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ dès lors que $n \geq n_i$ (qui ne dépend que de ε et de a_i). En notant $n_\varepsilon := \max\{n_1, \ldots, n_{N_\varepsilon}\}$, il vient : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in X$. On en déduit la convergence uniforme de $f_{\sigma(n)}$ vers f sur X.

Etape 5 : Réciproque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}(X)$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$ pour tout $n \geq N$. Comme les fonctions f, $f_0, \ldots, f_N$ sont continues sur le compact X, elles sont uniformément continues d'après le Théorème de Heine. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $\delta_0, \ldots, \delta_N > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$\begin{cases} d(x,y) \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ d(x,y) \leq \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N. \end{cases}$$

On définit $\delta := \min(\eta, \delta_0, \ldots, \delta_N)$ de sorte que si x et $y \in X$, alors

$$d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient finalement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien uniformément équi-continue. □

3.4 Quelques espaces de fonctions continues

Pour simplifier, dans ce qui suit, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Si $K \subset \Omega$ est un compact, on note

$$\mathcal{C}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \ \mathrm{Supp}(f) \subset K\},$$

où $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}}$ désigne le support de f. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega)$, ce qui en fait donc un espace de Banach. On note également

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega \text{ compact}} \mathcal{C}_K(\Omega)$$

l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans Ω. Cet espace n'est pas fermé dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.4.1. En dimension $N = 1$, on pose $\Omega =]-1,1[$ et, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,-1+\frac{1}{n}[\cup]1-\frac{1}{n},1[, \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ \frac{2n}{2-n}(x-1+\frac{1}{n}) & \text{si } x \in]\frac{1}{2},1-\frac{1}{n}[, \\ \frac{2n}{n-2}(x+1-\frac{1}{n}) & \text{si } x \in]-1+\frac{1}{n},-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Clairement $f_n \in \mathcal{C}_c(]-1,1[)$ et $f_n \to f$ uniformément sur $[-1,1]$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \text{si } x \in]\frac{1}{2},1[, \\ 2(x+1) & \text{si } x \in]-1,-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Or $\mathrm{Supp}(f) = [-1,1]$ ce qui montre que $f \notin \mathcal{C}_c(]-1,1[)$.

On note $\mathcal{C}_0(\Omega)$ la fermeture de l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$. Nous allons caractériser l'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 sur le bord de Ω. Avant cela, il convient de rappeler le résultat suivant qui sera utile par la suite.

Lemme 3.4.2 (Urysohn). *Soient K un compact et V un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ tels que $K \subset V$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et* $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.

Démonstration. Soit

$$d := \inf_{x \in K, y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x-y\| = \inf_{x \in K} \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V),$$

où

$$\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V) := \inf_{y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x-y\|.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V)$ étant continue (en fait elle est même 1-Lipschitz) et K étant compact, il existe $\bar{x} \in K$ tel que $d = \mathrm{dist}(\bar{x}, \mathbb{R}^N \setminus V)$. Si $d = 0$, par définition de l'infimum, il existerait une suite $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus V$ telle que $\|\bar{x} - y_j\| \to 0$. L'ensemble $\mathbb{R}^N \setminus V$ étant fermé, on aurait alors $\bar{x} \in \mathbb{R}^N \setminus V$ ce qui est impossible puisque $\bar{x} \in K \subset V$. Par conséquent, $d > 0$ et l'ensemble

$$U := \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, K) < d/2\},$$

est un ouvert borné satisfaisant $K \subset U \subset \overline{U} \subset V$. La fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U)}{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U) + \mathrm{dist}(x, K)}$$

convient. □

Proposition 3.4.3. *Une fonction f appartient à $\mathcal{C}_0(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ tels que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K$. D'après le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Posons $h = fg$ de sorte que $h \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Réciproquement, considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, par définition il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur Ω. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty < \varepsilon/2$ et définissons $K := \{x \in \Omega : \ |f_{n_\varepsilon}| \geq \varepsilon/2\}$. Alors K est un sous ensemble compact de Ω et pour tout $x \in \Omega \setminus K$, $|f| \leq |f - f_{n_\varepsilon}| + |f_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. □

Proposition 3.4.4. *Les espaces $\mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0(\Omega)$ sont séparables.*

Démonstration. Par définition de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est séparable. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille exhaustive de compacts, i.e. $K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$ [2]. Comme $\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$, il suffit de montrer que chacun des $\mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$ est séparable (pour la norme uniforme sur Ω).

Soit donc $K \subset \Omega$ un compact et ω un ouvert borné tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Comme $\overline{\omega}$ est compact, l'espace $\mathcal{C}(\overline{\omega})$ est séparable d'après le Corollaire 3.2.6. Il existe donc une famille $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dénombrable et dense dans $\mathcal{C}(\overline{\omega})$. Soit $(r_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0. Pour tout couple $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on choisit arbitrairement une fonction $g_{k,\ell} \in \mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell)$ si cet ensemble n'est pas vide de sorte que l'ensemble (dénombrable) $D := \{g_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\omega)$ (pour la norme uniforme sur $\overline{\omega}$). En effet, pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{\ell_0} < \varepsilon/2$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_\omega |f - f_{k_0}| < r_{\ell_0}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_{k_0}, r_{\ell_0}) \neq \emptyset$ de sorte que

$$\sup_\omega |f - g_{k_0,\ell_0}| \leq \sup_\omega |f - f_{k_0}| + \sup_\omega |f_{k_0} - g_{k_0,\ell_0}| \leq 2r_{\ell_0} < \varepsilon.$$

2. On peut par exemple considérer $K_n = \left\{x \in \Omega : \ |x| \leq n \text{ et } \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\right\}$.

Comme les fonctions $g_{k,\ell}$ sont à support dans K qui est un sous-ensemble compact de ω, on peut les étendre par 0 sur $\Omega\backslash\omega$ en des fonctions $\tilde{g}_{k,\ell}$ qui sont donc dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} = \{\tilde{g}_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\Omega)$ est donc dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$ (pour la norme uniforme sur Ω). $\square$