

Chapitre 4

Espaces de Lebesgue

4.1 Rappels de théorie de la mesure

Définition 4.1.1. Une *tribu* (ou σ -*algèbre*) sur un ensemble X est une sous famille \mathcal{A} de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant :

- (i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- (ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (iii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{A} , alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple (X, \mathcal{A}) est appelé *espace mesurable*.

Définition 4.1.2. Une *mesure* est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ qui satisfait

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (ii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans \mathcal{A} deux à deux disjoints,

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet (X, \mathcal{A}, μ) est appelé *espace mesuré*.

Pour les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$ on munit implicitement l'espace d'arrivée \mathbb{K} de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{K})$.

Définition 4.1.3. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{K}$ est \mathcal{A} -mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$ ce qui est encore équivalent à $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{K}$.

4.2 Premières définitions et propriétés

Définition 4.2.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$\mathcal{L}^p(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ } \mathcal{A}\text{-mesurable} : \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < +\infty\},$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : \mu(\{|f| > C\}) = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Commençons par établir deux inégalités fondamentales en théorie de l'intégration.

Proposition 4.2.2 (Inégalité de Hölder). *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ et*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}.$$

Démonstration. Par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$, pour $a, b > 0$ et $1 \leq p, p' < \infty$ avec $1/p + 1/p' = 1$, on a

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(a^{p'}) \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right).$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient l'*inégalité de Young*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

qui reste vraie pour tout $a \geq 0$ et $b \geq 0$. En prenant $a = |f(x)|/\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ et $b = |g(x)|/\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}$ et en intégrant sur X , on obtient l'inégalité voulue.

Dans l'un des cas $p = 1$ ou $p = \infty$, le résultat est immédiat par définition du sup-essentiel. \square

Proposition 4.2.3 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$, on a*

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}.$$

Démonstration. On commence par le cas $p = \infty$. Par définition du sup-essentiel, $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ et $|g(x)| \leq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ pour μ -presque tout $x \in X$, d'où

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)},$$

pour μ -presque tout $x \in E$, et donc $\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$.

Si $p = 1$, on a

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_E |f + g| d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(X)}.$$

Enfin, si $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^p &= \int_E |f + g|^p d\mu = \int_X |f + g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \int_X |f| |f + g|^{p-1} d\mu + \int_X |g| |f + g|^{p-1} d\mu \\ &\leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \left(\int_X (|f + g|^{p-1})^{p/(p-1)} d\mu \right)^{(p-1)/p} \\ &= (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)}^{p-1}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat. \square

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ satisfait l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\|0\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$. Malheureusement, $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$ n'implique pas forcément que $f = 0$, ce qui montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ (c'est en fait une semi-norme). En effet, on a le résultat suivant qui caractérise toutes les fonctions de semi-norme nulle :

Proposition 4.2.4. *Soit $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction \mathcal{A} -mesurable telle que*

$$\int_X f d\mu = 0.$$

Alors $f(x) = 0$ μ -presque pour tout $x \in X$.

Démonstration. On considère les ensembles mesurables $E_n := \{f \geq 1/n\}$. La suite d'ensembles $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n} \mu(E_n) \leq \int_{E_n} f d\mu \leq \int_E f d\mu = 0,$$

et donc, $\mu(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage à la limite que

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = 0,$$

ce qui montre bien que $f = 0$ μ -p.p. dans X . \square

Etant données deux fonctions \mathcal{A} -mesurables f et $g : X \rightarrow \mathbb{K}$, on dit que $f \sim g$, si $f(x) = g(x)$ μ -presque pour tout $x \in X$. On peut montrer que \sim définit une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) dans la classe des fonctions \mathcal{A} -mesurables. Les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ peuvent être rendus normés en considérant l'espace quotient $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ noté dorénavant $L^p(X)$. Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$, on notera (temporairement) $[f]$ sa classe d'équivalence et par définition de la norme dans un espace quotient, on a

$$\|[f]\|_{L^p(X)} = \inf_{f \in [f]} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \quad \text{pour tout } f \in [f].$$

Par abus de notation, nous identifierons systématiquement une fonction avec sa classe d'équivalence.

Définition 4.2.5. Soit $f \in L^p(X)$, on note

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les inégalités de Hölder et Minkowski restent vraies dans les $L^p(X)$.

Proposition 4.2.6 (Inégalité de Hölder). Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^{p'}(X)$ alors $fg \in L^1(X)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposition 4.2.7 (Inégalité de Minkowski). Pour $1 \leq p \leq \infty$ et tout $f, g \in L^p(X)$, on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proposition 4.2.8. Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'application $L^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_p$ définit une norme sur $L^p(X)$. De plus, pour $p = 2$, l'application

$$(f, g) \in L^2(X) \times L^2(X) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(X)$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.2.4, si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ μ -p.p. dans X , et donc $f = 0$ dans $L^p(X)$. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(X)$. Enfin l'inégalité triangulaire n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Si $p = 2$, l'inégalité de Hölder (Cauchy-Schwarz dans ce cas) assure que l'intégrale $\int_X fg d\mu$ est bien définie pour f et $g \in L^2(X)$. De plus, il s'agit clairement d'une forme sesquilinéaire (par linéarité de l'intégrale) hermitienne définie positive (d'après la Proposition 4.2.4) ce qui assure que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est effectivement un produit scalaire sur $L^2(X)$. \square

4.3 Complétude

Théorème 4.3.1 (Riesz-Fischer). Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(X)$ est complet.

Démonstration. Supposons d'abord que $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Grâce à la propriété de Cauchy, on construit par récurrence une sous-suite $(f_{n_j})_{j \geq 1}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant la propriété

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq 2^{-j} \quad \text{pour tout } j \geq 1.$$

Soit $u_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, alors la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ est croissante et

$$\|u_k\|_p \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} \leq 1.$$

Par conséquent, le théorème de la convergence monotone assure que

$$\int_X |u|^p d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |u_k|^p d\mu \leq 1,$$

où l'on a posé $u := \lim_k u_k = \sum_{j \geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, ce qui montre que $u(x) < \infty$ pour μ -presque tout $x \in X$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j \geq 1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)) & \text{si } \sum_{j \geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| < \infty, \\ 0 & \text{si } \sum_{j \geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| = \infty \end{cases}$$

La fonction f ainsi définie est \mathcal{A} -mesurable et comme la somme

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j \geq 1} (f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x))$$

se téléscopie, on en déduit que $f_{n_j} \rightarrow f$ μ -p.p. dans X . Comme $|f| \leq |f_{n_1}| + u$, l'inégalité de Minkowski montre que

$$\|f\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \|u\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1,$$

ce qui assure que $f \in L^p(X)$. Comme $|f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + u \in L^p(X)$, le théorème de la convergence dominée montre que $f_{n_j} \rightarrow f$ dans $L^p(X)$. Montrons que toute la suite $f_n \rightarrow f$ dans $L^p(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le critère de Cauchy, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$. Soit j assez grand de sorte que $n_j \geq N$, alors il vient que

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f\|_p \leq \varepsilon + \|f_{n_j} - f\|_p.$$

En faisant tendre $j \rightarrow \infty$ puis $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient la convergence souhaitée.

Pour $p = \infty$, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(X)$, alors il existe un ensemble μ -négligeable $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \\ \text{pour tout } x \in X \setminus A \text{ et tout } m, n \in \mathbb{N}. \quad (4.3.1)$$

Donc si $x \in X \setminus A$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{K} complet, elle admet donc une limite notée $f(x)$. Par ailleurs, on pose $f(x) = 0$ si $x \in A$. La fonction f ainsi définie est \mathcal{A} -mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables. De plus, comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(X)$ elle est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc par passage à la limite dans la première inégalité de (4.3.1), il vient $|f(x)| \leq M$ μ -presque pour tout $x \in X$ soit $f \in L^\infty(X)$. Enfin d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc par passage à la limite dans la deuxième inégalité de (4.3.1), il vient $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et μ -presque tout $x \in X$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que $f_n \rightarrow f$ dans $L^\infty(X)$. \square

Corollaire 4.3.2. *Pour tout $1 \leq p < \infty$, les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach et $L^2(X)$ est un espace de Hilbert.*

4.4 Résultats de densité

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note \mathcal{E}_p l'ensemble des fonctions $f \in L^p(X)$ qui sont étagées.

Théorème 4.4.1. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'ensemble \mathcal{E}_p est dense dans $L^p(X)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(X)$. On peut supposer sans restreindre la généralité que $f \geq 0$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions étagées définies de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$, on définit les ensembles \mathcal{A} -mesurables

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad F_n := \{f \geq n\}.$$

et pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(x) + n \chi_{F_n}(x).$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge μ -presque partout vers f .

Si $p = \infty$, alors pour tout $n \geq \|f\|_\infty$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ presque pour tout $x \in X$, et donc $\|f_n - f\|_\infty \leq 2^{-n} \rightarrow 0$.

Si $1 \leq p < \infty$, comme $f_n(x) \nearrow f(x)$ pour presque tout $x \in E$, on en déduit que $|f(x) - f_n(x)|^p \rightarrow 0$ et $|f(x) - f_n(x)|^p \leq 2^p f(x)^p$ μ -presque pour tout $x \in X$, d'où par le théorème de la convergence dominée $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$. \square

Nous allons à présent nous restreindre au cas de mesures Boréliennes sur \mathbb{R}^N , finies sur les compacts (que l'on appelle mesures de Radon). Notons que la mesure de Lebesgue, notée dorénavant \mathcal{L}^N , en est un cas particulier puisqu'un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^N$ étant borné, il est inclu dans un cube $[-R, R]^N$ avec $R > 0$. Par conséquent $\mathcal{L}^N(K) \leq (2R)^N < \infty$.

Les mesures de Radon positives jouissent d'une propriété de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par l'intérieur à l'aide de compacts, et par l'extérieur à l'aide d'ouverts.

Proposition 4.4.2. *Soit μ une mesure Borélienne dans \mathbb{R}^N finie sur les compacts. Pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mu(A) < \infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert U tels que $K \subset A \subset U$ et*

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon, \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon.$$

Démonstration. Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On pose $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ce qui définit une mesure Borélienne finie sur \mathbb{R}^N .

On considère la famille

$$\mathcal{F} := \left\{ B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \right\}.$$

La famille \mathcal{F} contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que \mathcal{F} est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de \mathcal{F} . Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fermé $C_n \subset B_n$ tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

L'ensemble $C := \bigcap_n C_n$ est fermé et

$$\begin{aligned} \nu \left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \setminus C \right) &= \nu \left(\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) \right) \\ &\leq \nu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \setminus C_n) \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \nu \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^m C_n \right) \right) &= \mu \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) \right) \\ &\leq \nu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \setminus C_n) \right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour m assez grand, on a donc en posant $C' := \bigcup_{n=0}^m C_n$

$$\nu \left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) \setminus C' \right) < \varepsilon,$$

ce qui montre, C' étant fermé, que $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$.

Comme tout ouvert de \mathbb{R}^N peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles fermés, on en déduit que \mathcal{F} contient tous les ouverts de \mathbb{R}^N .

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} : {}^c B \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$ et \mathcal{G} est stable par union dénombrable. Par conséquent, \mathcal{G} est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans \mathcal{G} , on en déduit que la tribu \mathcal{G} contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout $B \subset \mathbb{R}^N$ Borélien et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C \subset B$ tel que $\nu(B \setminus C) < \varepsilon$. En particulier, pour $B = A$, on obtient un fermé $C \subset A$ tel que $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := C \cap \overline{B}(0, n)$ qui est un compact inclu dans A . Comme $\mu(C) \leq \mu(A) < \infty$, on a $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$. Pour n assez grand, on obtient donc un compact $K_n \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. L'ensemble $B(0, n) \setminus A$ étant un Borélien de mesure finie (car μ est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé $C_n \subset B(0, n) \setminus A$ tel que $\mu((B(0, n) \setminus A) \setminus C_n) < \varepsilon/2^n$. Posons $U_n = B(0, n) \setminus C_n$ qui est un ouvert avec $B(0, n) \cap A \subset U_n$ et tel que $\mu(U_n \setminus A) < \varepsilon/2^n$. Si on pose $U := \bigcup_n U_n$ qui est un ouvert, on obtient que $A \subset U$ et $\mu(U \setminus A) \leq \sum_n \mu(U_n \setminus A) < \varepsilon$. \square

Cette propriété de régularité des mesures de Radon permet de montrer la densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue pour $p < \infty$.

Théorème 4.4.3. *Soit μ une mesure Borélienne dans \mathbb{R}^N finie sur les compacts. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega, \mu)$. D'après le Théorème 4.4.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g \in L^p(\Omega, \mu)$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. On est donc ramené à montrer que toute fonction étagée peut être approchée par une fonction de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la norme $L^p(\Omega)$.

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts telle que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Le Théorème de la convergence dominée assure que $\|g - \chi_{K_n} g\|_p \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $g = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$.

Par linéarité, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble Borélien A tel que \bar{A} est compact et $\bar{A} \subset \Omega$ (autrement dit χ_A est à support compact dans Ω). En particulier, comme A est borné, on a $\mu(A) < \infty$. Par conséquent la Proposition 4.4.2 assure, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un ouvert U et d'un compact K tels que $K \subset A \subset U$ et $\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Le Lemme d'Urysohn donne alors l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ telle que $h = 1$ sur K et $\text{Supp}(h) \subset U$. D'où, comme $\chi_K \leq h \leq \chi_U$,

$$\int_{\Omega} |h - \chi_A|^p d\mu \leq \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. \square

Dans le cas de la mesure de Lebesgue \mathcal{L}^N , nous allons améliorer le résultat précédent en montrant que l'ensemble des fonctions régulières et à support compact est dense dans les espaces de Lebesgue. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R}^N l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues à tout ordre et telles que $\text{Supp}(f)$ est un compact inclu dans Ω .

Définition 4.4.4. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\rho \geq 0$, $\text{Supp}(\rho) \subset \bar{B}(0, 1)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x) dx = 1$ et $\text{Supp}(\rho_n) \subset \bar{B}(0, \frac{1}{n})$. On dit que $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

A titre d'exemple, on peut vérifier que la fonction $\rho : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x) := c \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

où la constante $c := \left(\int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} dx \right)^{-1}$, satisfait les propriétés requises ci-dessus.

Définition 4.4.5. Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable (*i.e.* dans $L^1(K)$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, et on note $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$), on définit le produit de convolution

$$f * \rho_n(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \rho_n(y) dy \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 4.4.6. Notons que l'intégrale est bien définie car $y \mapsto \rho_n(x-y)$ s'annule en dehors de $\overline{B}(x, \frac{1}{n})$, elle est bornée sur cet ensemble et f est intégrable sur cet ensemble.

Lemme 4.4.7. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus

- si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\text{Supp}(f * \rho_n) \subset \text{Supp}(f) + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$ et $f * \rho_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$;
- si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Démonstration. Montrons d'abord que $f * \rho_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ . On montre par convergence dominée que $f * \rho_n$ est continue sur \mathbb{R}^N . Montrons à présent qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < 1$, en notant $\{e_1, \dots, e_N\}$ la base canonique de \mathbb{R}^N , on calcule

$$\frac{f * \rho_n(x + he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho_n(x + he_i - y) - \rho_n(x - y)}{h} f(y) dy.$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a $\frac{\rho_n(x + he_i - y) - \rho_n(x - y)}{h} f(y) \rightarrow \partial_{x_i} \rho_n(x - y) f(y)$ quand $h \rightarrow 0$ car ρ_n est différentiable sur \mathbb{R}^N . Par ailleurs, le Théorème des accroissements finis montre que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a $\left| \frac{\rho_n(x + he_i - y) - \rho_n(x - y)}{h} f(y) \right| \leq \max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i} \rho_n| \chi_{\overline{B}(x, 2)}(y) |f(y)|$ car $\rho_n(x + he_i - y) = \rho_n(x - y) = 0$ si $|y - x| > 2$. Notons que $\partial_{x_i} \rho_n$ étant également $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ elle est bornée sur \mathbb{R}^N ce qui montre que $\max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i} \rho_n| \chi_{\overline{B}(x, 2)} |f| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Le Théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f * \rho_n(x + he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i} \rho_n(x - y) f(y) dy,$$

ce qui montre que $f * \rho_n$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et $\partial_{x_i}(f * \rho_n) = f * (\partial_{x_i} \rho_n)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On montre de nouveau par convergence dominée que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur \mathbb{R}^N , ce qui établit que $f * \rho_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^N . Par récurrence, on montre ainsi que $f * \rho_n$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^N .

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors il existe $R > 0$ tel que $\text{Supp}(f) \subset \overline{B}(0, R)$. Comme f est continue sur le compact $\overline{B}(0, R)$ (et donc bornée) et nulle à l'extérieur de $\overline{B}(0, R)$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. De plus si $x \notin \text{Supp}(f) + \text{Supp}(\rho_n)$ et $y \in \text{Supp}(\rho_n)$, alors $x - y \notin \text{Supp}(f)$ et donc $f(x - y) = 0$. Par conséquent,

$$f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \rho_n(y) dy = \int_{\text{Supp}(\rho_n)} f(x - y) \rho_n(y) dy = 0,$$

ce qui montre que le support de $f * \rho_n$ (qui est toujours un fermé) est inclus dans $\text{Supp}(f) + \text{Supp}(\rho_n) \subset \text{Supp}(f) + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$ et en particulier que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tels que $\|x - x'\| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand de sorte que $1/n \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour tout $y \in \overline{B}(0, \frac{1}{n})$, on a $|f(x) - f(x - y)| \leq \varepsilon$. On multiplie alors cette inégalité par $\rho_n(y) \geq 0$, puis on intègre sur \mathbb{R}^N ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \rho_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x) - f(x - y)) \rho_n(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x - y)| \rho_n(y) dy \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

où l'on a utilisé le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) dy = 1$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de δ donc ε) tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f * \rho_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $f * \rho_n \rightarrow f$ uniformément sur \mathbb{R}^N et donc dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si $1 \leq p < \infty$, comme $f(x) = f * \rho_n(x) = 0$ si $|x| > R + \frac{1}{n}$, on peut élever l'expression (4.4.1) à la puissance p , puis par intégration,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p dx = \int_{\overline{B}(0, R + \frac{1}{n})} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \mathcal{L}^N(\overline{B}(0, R + 1)), \quad (4.4.2)$$

ce qui montre également que $f * \rho_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Supposons enfin que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq p < \infty$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\int_K |f(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \mathcal{L}^N(K)^{1-1/p} < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, et donc que le produit de convolution $f * \rho_n$ est bien défini. D'après le Théorème 4.4.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. Par ailleurs, d'après (4.4.2), on a $\|g - g * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$ pour n assez grand. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|f - f * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|g - g * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g - f) * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq 2\varepsilon + \|(g - f) * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder et le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y) dy = 1$,

$$\begin{aligned} |(g - f) * \rho_n(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x - y) - f(x - y)) \rho_n(y) dy \right|^p \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x - y) - f(x - y)) \rho_n(y)^{1/p} \rho_n(y)^{1/p'} dy \right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(x - y) - f(x - y)|^p \rho_n(y) dy, \end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport à x et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient que

$$\|(g - f) * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x - y) - f(x - y)|^p dx \right) \rho_n(y) dy = \|g - f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Par conséquent, $\|f - f * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 3\varepsilon$, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Corollaire 4.4.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le Théorème 4.4.3, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. On étend g par zéro en dehors de Ω et on note \tilde{g} cette

extension. Alors $\tilde{g} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et $\text{Supp}(\tilde{g}) \subset \Omega$. D'après le Lemme 4.4.7, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$, $\text{Supp}(\tilde{g} * \rho_n) \subset \text{Supp}(\tilde{g}) + \overline{B}(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\|\tilde{g} * \rho_n - \tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. Finalement, on obtient que $f_n := \tilde{g} * \rho_n|_{\Omega} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et

$$\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \tilde{g} * \rho_n\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. \square

4.5 Séparabilité

Nous sommes à présent en mesure de discuter la séparabilité des espaces de Lebesgue.

Proposition 4.5.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts, i.e., $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. D'après le Corollaire 3.2.6, $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable par rapport à la norme uniforme sur K_n . Or les ensembles K_n étant bornés, la convergence uniforme sur K_n implique la convergence dans $L^p(K_n)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ car

$$\int_{K_n} |f - g|^p dx \leq \mathcal{L}^N(K_n) \sup_{K_n} |f - g|^p \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{C}(K_n).$$

Par conséquent, l'espace $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable pour la convergence dans $L^p(K_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un ensemble D_n dénombrable dense dans $\mathcal{C}(K_n)$ pour la convergence dans $L^p(K_n)$.

Posons $D := \bigcup_n D_n$ qui est par conséquent dénombrable. Si l'on énumère les éléments de D en une suite $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$, chacune des fonctions f_i est une fonction continue sur un sous-ensemble compact de Ω . On étend alors f_i par zéro sur Ω , et on note \tilde{f}_i cette extension qui n'est *a priori* plus continue mais toutefois dans $L^p(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} := \{\tilde{f}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est alors un sous-ensemble dénombrable de $L^p(\Omega)$. Montrons qu'il est dense dans $L^p(\Omega)$. Pour ce faire, soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 4.4.3, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Ensuite il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Supp}(g) \subset K_n$. Donc il existe un $h \in D_n$ tel que $\|g - h\|_{L^p(K_n)} \leq \varepsilon$. Soit \tilde{h} l'extension par zéro de h sur Ω . Alors $\tilde{h} \in \tilde{D}$ et comme $g = 0$ sur $\Omega \setminus K_n$, il vient

$$\int_{\Omega} |\tilde{h} - g|^p dx = \int_{K_n} |h - g|^p dx \leq \varepsilon^p.$$

Finalement, on a que $\|f - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon$, ce qui montre la densité de \tilde{D} dans $L^p(\Omega)$. \square

Proposition 4.5.2. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Démonstration. Soit $X := \{\chi_{B(x,r)} : B(x,r) \subset \Omega\}$ qui est une famille non dénombrable de $L^\infty(\Omega)$. Si $\chi, \chi' \in X$ sont telles que $\chi \neq \chi'$, alors $\|\chi - \chi'\|_\infty = 1$. Supposons qu'il

existe un sous-ensemble $D = \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $L^\infty(\Omega)$ dénombrable et dense. Soit $\Phi : X \rightarrow \mathbb{N}$ l'application qui à chaque $\chi \in X$ associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\chi - f_n\|_\infty \leq 1/3$. Cette application est bien définie par densité de D dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons maintenant que $\Phi(\chi_1) = \Phi(\chi_2) = n$, alors $\|\chi_1 - f_n\|_\infty \leq 1/3$ et $\|\chi_2 - f_n\|_\infty \leq 1/3$, ce qui implique par l'inégalité triangulaire que $\|\chi_1 - \chi_2\|_\infty \leq 2/3 < 1$. Comme χ_1 et $\chi_2 \in X$ sont des fonctions caractéristiques, alors nécessairement $\chi_1 = \chi_2$ dans $L^\infty(\Omega)$ ce qui montre l'injectivité de Φ . L'ensemble X étant non dénombrable, on aboutit à une contradiction. \square

4.6 Critère de compacité

Pour finir, nous établissons un critère compacité dans les espaces de Lebesgue.

Théorème 4.6.1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $1 \leq p < \infty$, telle que*

$$(i) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < +\infty ;$$

$$(ii) \sup_{\|y\| \leq \delta} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x+y) - f_n(x)|^p dx \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

Alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, la suite $(f_n|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^p(K)$.

Démonstration. Soit $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite régularisante comme dans la Définition 4.4.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(f_n * \rho_k|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(K)$. Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n * \rho_k|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K)$. Pour faire, nous allons appliquer le théorème d'Ascoli-Arzelà. Tout d'abord d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in K$, on a

$$|f_n * \rho_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y)| \rho_k(y) dy \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_k,$$

où, d'après l'hypothèse (i), la constante $C_k > 0$ est indépendante de n et de x . Par ailleurs, si x et $x' \in K$,

$$\begin{aligned} |f_n * \rho_k(x) - f_n * \rho_k(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x'-y)| \rho_k(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-x'+z) - f_n(z)| \rho_k(x'-z) dz \\ &\leq \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \left(\sup_{\|y\| \leq \|x-x'\|} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(z+y) - f_n(z)|^p dz \right)^{1/p} \\ &= \omega_k(\|x-x'\|), \end{aligned}$$

où, d'après l'hypothèse (ii), $\omega_k(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$, ce qui montre l'uniforme équicontinuité de la suite $(f_n * \rho_k|_K)_{n \in \mathbb{N}}$. Le Théorème d'Ascoli-Arzelà combiné avec un principe d'extraction diagonal assure l'existence d'une sous-suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_k|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge

dans $\mathcal{C}(K)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme K est borné on en déduit que $(f_{\sigma(n)} * \rho_k|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^p(K)$.

Nous allons à présent montrer que la sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$ ce qui montrera qu'elle converge dans cet espace par le Théorème de Riesz-Fischer. Pour ce faire, on écrit grâce à l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} &\leq \|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(n)} * \rho_k\|_{L^p(K)} \\ &\quad + \|f_{\sigma(n)} * \rho_k - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)} + \|f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)}. \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

Comme $\text{Supp}(\rho_k) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{k})$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y) dy = 1$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)| \leq \int_{\overline{B}(0, \frac{1}{k})} |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)| \rho_k(y) dy.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance p , en intégrant par rapport à $x \in K$ et en appliquant l'inégalité de Hölder et le Théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p dx &\leq \int_{\overline{B}(0, \frac{1}{k})} \left(\int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|^p dx \right) \rho_k(y) dy \\ &\leq \sup_{\|y\| \leq 1/k} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_K |f_n(x) - f_n(x-y)|^p dx. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii), on en déduit alors que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p dx = 0.$$

Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0}(x)|^p dx \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0}|_K)_{n \in \mathbb{N}}$ étant convergente dans $L^p(K)$, elle y est de Cauchy et on peut trouver un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N_0$,

$$\|f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0} - f_{\sigma(m)} * \rho_{k_0}\|_{L^p(K)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc si $m, n \geq N_0$, (4.6.1) donne $\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} \leq \varepsilon$, ce qui montre que $(f_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$, et donc qu'elle converge dans cet espace. \square

