Exercice ② : Base de Schauder.

① $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$\exists!\, a_n(x)$, $\exists!\, a_n(y)$, $\exists!\, a_n(\lambda x+y)$ tq

$$\|x - \sum_{k=0}^{n} a_k(x) e_k\| \longrightarrow 0, \quad \|y - \sum_{k=0}^{n} a_k(y) e_k\| \longrightarrow 0$$

$$\text{et } \|\lambda x + y - \sum_{k=0}^{n} a_k(\lambda x+y) e_k\| \longrightarrow 0$$

Or $\|\lambda x + y - \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k(x) + a_k(y)) e_k\|$

$$\leq |\lambda| \, \|x - \sum_{k=0}^{n} a_k(x) e_k\| + \|y - \sum_{k=0}^{n} a_k(y) e_k\| \longrightarrow 0$$

Donc $\lambda x + y = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k(x) + a_k(y)) e_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda x + y) e_k$

Par unicité $\lambda a_k(x) + a_k(y) = a_k(\lambda x + y) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

② On a aussi $S_n(\lambda x + y) = \lambda S_n(x) + S_n(y)$

- Donc $S_n(\lambda x) = \lambda S_n(y)$

$$\Longrightarrow \quad \|S_n(\lambda x)\| = |\lambda| \, \|S_n(x)\|$$

$$\Longrightarrow \quad |x| = \sup_n \|S_n(\lambda x)\| = |\lambda| \sup_n \|S_n(x)\| = |\lambda| \, |x|$$

- $S_n(x+y) = S_n(x) + S_n(y)$

$$\Longrightarrow \quad \|S_n(x+y)\| \leq \|S_n(x)\| + \|S_n(y)\| \leq |x| + |y|$$

$$\Longrightarrow \quad |x+y| = \sup_n \|S_n(x+y)\| \leq |x| + |y|$$

- $|x| = 0 \iff S_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\iff a_k(x) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\iff x = 0$$

Enfin remarquons que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\|S_n(x)\| \leq \|x\| + 1 \qquad \forall n \geq n_0$$

de sorte que

$$|x| \leq \max\{\|S_0(x)\|, \dots, \|S_{n_0-1}(x)\|, \|x\|+1\} < \infty$$

③ $0 \leq m \leq n$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) e_k \quad ,$$

$$S_m(S_n(x)) = \sum_{k=0}^{m} a_k(S_n(x)) e_k$$

$$a_k(S_n(x)) = a_k\left(\sum_{\ell=0}^{n} a_\ell(x) e_\ell\right) = \qquad (0 \leq k \leq m)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell(x) a_k(e_\ell)$$

Par unicité de la décomposition $a_k(e_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$

Donc $a_k(S_n(x)) = a_k(x)$

Donc $S_m(S_n(x)) = \sum_{k=0}^{m} a_k(x) e_k = S_m(x)$

④ On a $S_n(x_j) \xrightarrow[j \to \infty]{} y_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ (dans $(E, \|\cdot\|)$)

$$S_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x_j) e_k \in \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n) = F_n$$

F_n sev de E de dimension finie donc F_n est fermé dans E

$\Rightarrow y_n \in F_n$ et donc $\exists\, b_0^n, \dots, b_n^n \in \mathbb{R}$ tq

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} b_k^n e_k$$

Montrons que $\{b_k^n\}$ ne dépend pas de n.

Si $m \leq n$, on a

$$S_m\left(S_n(x_j)\right) = S_m(x_j)$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(x_j)e_n = S_n(x_j) - S_{n-1}(x_j) \longrightarrow y_n - y_{n-1}$$

Donc $\{a_n(x_j)e_n\}_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ds E

$\Longrightarrow \{a_n(x_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ds $\mathbb{R}$ complet

$\Longrightarrow a_n(x_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} b_n$.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ y_n}}{S_n(x_j)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x_j)e_k \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} b_k e_k$$

Donc $y_n = \sum_{k=0}^{n} b_k e_k$

(5) Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy ds $(E, |\cdot|)$

$\Longrightarrow (S_n(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy ds $(E, \|\cdot\|)$ $\forall n$

$\Longrightarrow \exists y_n \in E$ tq $S_n(x_j) \longrightarrow y_n$ ds $(E, \|\cdot\|)$ $\forall n$

En fait, cette convergence a même lieu uniformément en n car : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \ell_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall j, k \geq \ell_0$

$$\|S_n(x_j) - S_n(x_k)\| \leq \sup_n \|S_n(x_j) - S_n(x_k)\| \leq \varepsilon \quad \forall n \quad (*)$$

$$k \nearrow +\infty \Longrightarrow \|S_n(x_j) - y_n\| \leq \varepsilon \quad \forall n, \forall j \geq \ell_0 \quad (**)$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ ds $(*)$, on a

$\|x_j - x_k\| \leq \varepsilon \quad \forall j, k \geq \ell_0$

$\Longrightarrow (x_j)$ est de Cauchy ds $(E, \|\cdot\|)$ complet $\Longrightarrow x_j \longrightarrow x$ ds $(E, \|\cdot\|)$ $(***)$

$k \nearrow +\infty \Longrightarrow \|x_j - x\| \leq \varepsilon \ \forall j \geq \ell_0$

Mq $y_n \to x$ ds $(E, \|\cdot\|)$. On écrit

$$\|x - y_n\| \leq \underbrace{\|x - x_{l_0}\|}_{\leq \varepsilon\ (***)} + \|x_{l_0} - S_n(x_{l_0})\| + \underbrace{\|S_n(x_{l_0}) - y_n\|}_{\leq \varepsilon\ (**)}$$

Comme $S_n(x_{l_0}) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_{l_0}$ qd $n \to \infty$ (ds $(E, \|\cdot\|)$)

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\|S_n(x_{l_0}) - x_{l_0}\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

Donc $\|x - y_n\| \leq 3\varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Longrightarrow y_n \to x$, ds $(E, \|\cdot\|)$

Ça montre effectivement que $y_n = S_n(x)$

On revient à $(**) \Longrightarrow \|S_n(x_j) - S_n(x)\| \leq \varepsilon \ \forall n, \forall j \geq l_0$

$\Longrightarrow |x_j - x| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|S_n(x_j) - S_n(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall j \geq l_0$

$\Longrightarrow x_j \to x$ ds $(E, |\cdot|)$.

6) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x\| \leq \|x - S_n(x)\| + \|S_n(x)\|$

$$\leq \|x - S_n(x)\| + |x|$$

$n \nearrow +\infty \Longrightarrow \|x\| \leq |x|$.

b) $i : (E, |\cdot|) \to (E, \|\cdot\|)$, $x \mapsto i(x)$ linéaire, bijective et continue

car $\|i(x)\| = \|x\| \leq |x|$. Par le théorème de l'isomorphisme de Banach i^{-1} est continue, i.e., $\exists C > 0$ tq

$$|x| = |i^{-1}(x)| \leq C\|x\|.$$

7) $\|S_n(x)\| \leq |x| \leq C\|x\| \Longrightarrow S_n \in \mathcal{L}(E, E)$

$a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x) \Longrightarrow a_n \in E'$

Exercice ③ : Espaces de Fréchet

① $0 \leq s \leq t$

$$\frac{s+t}{1+s+t} = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t}{1+t}\right) = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2} = \frac{1}{(1+t)^2} > 0 \Longrightarrow \frac{s}{1+s} \leq \frac{t}{1+t}$$

② • Comme $0 \leq \frac{t}{1+t} \leq 1$, on en déduit que

$$0 \leq d(x,y) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} < \infty$$

• $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow 2^{-k}\frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} = 0 \quad \forall k$

$\Longleftrightarrow p_k(x-y) = 0 \quad \forall k$

$\Longleftrightarrow x = y$

• $d(x,y) = d(y,x)$ car $p_k(x-y) = p_k(y-x)$

• $\frac{p_k(x-z)}{1+p_k(x-z)} = \frac{p_k((x-y)+(y-z))}{1+p_k((x-y)+(y-z))} \leq$

$\leq \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} + \frac{p_k(y-z)}{1+p_k(y-z)}$

$\Longrightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

③ $p_k((x+y)-(x+z)) \Longrightarrow p_k(y-z)$

Donc $d(x+y, x+z) = d(y,z)$

④ • Si $d(x_n, x) \longrightarrow 0 \Longrightarrow 2^{-k}\frac{p_k(x_n-x)}{1+p_k(x_n-x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall k$

$\Longrightarrow p_k(x_n - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall k$

- Si $p_k(x_n - x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \forall k$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{k > k_0} 2^{-k} \leq \varepsilon$

Alors $d(x_n, x) \leq \sum_{k=0}^{k_0} 2^{-k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} + \varepsilon$

$\forall\, 0 \leq k \leq k_0$, $\exists\, n(k) \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n(k)$

$$2^{-k} \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} \leq \frac{\varepsilon}{k_0 + 1}$$

Soit $n_0 = \max\limits_{0 \leq k \leq k_0} n(k)$ de sorte que $\forall n \geq n_0$,

$$d(x_n, x) \leq \sum_{k=0}^{k_0} \frac{\varepsilon}{k_0 + 1} + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

⑤ - Si (x_n) Cauchy ds (E, d) : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tq
$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

$$\Longrightarrow \frac{p_k(x_n - x)}{1 + p_k(x_n - x)} \leq \varepsilon 2^k \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \forall k$$

$$\Longrightarrow (1 - \varepsilon 2^k)\, p_k(x_n - x_m) \leq \varepsilon 2^k$$

$$\Longrightarrow p_k(x_n - x_m) \leq \frac{2^k \varepsilon}{1 - \varepsilon 2^k}$$

Soit $\eta > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\frac{2^k \varepsilon}{1 - \varepsilon 2^k} \leq \eta$.

En correspondance avec ce $\varepsilon = \varepsilon(k, \eta)$, $\exists\, n_0 = n_0(k, \eta)$ tq

$$d(x_n, x_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

$$\Longrightarrow p_k(x_n - x_m) \leq \eta$$

- Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sum_{k > k_0} 2^{-k} \leq \varepsilon/2$ $\qquad$ $\varepsilon > 0$ fixé $\exists \delta > 0$ tq $\frac{\delta}{1+\delta} < \frac{\varepsilon}{4}$

$\forall\, 0 \leq k \leq k_0$, $\exists\, n(k) \in \mathbb{N}$ tq
$$p_k(x_n - x_m) \leq \delta \quad \forall n, m \geq n(k)$$

$n_0 := \max_{0 \leq k \leq k_0} n(k)$, alors $\forall n, m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=0}^{k_0} 2^{-k} \frac{p_k(x_n - x_m)}{1 + p_k(x_n - x_m)} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq \frac{\delta}{1+\delta} \sum_{k=0}^{k_0} 2^{-k} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{4} \underbrace{\sum_{k \geq 0} 2^{-k}}_{=2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

⑥ . f continue $\Rightarrow$ f continue en 0

. Si f est continue en 0. Soit $x \in E$ et $x_n \to x$, alors, comme d est invariante par translation,
$$d(x_n - x, 0) = d(x_n, x) \to 0$$
$\Rightarrow x_n - x \to 0$

Donc $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \to 0$ car f continue en 0

⑦ a) Si $x_n \to x$ ds (E, d), alors $p_k(x_n - x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \ \forall k$

$$\Rightarrow \underset{\displaystyle |f(x_n) - f(x)|}{\overset{\shortparallel}{|f(x_n - x)|}} \leq C\, p_k(x_n - x) \to 0$$
$$\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E$ tq $f(x_n) > n\, p_n(x_n)$

En particulier $f(x_n) \neq 0$ et donc

$$p_n\left(\frac{x_n}{f(x_n)}\right) < \frac{1}{n}$$

Donc $\forall\, 0 \leq k < n$, comme $p_k \leq p_n$, on a

$$p_k\left(\frac{x_n}{f(x_n)}\right) < \frac{1}{n}$$

$$n \to \infty \Rightarrow p_k\left(\frac{x_n}{f(x_n)}\right) \longrightarrow 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow \frac{x_n}{f(x_n)} \longrightarrow 0 \text{ dans } (E, d)$$

Or $1 = f\left(\frac{x_n}{f(x_n)}\right) \not\longrightarrow 0 = f(0) \Rightarrow f$ n'est pas continue en 0

c) On a montré par contraposée que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$|f(x)| \leq n_0\, p_{n_0}(x) \quad \forall x \in E$$

(8) $u(x) = x^2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ mais $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |x^2| = +\infty$

Donc $u \mapsto \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$ n'est pas une norme sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$

(9) • u continue, $[-k, k]$ compact de $\mathbb{R}$ donc

$$\sup_{[-k,k]} |u| = \max_{[-k,k]} |u|$$

• $[-k, k] \subset [-(k+1), k+1] \Rightarrow p_k \leq p_{k+1}$

• $p_k(u) = 0 \;\forall k \Rightarrow u|_{[-k,k]} = 0 \;\forall k \Rightarrow u = 0$ sur $\mathbb{R}$.

- $p_k(\lambda u) = |\lambda|\, p_k(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$
- $|u+v| \leq |u| + |v| \Rightarrow p_k(u+v) \leq p_k(u) + p_k(v).$

$\forall k \in \mathbb{N}$

$\forall u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$

(10) Il suffit de montrer que (E, d) est complet.
Soit (u_n) une suite de Cauchy ds (E, d). Alors (u_n) est de Cauchy ds $(\mathcal{C}([-k,k]), \|\cdot\|_\infty)$ complet

$\exists\, u^{(k)} \in \mathcal{C}([-k,k])$ tq

$$u_n \longrightarrow u^{(k)} \text{ unif sur } [-k,k]$$

Par unicité de la limite

$$u^{(k+1)}\big|_{[-k,k]} = u^{(k)}$$

En posant $u(x) = u^{(k)}(x)$ si $x \in [-k,k]$, u est bien défini et continue sur $\mathbb{R}$. Donc

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \text{ et } \underbrace{u_n \longrightarrow u \text{ unif sur } [-k,k]\ \forall k}$$

$$\Longleftrightarrow p_k(u_n - u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall k$$

$\Rightarrow d(u_n, u) \longrightarrow 0.$

(11) Si $u_n \xrightarrow{d} u$
Soit $K \subset \mathbb{R}$ compact $\Rightarrow \exists\, k_0 \in \mathbb{N}$ tq $K \subset [-k_0, k_0]$
Comme $p_{k_0}(u_n - u) \longrightarrow 0$, on en déduit que

$$u_n \longrightarrow u \text{ unif sur } K.$$

• Si $u_n \to u$ unif sur tout compact de $\mathbb{R}$, en particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$u_n \to u \text{ unif sur } [-k, k]$$

$$\Rightarrow p_k(u_n - u) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow d(u_n, u) \to 0.$$