# Espaces de Lebesgue

Jean-François Babadjian
Université Paris-Saclay, Laboratoire de mathématiques d'Orsay
jean-francois.babadjian@universite-paris-saclay.fr

## 1 Rappels de théorie de la mesure

**Définition 1.1.** Une *tribu* (ou *$\sigma$-algèbre*) sur un ensemble $X$ est une sous famille $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant :
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$ ;
(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

**Définition 1.2.** Une *mesure* est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ qui satisfait
(i) $\mu(\emptyset) = 0$ ;
(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

Pour les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ on munit implicitement l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$ de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{K})$.

**Définition 1.3.** Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ est $\mathcal{A}$-mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$ ce qui est encore équivalent à $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{K}$.

## 2 Premières définitions et propriétés

**Définition 2.1.** Soit $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \ \mathcal{A}\text{-mesurable} : \ \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < +\infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : \ \mu(\{|f| > C\}) = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Commençons par établir deux inégalités fondamentales en théorie de l'intégration.

**Proposition 2.2** (**Inégalité de Hölder**)**.** *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ et*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}.$$

*Démonstration.* Par concavité du logarithme sur $]0,+\infty[$, pour $a,b>0$ et $1\le p,p'<\infty$ avec $1/p+1/p'=1$, on a

$$\log(ab)=\log(a)+\log(b)=\frac{1}{p}\log(a^p)+\frac{1}{p'}\log(a^{p'})\le\log\left(\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{p'}b^{p'}\right).$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient l'*inégalité de Young*

$$ab\le\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{p'}b^{p'}$$

qui reste vraie pour tout $a\ge 0$ et $b\ge 0$. En prenant $a=|f(x)|/\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ et $b=|g(x)|/\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}$ et en intégrant sur $X$, on obtient l'inégalité voulue.

Dans l'un des cas $p=1$ ou $p=\infty$, le résultat est immédiat par définition du sup-essentiel. □

**Proposition 2.3 (Inégalité de Minkowski).** *Pour $1\le p\le\infty$ et pour tout $f$, $g\in\mathcal{L}^p(X)$, on a*

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^p(X)}\le\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}+\|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}.$$

*Démonstration.* On commence par le cas $p=\infty$. Par définition du sup-essentiel, $|f(x)|\le\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ et $|g(x)|\le\|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ pour $\mu$-presque tout $x\in X$, d'où

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|\le\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}+\|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)},$$

pour $\mu$-presque tout $x\in E$, et donc $\|f+g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}\le\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}+\|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$.

Si $p=1$, on a

$$\|f+g\|_{\mathcal{L}^1(X)}=\int_E|f+g|\,d\mu\le\int_X(|f|+|g|)\,d\mu=\|f\|_{\mathcal{L}^1(X)}+\|g\|_{\mathcal{L}^1(X)}.$$

Enfin, si $1<p<\infty$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{\mathcal{L}^p(X)} &= \int_E|f+g|^p\,d\mu=\int_X|f+g||f+g|^{p-1}\,d\mu\\
&\le \int_X|f||f+g|^{p-1}\,d\mu+\int_X|g||f+g|^{p-1}\,d\mu\\
&\le (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}+\|g\|_{\mathcal{L}^p(X)})\left(\int_X(|f+g|^{p-1})^{p/(p-1)}\,d\mu\right)^{(p-1)/p}\\
&= (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}+\|g\|_{\mathcal{L}^p(X)})\|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(X)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat. □

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $\mathcal{L}^p(X)\ni f\mapsto\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ satisfait l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p=|\lambda|\|f\|_p$ pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ et $f\in\mathcal{L}^p(X)$ et $\|0\|_{\mathcal{L}^p(X)}=0$. Malheureusement, $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}=0$ n'implique pas forcément que $f=0$, ce qui montre que l'application $\mathcal{L}^p(X)\ni f\mapsto\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ (c'est en fait une semi-norme). En effet, on a le résultat suivant qui caractérise toutes les fonctions de semi-norme nulle :

**Proposition 2.4.** *Soit $f:X\to[0,+\infty[$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable telle que*

$$\int_X f\,d\mu=0.$$

*Alors $f(x)=0$ $\mu$-presque pour tout $x\in X$.*

*Démonstration.* On considère les ensembles mesurables $E_n := \{f \geq 1/n\}$. La suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu = 0,$$

et donc, $\mu(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage à la limite que

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0,$$

ce qui montre bien que $f = 0$ $\mu$-p.p. dans $X$. $\square$

Etant données deux fonctions $\mathcal{A}$-mesurables $f$ et $g : X \to \mathbb{K}$, on dit que $f \sim g$, si $f(x) = g(x)$ $\mu$-presque pour tout $x \in X$. On peut montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) dans la classe des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables. Les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ peuvent être rendus normés en considérant l'espace quotient $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ noté dorénavant $L^p(X)$. Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$, on notera (temporairement) $[f]$ sa classe d'équivalence et par définition de la norme dans un espace quotient, on a

$$\|[f]\|_{L^p(X)} = \inf_{f\in[f]} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \quad \text{pour tout } f \in [f].$$

Par abus de notation, nous identifierons systématiquement une fonction avec sa classe d'équivalence.

**Définition 2.5.** Soit $f \in L^p(X)$, on note

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les inégalités de Hölder et Minkowski restent vraies dans les $L^p(X)$.

**Proposition 2.6 (Inégalité de Hölder).** *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^{p'}(X)$ alors $fg \in L^1(X)$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

**Proposition 2.7 (Inégalité de Minkowski).** *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et tout $f$, $g \in L^p(X)$, on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Proposition 2.8.** *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'application $L^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_p$ définit une norme sur $L^p(X)$. De plus, pour $p = 2$, l'application*

$$(f, g) \in L^2(X) \times L^2(X) \mapsto \langle f, g\rangle := \int_X f\bar{g}\,d\mu.$$

*définit un produit scalaire sur $L^2(X)$.*

*Démonstration.* D'après la Proposition 2.4, si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ $\mu$-p.p. dans $X$, et donc $f = 0$ dans $L^p(X)$. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(X)$. Enfin l'inégalité triangulaire n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Si $p = 2$, l'inégalité de Hölder (Cauchy-Schwarz dans ce cas) assure que l'intégrale $\int_X fg\,d\mu$ est bien définie pour $f$ et $g \in L^2(X)$. De plus, il s'agit clairement d'une forme sesquilinéaire (par linéarité de l'intégrale) hermitienne définie positive (d'après la Proposition 2.4) ce qui assure que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est effectivement un produit scalaire sur $L^2(X)$. $\square$

## 3 Complétude

**Théorème 3.1** (**Riesz-Fischer**)**.** *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(X)$ est complet.*

*Démonstration.* Supposons d'abord que $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Grâce à la propriété de Cauchy, on construit par récurrence une sous-suite $(f_{n_j})_{j\geq 1}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq 2^{-j} \quad \text{pour tout } j \geq 1.$$

Soit $u_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, alors la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est croissante et

$$\|u_k\|_p \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} \leq 1.$$

Par conséquent, le théorème de la convergence monotone assure que

$$\int_X |u|^p \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X |u_k|^p \, d\mu \leq 1,$$

où l'on a posé $u := \lim_k u_k = \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, ce qui montre que $u(x) < \infty$ pour $\mu$-presque tout $x \in X$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big) & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| < \infty, \\ 0 & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| = \infty \end{cases}$$

La fonction $f$ ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable et comme la somme

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \big(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\big)$$

se téléscope, on en déduit que $f_{n_j} \to f$ $\mu$-p.p. dans $X$. Comme $|f| \leq |f_{n_1}| + u$, l'inégalité de Minkowski montre que

$$\|f\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \|u\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1,$$

ce que assure que $f \in L^p(X)$. Comme $|f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + u \in L^p(X)$, le théorème de la convergence dominée montre que $f_{n_j} \to f$ dans $L^p(X)$. Montrons que toute la suite $f_n \to f$ dans $L^p(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le critère de Cauchy, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$. Soit $j$ assez grand de sorte que $n_j \geq N$, alors il vient que

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f\|_p \leq \varepsilon + \|f_{n_j} - f\|_p.$$

En faisant tendre $j \to \infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on obtient la convergence souhaitée.

Pour $p = \infty$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(X)$, alors il existe un ensemble $\mu$-négligeable $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad \text{pour tout } x \in X \setminus A \text{ et tout } m, n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Donc si $x \in X \setminus A$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ complet, elle admet donc une limite notée $f(x)$. Par ailleurs, on pose $f(x) = 0$ si $x \in A$. La fonction $f$ ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables. De plus, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(X)$ elle est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc par passage à la limite dans la première inégalité de (3.1), il vient $|f(x)| \le M$ $\mu$-presque pour tout $x \in X$ soit $f \in L^\infty(X)$. Enfin d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \ge N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon$. Donc par passage à la limite dans la deuxième inégalité de (3.1), il vient $|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ pour tout $n \ge N$ et $\mu$-presque tout $x \in X$, soit $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$ pour tout $n \ge N$, ce qui montre que $f_n \to f$ dans $L^\infty(X)$. □

**Corollaire 3.2.** *Pour tout $1 \le p \le \infty$, les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach et $L^2(X)$ est un espace de Hilbert.*

# 4 Résultats de densité

Pour $1 \le p \le \infty$, on note $\mathcal{E}_p$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(X)$ qui sont étagées.

**Théorème 4.1.** *Pour tout $1 \le p \le \infty$, l'ensemble $\mathcal{E}_p$ est dense dans $L^p(X)$.*

*Démonstration.* Soit $f \in L^p(X)$. On peut supposer sans restreindre la généralité que $f \ge 0$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions étagées définies de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$, on définit les ensembles $\mathcal{A}$-mesurables

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \le f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad F_n := \{f \ge n\}.$$

et pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(x) + n\chi_{F_n}(x).$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge $\mu$-presque partout vers $f$.

Si $p = \infty$, alors pour tout $n \ge \|f\|_\infty$, on a $|f_n(x) - f(x)| \le 2^{-n}$ presque pour tout $x \in X$, et donc $\|f_n - f\|_\infty \le 2^{-n} \to 0$.

Si $1 \le p < \infty$, comme $f_n(x) \nearrow f(x)$ pour presque tout $x \in E$, on en déduit que $|f(x) - f_n(x)|^p \to 0$ et $|f(x) - f_n(x)|^p \le 2^p f(x)^p$ $\mu$-presque pour tout $x \in X$, d'où par le théorème de la convergence dominée $\|f - f_n\|_p \to 0$. □

Nous allons à présent nous restreindre au cas de mesures Boréliennes sur $\mathbb{R}^N$, finies sur les compacts (que l'on appelle mesures de Radon). Notons que la mesure de Lebesgue, notée dorénavant $\mathcal{L}^N$, en est un cas particulier puisqu'un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^N$ étant borné, il est inclu dans un cube $[-R, R]^N$ avec $R > 0$. Par conséquent $\mathcal{L}^N(K) \le (2R)^N < \infty$.

Les mesures de Radon positives jouissent d'une propriété de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par l'intérieur à l'aide de compacts, et par l'extérieur à l'aide d'ouverts.

**Proposition 4.2.** *Soit $\mu$ une mesure Borélienne dans $\mathbb{R}^N$ finie sur les compacts. Pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mu(A) < \infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K$ et un ouvert $U$ tels que $K \subset A \subset U$ et*

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon, \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon.$$

*Démonstration.* Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On pose $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ce qui définit une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$.

On considère la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \;:=\; & \Big\{ B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe} \\ & \quad \text{un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \Big\}. \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}$ contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fermé $C_n \subset B_n$ tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

L'ensemble $C := \bigcap_n C_n$ est fermé et

$$\nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus C\right) = \nu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon,$$

ce qui montre que $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n=0}^{m} C_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \\ &\leq \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour $m$ asssez grand, on a donc en posant $C' := \bigcup_{n=0}^{m} C_n$

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \setminus C'\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre, $C'$ étant fermé, que $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$.

Comme tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles fermés, on en déduit que $\mathcal{F}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} :\ {}^{c}B \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable. Par conséquent, $\mathcal{G}$ est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans $\mathcal{G}$, on en déduit que la tribu $\mathcal{G}$ contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout $B \subset \mathbb{R}^N$ Borélien et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C \subset B$ tel que $\nu(B\setminus C) < \varepsilon$. En particulier, pour $B = A$, on obtient un fermé $C \subset A$ tel que $\mu(A\setminus C) < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := C \cap \overline{B}(0, n)$ qui est un compact inclu dans $A$. Comme $\mu(C) \leq \mu(A) < \infty$, on a $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$. Pour $n$ assez grand, on obtient donc un compact $K_n \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. L'ensemble $B(0, n) \setminus A$ étant un Borélien de mesure finie (car $\mu$ est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé $C_n \subset B(0, n)\setminus A$ tel que $\mu((B(0, n)\setminus A)\setminus C_n) < \varepsilon/2^n$. Posons $U_n = B(0, n)\setminus C_n$ qui est un ouvert avec $B(0, n) \cap A \subset U_n$ et tel que $\mu(U_n \setminus A) < \varepsilon/2^n$. Si on pose $U := \bigcup_n U_n$ qui est un ouvert, on obtient que $A \subset U$ et $\mu(U \setminus A) \leq \sum_n \mu(U_n \setminus A) < \varepsilon$. $\square$

Cette propriété de régularité des mesures de Radon permet de montrer la densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue pour $p < \infty$.

**Théorème 4.3.** *Soit $\mu$ une mesure Borélienne dans $\mathbb{R}^N$ finie sur les compacts. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.*

*Démonstration.* Soit $f \in L^p(\Omega,\mu)$. D'après le Théorème 4.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g \in L^p(\Omega,\mu)$ telle que $\|f-g\|_p \le \varepsilon$. On est donc ramené à montrer que toute fonction étagée peut être approchée par une fonction de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la norme $L^p(\Omega)$.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Le Théorème de la convergence dominée assure que $\|g - \chi_{K_n} g\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $g = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$.

Par linéarité, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble Borélien $A$ tel que $\overline{A}$ est compact et $\overline{A} \subset \Omega$ (autrement dit $\chi_A$ est à support compact dans $\Omega$). En particulier, comme $A$ est borné, on a $\mu(A) < \infty$. Par conséquent la Proposition 4.2 assure, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un ouvert $U$ et d'un compact $K$ tels que $K \subset A \subset U$ et $\mu(U \setminus K) \le \varepsilon$. Le Lemme d'Urysohn donne alors l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])$ telle que $h = 1$ sur $K$ et $\mathrm{Supp}(h) \subset U$. D'où, comme $\chi_K \le h \le \chi_U$,

$$\int_\Omega |h - \chi_A|^p \, d\mu \le \mu(U \setminus K) \le \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Dans le cas de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, nous allons améliorer le résultat précédent en montrant que l'ensemble des fonctions régulières et à support compact est dense dans les espaces de Lebesgue. Si $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ l'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues à tout ordre et telles que $\mathrm{Supp}(f)$ est un compact inclus dans $\Omega$.

**Définition 4.4.** Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\rho \ge 0$, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset \overline{B}(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\,dx = 1$ et $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0,\frac{1}{n})$. On dit que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

A titre d'exemple, on peut vérifier que la fonction $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x) := c \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \ge 1, \end{cases}$$

où la constante $c := \left(\int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}\,dx\right)^{-1}$, satisfait les propriétés requises ci-dessus.

**Définition 4.5.** Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable (*i.e.* dans $L^1(K)$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, et on note $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$), on définit le produit de convolution

$$f * \rho_n(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y) f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)\,dy \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

**Remarque 4.6.** Notons que l'intégrale est bien défnie car $y \mapsto \rho_n(x-y)$ s'annule en dehors de $\overline{B}(x,\frac{1}{n})$, elle est bornée sur cet ensemble et $f$ est intégrable sur cet ensemble.

**Lemme 4.7.** *Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus*
- *si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}(f * \rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f) + \overline{B}(0,\frac{1}{n})$ et $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \le p \le \infty$ ;*
- *si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \le p < \infty$.*

*Démonstration.* Montrons d'abord que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On montre par convergence dominée que $f * \rho_n$ est continue sur $\mathbb{R}^N$. Montrons à présent qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < 1$, en notant $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on calcule

$$\frac{f * \rho_n(x + he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho_n(x + he_i - y) - \rho_n(x-y)}{h} f(y)\,dy.$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\rho_n(x+h-ye_i)-\rho_n(x-y)}{h} f(y) \to \partial_{x_i}\rho_n(x-y)f(y)$ quand $h \to 0$ car $\rho_n$ est différentiable sur $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, le Théorème des accroissements finis montre que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a $\left|\frac{\rho_n(x+he_i-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y)\right| \leq \max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n| \chi_{\overline{B}(x,2)}(y)|f(y)|$ car $\rho_n(x+he_i-y) = \rho_n(x-y) = 0$ si $|y-x| > 2$. Notons que $\partial_{x_i}\rho_n$ étant également $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ elle est bornée sur $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que $\max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n| \chi_{\overline{B}(x,2)}|f| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Le Théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f * \rho_n(x+he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i}\rho_n(x-y)f(y)\, dy,$$

ce qui montre que $f * \rho_n$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et $\partial_{x_i}(f * \rho_n) = f * (\partial_{x_i}\rho_n)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On montre de nouveau par convergence dominée que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur $\mathbb{R}^N$, ce qui établit que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$. Par récurrence, on montre ainsi que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$.

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B}(0,R)$. Comme $f$ est continue sur le compact $\overline{B}(0,R)$ (et donc bornée) et nulle à l'extérieur de $\overline{B}(0,R)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. De plus si $x \notin \mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n)$ et $y \in \mathrm{Supp}(\rho_n)$, alors $x - y \notin \mathrm{Supp}(f)$ et donc $f(x-y) = 0$. Par conséquent,

$$f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)\, dy = \int_{\mathrm{Supp}(\rho_n)} f(x-y)\rho_n(y)\, dy = 0,$$

ce qui montre que le support de $f * \rho_n$ (qui est toujours un fermé) est inclus dans $\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f) + \overline{B}(0, \frac{1}{n})$ et en particulier que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Comme $f$ est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tels que $\|x - x'\| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand de sorte que $1/n \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour tout $y \in \overline{B}(0, \frac{1}{n})$, on a $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon$. On multiplie alors cette inégalité par $\rho_n(y) \geq 0$, puis on intègre sur $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f * \rho_n(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(x) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)\, dy \leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.1}$$

où l'on a utilisé le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de $\delta$ donc $\varepsilon$) tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f * \rho_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $f * \rho_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ et donc dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si $1 \leq p < \infty$, comme $f(x) = f * \rho_n(x) = 0$ si $|x| > R + \frac{1}{n}$, on peut élever l'expression (4.1) à la puissance $p$, puis par intégration,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx = \int_{\overline{B}(0,R+\frac{1}{n})} |f(x) - f * \rho_n(x)|^p\, dx \leq \varepsilon^p \mathcal{L}^N(\overline{B}(0, R+1)), \tag{4.2}$$

ce qui montre également que $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Supposons enfin que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq p < \infty$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\int_K |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, \mathcal{L}^N(K)^{1-1/p} < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, et donc que le produit de convolution $f * \rho_n$ est bien défini. D'après le Théorème 4.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$.

Par ailleurs, d'après (4.2), on a $\|g - g * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \varepsilon$ pour $n$ assez grand. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\|f - f * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\le \|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|g - g*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g-f)*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\le 2\varepsilon + \|(g-f)*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder et le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\, dy = 1$,

$$\begin{aligned}|(g-f)*\rho_n(x)|^p &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy\right|^p \\ &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)^{1/p}\rho_n(y)^{1/p'}\, dy\right|^p \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y) - f(x-y)|^p \rho_n(y)\, dy,\end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport à $x$ et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient que

$$\|(g-f)*\rho_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)-f(x-y)|^p\, dx\right)\rho_n(y)\, dy = \|g-f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Par conséquent, $\|f - f*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le 3\varepsilon$, ce qui conclut la preuve du lemme. □

**Corollaire 4.8.** *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \le p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

*Démonstration.* D'après le Théorème 4.3, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f-g\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon$. On étend $g$ par zéro en dehors de $\Omega$ et on note $\tilde g$ cette extension. Alors $\tilde g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et $\mathrm{Supp}(\tilde g) \subset \Omega$. D'après le Lemme 4.7, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que pour tout $n \ge n_0$, $\mathrm{Supp}(\tilde g * \rho_n) \subset \mathrm{Supp}(\tilde g) + \overline{B}(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\|\tilde g * \rho_n - \tilde g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le \varepsilon$. Finalement, on obtient que $f_n := \tilde g * \rho_n|_\Omega \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et

$$\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \le \|f-g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \tilde g * \rho_n\|_{L^p(\Omega)} \le 2\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

# 5 Séparabilité

Nous sommes à présent en mesure de discuter la séparabilité des espaces de Lebesgue.

**Proposition 5.1.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \le p < \infty$. Alors l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

*Démonstration.* Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts, *i.e.*, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. On sait que $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable par rapport à la norme uniforme sur $K_n$. Or les ensembles $K_n$ étant bornés, la convergence uniforme sur $K_n$ implique la convergence dans $L^p(K_n)$ pour tout $1 \le p < \infty$ car

$$\int_{K_n} |f-g|^p\, dx \le \mathcal{L}^N(K_n) \sup_{K_n} |f-g|^p \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{C}(K_n).$$

Par conséquent, l'espace $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable pour la convergence dans $L^p(K_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un ensemble $D_n$ dénombrable dense dans $\mathcal{C}(K_n)$ pour la convergence dans $L^p(K_n)$.

Posons $D := \bigcup_n D_n$ qui est par conséquent dénombrable. Si l'on énumère les éléments de $D$ en une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, chacune des fonctions $f_i$ est une fonction continue sur un sous-ensemble compact de $\Omega$. On étend alors $f_i$ par zéro sur $\Omega$, et on note $\tilde{f}_i$ cette extension qui n'est *a priori* plus continue mais toutefois dans $L^p(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} := \{\tilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est alors un sous-ensemble dénombrable de $L^p(\Omega)$. Montrons qu'il est dense dans $L^p(\Omega)$. Pour ce faire, soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 4.3, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f-g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Ensuite il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(g) \subset K_n$. Donc il existe un $h \in D_n$ tel que $\|g-h\|_{L^p(K_n)} \leq \varepsilon$. Soit $\tilde{h}$ l'extension par zéro de $h$ sur $\Omega$. Alors $\tilde{h} \in \tilde{D}$ et comme $g = 0$ sur $\Omega \setminus K_n$, il vient

$$\int_\Omega |\tilde{h} - g|^p \, dx = \int_{K_n} |h-g|^p \, dx \leq \varepsilon^p.$$

Finalement, on a que $\|f - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f-g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon$, ce qui montre la densité de $\tilde{D}$ dans $L^p(\Omega)$. □

**Proposition 5.2.** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

*Démonstration.* Soit $X := \{\mathbf{1}_{B(x,r)} : \ B(x,r) \subset \Omega\}$ qui est une famille non dénombrable de $L^\infty(\Omega)$. Si $\chi$, $\chi' \in X$ sont telles que $\chi \neq \chi'$, alors $\|\chi - \chi'\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble $D = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^\infty(\Omega)$ dénombrable et dense. Soit $\Phi : X \to \mathbb{N}$ l'application qui à chaque $\chi \in X$ associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\chi - f_n\|_\infty \leq 1/3$. Cette application est bien définie par densité de $D$ dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons maintenant que $\Phi(\chi_1) = \Phi(\chi_2) = n$, alors $\|\chi_1 - f_n\|_\infty \leq 1/3$ et $\|\chi_2 - f_n\|_\infty \leq 1/3$, ce qui implique par l'inégalité triangulaire que $\|\chi_1 - \chi_2\|_\infty \leq 2/3 < 1$. Comme $\chi_1$ et $\chi_2 \in X$ sont des fonctions caractéristiques, alors nécessairement $\chi_1 = \chi_2$ dans $L^\infty(\Omega)$ ce qui montre l'injectivité de $\Phi$. L'ensemble $X$ étant non dénombrable, on aboutit à une contradition. □

# 6 Critère de compacité

Pour finir, nous établissons un critère compacité dans les espaces de Lebesgue.

**Théorème 6.1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov).** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $1 \leq p < \infty$, telle que*

*(i)* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < +\infty$ *;*

*(ii)* $\sup_{\|y\|\leq\delta} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x+y) - f_n(x)|^p \, dx \to 0$ *quand* $\delta \to 0$*.*

*Alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, la suite $(f_{n|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^p(K)$.*

*Démonstration.* Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante comme dans la Définition 4.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(K)$. Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K)$. Pour faire, nous allons appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. Tout d'abord d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in K$, on a

$$|f_n * \rho_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y)|\rho_k(y) \, dy \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_k,$$

où, d'après l'hypothèse (i), la constante $C_k > 0$ est indépendante de $n$ et de $x$. Par ailleurs, si $x$ et

$x' \in K$,

$$\begin{aligned} |f_n * \rho_k(x) - f_n * \rho_k(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x'-y)| \rho_k(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-x'+z) - f_n(z)| \rho_k(x'-z)\, dz \\ &\leq \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \left( \sup_{\|y\| \leq \|x-x'\|} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(z+y) - f_n(z)|^p\, dz \right)^{1/p} \\ &= \omega_k(\|x-x'\|), \end{aligned}$$

où, d'après l'hypothèse (ii), $\omega_k(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$, ce qui montre l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_n * \rho_{k_{|K}})_{n\in\mathbb{N}}$. Le Théorème d'Ascoli-Arzela combiné avec un principe d'extraction diagonal assure l'existence d'une sous-suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_{|K}})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{C}(K)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $K$ est borné on en déduit que $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_{|K}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(K)$.

Nous allons à présent montrer que la sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$ ce qui montrera qu'elle converge dans cet espace par le Théorème de Riesz-Fischer. Pour ce faire, on écrit grâce à l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} \leq{}& \|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(n)} * \rho_k\|_{L^p(K)} \\ &+ \|f_{\sigma(n)} * \rho_k - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)} + \|f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Comme $\mathrm{Supp}(\rho_k) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{k})$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y)\, dy = 1$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)| \leq \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)| \rho_k(y)\, dy.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance $p$, en intégrant par rapport à $x \in K$ et en appliquant l'inégalité de Hölder et le Théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx &\leq \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} \left( \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|^p\, dx \right) \rho_k(y)\, dy \\ &\leq \sup_{\|y\|\leq 1/k} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_n(x) - f_n(x-y)|^p\, dx. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii), on en déduit alors que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx = 0.$$

Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0}(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans $L^p(K)$, elle y est de Cauchy et on peut trouver un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m$, $n \geq N_0$,

$$\|f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0} - f_{\sigma(m)} * \rho_{k_0}\|_{L^p(K)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc si $m$, $n \geq N_0$, (6.1) donne $\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} \leq \varepsilon$, ce qui montre que $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$, et donc qu'elle converge dans cet espace. $\square$

# 7 Dualité dans les espaces de Lebesgue

## 7.1 Le cas Hilbertien de $L^2$

En tant qu'espace de Hilbert, le Théorème de Riesz permet d'identifier le dual de $L^2$ avec lui même.

**Théorème 7.1.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $L \in [L^2(X)]'$, il existe un unique $f \in L^2(X)$ tel que pour tout $g \in L^2(X)$,*

$$L(g) = \int_X fg \, d\mu, \quad \|L\|_{[L^2(X)]'} = \|f\|_2.$$

# 8 Le cas $L^p$, $1 \leq p < \infty$

Le cas général est plus difficile. Il repose sur le théorème de Radon-Nikodým lui même une conséquence du Théorème 7.1. Nous donnons ici une version loin d'être optimale, mais toutefois suffisante pour la suite.

**Théorème 8.1 (Radon-Nikodým).** *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $\lambda$ et $\nu$ deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que $\lambda$ est absolument continue par rapport à $\nu$ : si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $\nu(A) = 0$, alors $\lambda(A) = 0$. Alors, il existe une unique fonction $f \in L^1(X, \nu)$ avec $f \geq 0$ $\nu$-p.p. telle que*

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\nu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

*Démonstration.* **Etape 1 :** On suppose ici que $\lambda \leq \nu$. Soit $u : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable, d'après le Théorème 4.1 de densité des fonctions étagées, il existe une suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions positives étagées telles que $u_n \to u$ simplement dans $X$. Comme $u_n$ est étagée, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, donc

$$\int_X u_n \, d\lambda \leq \int_X u_n \, d\nu,$$

puis, par convergence monotone, on obtient que

$$\int_X u \, d\lambda \leq \int_X u \, d\nu.$$

En prenant $u = |g|^2$ avec $g \in L^2(X, \nu)$, on obtient que

$$\int_X |g|^2 \, d\lambda \leq \int_X |g|^2 \, d\nu.$$

Ensuite, $\lambda$ étant une mesure finie, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(X, \lambda)$ montre que

$$\int_X |g| \, d\lambda \leq \sqrt{\lambda(X)} \left( \int_X |g|^2 \, d\nu \right)^{1/2},$$

de sorte que $L^2(X, \nu) \subset L^1(X, \lambda)$. Ceci montre alors que l'application $\Phi : L^2(X, \nu) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(g) = \int_X g \, d\lambda,$$

est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur $L^2(X,\nu)$. Le Théorème 7.1 nous donne alors l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^2(X,\nu)$ telle que

$$\Phi(g) = \int_X fg\, d\nu = \int_X g\, d\lambda.$$

Comme la mesure $\nu$ est finie, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a que $\chi_A \in L^2(\mathbb{R},\nu)$ et donc

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\nu,$$

ce qui est l'inégalité demandée. Montrons de plus que $f(x) \in [0,1]$ pour $\nu$-presque tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \lambda(\{f \leq -1/n\}) = \int_{\{f\leq -1/n\}} f\, d\nu \leq -\frac{1}{n}\nu(\{f \leq -1/n\}) \leq 0,$$

ce qui montre que $\nu(\{f \leq -1/n\}) = \lambda(\{f \leq -1/n\}) = 0$. Comme $\{f < 0\} = \bigcup_n \{f \leq -1/n\}$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f < 0\}) = 0$. De même

$$\nu(\{f \geq 1+1/n\}) \geq \lambda(\{f \geq 1+1/n\}) = \int_{\{f\geq 1+1/n\}} f\, d\nu \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)\nu(\{f \geq 1+1/n\}),$$

ce qui montre que $\nu(\{f \geq 1+1/n\}) = 0$. Comme $\{f > 1\} = \bigcup_n (\{f \geq 1+1/n\})$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f > 1\}) = 0$.

**Etape 2 :** On suppose maintenant que $\lambda$ est absolument continue par rapport à $\nu$. Il s'ensuit que les mesures $\lambda$ et $\nu+\lambda$ sont finies et $\lambda \leq \lambda + \nu$, de sorte qu'on peut appliquer la conclusion de l'étape 1. Il existe donc une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f \in L^1(X, \nu+\lambda)$ telle que $f(x) \in [0,1]$ pour $(\nu+\lambda)$-presque tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\nu + \int_A f\, d\lambda,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, soit

$$\int_A f\, d\nu = \int_A (1-f)\, d\lambda. \tag{8.1}$$

Comme $\nu \leq \nu+\lambda$ et $\lambda \leq \nu+\lambda$, alors $f$ prend ses valeurs dans $[0,1]$ $\nu$-p.p. et $\lambda$-p.p. Par approximation (voir la Proposition 4.1) et convergence monotone, on obtient également que

$$\int_X fg\, d\nu = \int_X (1-f)g\, d\lambda \tag{8.2}$$

pour toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable $g : X \to \mathbb{R}^+$. En notant $Z := \{f = 1\}$, on a d'après (8.1) que $\nu(Z) = 0$ et donc que $\lambda(Z) = 0$. Définissons alors $\bar{f} = \frac{f}{1-f}\chi_{Z^c}$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et positive, il vient donc en prenant $g = \frac{\chi_{A\setminus Z}}{1-f}$ dans (8.2)

$$\lambda(A) = \lambda(A \setminus Z) = \int_X (1-f)\frac{\chi_{A\setminus Z}}{1-f}\, d\lambda = \int_A \bar{f}\, d\nu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Le fait que $\bar{f} \in L^1(X,\nu)$ vient du fait que $\lambda$ est une mesure finie. $\square$

Nous aurons également besoin de décomposer n'importe quelle forme linéaire continue sur $L^p$ comme la dfférence entre deux formes linéaires continues positives.

**Lemme 8.2.** *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe des formes linéaires continue positives $L^+$ et $L^-$ sur $L^p(X)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \textit{pour tout } f \in L^p(X).$$

*Démonstration.* Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in L^p(X) : \ f \geq 0 \ \mu\text{-p.p. sur } X\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}^+, \, g \leq f\}.$$

**Etape 1 :** *$L^+$ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$. Comme $0 \in \mathcal{C}^+$, $L^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq g \leq f$. Par continuité de $L$, on a $L(g) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g\|_p \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p$, et par passage au sup en $g$, on obtient que $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p < \infty$.

**Etape 2 :** *$L^+$ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient $f_1$ et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. On décompose $g$ comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \leq f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au sup en $g$,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité on se donne un $\varepsilon > 0$ . Par définition de $L^+$, il existe $g_1$ et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq g_i \leq f_i$ et $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résultat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

**Etape 3 :** *Définition et additivité de $L^+$ sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. On décompose $f$ comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si $f$ et $g \in L^p(X)$, alors $(f + g)^+ - (f + g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de $L^+$ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f + g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f + g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f + g) = L^+(f) + L^+(g)$. En particulier, comme $(-f)^\pm = f^\mp$, on en déduit que $L^+(-f) = -L^+(f)$.

**Etape 4 :** *$L^+$ est continue sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. Comme $L^+$ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de $L^+$ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant $f_1$ et $f_2 \in L^p(X)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f_1 - f_2\|_p.$$

**Etape 5 :** *$L^+$ est une forme linéaire sur $L^p(X)$.* L'additivité de $L^+$ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $L^+(-f) = -L^+(f)$, l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $L^+(qrf) = qL^+(rf) = L^+(pf) = pL^+(f)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de $L^+$ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impliquent que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Etape 6 :** *$L^-$ est une forme linéaire continue positive sur $L^p(X)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors $L^-$ est clairement une forme linéaire continue sur $L^p(X)$. De plus, par définition de $L^+$, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que $L^-$ est également positive. □

Venons en maintenant à la caractérisation du dual de $L^p$.

**Théorème 8.3.** *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$-fini, i.e., il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que*

$$\mu(E_n) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

*Soit $1 \leq p < \infty$ et $p'$ l'exposant conjugué donné par $1/p + 1/p' = 1$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(X)$ telle que*

$$L(g) = \int_X fg\, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X)$$

*et*

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} = \|f\|_{L^{p'}(X)}.$$

*Par conséquent, le dual de $L^p(X)$ est isométriquement isomorphe à $L^{p'}(X)$.*

Avant de procéder à la preuve du Théorème 8.3, remarquons que celui-ci s'applique à la mesure de Lebesgue qui est $\sigma$-finie puisque $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n\geq 1} B(0,n)$ et, $\mathcal{L}^N$ étant finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N(B(0,n)) < \infty$ pour tout $n \geq 1$.

*Démonstration.* Posons $F_0 = E_0$ et pour tout $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ de sorte que $\mu(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et les $F_n$ sont deux à deux disjoints.

**Etape 1 :** Supposons tout d'abord que $L$ et une forme linéaire continue positive. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\nu_n(A) = \mu(A \cap F_n), \quad \lambda_n(A) := L(\chi_{A\cap F_n}).$$

Alors $\nu_n$ est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$. Quant à $\lambda_n$, on a clairement que $\lambda_n(\emptyset) = L(0) = 0$. Par ailleurs, si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \lim_{k\to\infty} \chi_{\bigcup_{j=0}^k A_j} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^k \chi_{A_j} \quad \text{dans } X$$

et

$$0 \leq \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n} - \sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n} = \chi_{\bigcup_{j>k} A_j\cap F_n} \leq \chi_{F_n} \in L^p(X).$$

Le Théorème de la convergence dominée montre alors que $\sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n} \to \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n}$ dans $L^p(X)$. Donc, par continuité et linéarité de $L$,

$$\lambda_n\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = L\left(\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n}\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} L\left(\sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^k L\left(\chi_{A_j\cap F_n}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n(A_j),$$

ce qui montre que $\lambda_n$ est également une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. De plus comme

$$\lambda_n(A) = L(\chi_{A\cap F_n}) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\mu(A \cap F_n)^{1/p} = \|L\|_{[L^p(X)]'}\nu_n(A)^{1/p}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, on constate d'une part que $\lambda_n$ est absolument continue par rapport à $\nu_n$, et d'autre part que $\lambda_n$ est une mesure finie. Le Théorème de Radon-Nikodým montre alors l'existence d'une fonction $f_n \in L^1(X, \nu_n)$ telle que $f_n \geq 0$ $\nu_n$-p.p. et

$$\lambda_n(A) = \int_A f_n \, d\nu_n = \int_{A \cap F_n} f_n \, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Par linéarité de $L$, on en déduit que si $g$ est une fonction étagée positive,

$$L(g\chi_{F_n}) = \int_{F_n} f_n g \, d\mu,$$

puis par approximation (voir la Proposition 4.1) et convergence monotone, l'égalité précédente s'étend à toute fonction positive $g \in L^p(X)$. En posant $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \chi_{F_n}$, une nouvelle application du Théorème de la convergence dominée montre que $\sum_{n=0}^{k} g\chi_{F_n} \to g$ dans $L^p(X)$, et donc par linéarité et continuité de $L$ et convergence monotone,

$$L(g) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} g\chi_{F_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{F_n} f_n g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

Montrons enfin que $g \in L^{p'}(X)$. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A \cap E_k} f \, d\mu \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} \mu(A \cap E_k).$$

En choisissant $A = \{f \geq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A \cap E_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mu(A) = 0$ en faisant tendre $k \to \infty$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'}$. Si en revanche $1 < p < \infty$, on pose $g_{n,k} = f^{p'-1}\chi_{\{f \leq n\} \cap E_k}$. Vérifions que $g_{n,k} \in L^p(X)$ :

$$\int_X |g_{n,k}|^p \, d\mu = \int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu \leq n^{p'} \mu(E_k) < \infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu = L(g_{n,k}) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'} \|g_{n,k}\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'} \left(\int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu\right)^{1/p},$$

ce qui implique que

$$\left(\int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu\right)^{1/p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ puis $k \to \infty$ et par application du Théorème de la convergence monotone, il vient

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'},$$

ce qui montre bien que $f \in L^{p'}(X)$.

On a donc montré l'existence d'une fonction positive $f \in L^{p'}(X)$ telle que

$$L(g) = \int_X fg \, d\mu \quad \text{pour toute fonction } g \in L^p(X),\ g \geq 0.$$

Si $g \in L^p(X)$ est de signe quelconque, l'inégalité précédente reste vraie en décomposant $g$ comme la différence entre sa partie positive et négative, et en utilisant la linéarité de $L$.

**Etape 2 :** D'après le Lemme 8.2, on peut écrire que $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues et positives sur $L^p(X)$. En appliquant l'étape 1, on obtient des fonctions $f^\pm \in L^{p'}(X)$ telles que

$$L^\pm(g) = \int_X f^\pm g\, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

On pose $f := f^+ - f^- \in L^{p'}(X)$ de sorte que

$$L(g) = L^+(g) - L^-(g) = \int_X f^+ g\, d\mu - \int_X f^- g\, d\mu = \int_X fg\, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Par l'inégalité de Hölder, on a que

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} \leq \|f\|_{p'}.$$

Pour montrer l'inégalité opposée, on procède de même que dans l'étape 1. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, on choisit $g := \frac{f}{|f|}\chi_{A\cap\{f\neq 0\}\cap E_n} \in L^1(X)$ de sorte que

$$\int_{A\cap E_n} |f|\, d\mu = \int_X fg\, d\mu = L(g) \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\|g\|_1 \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\mu(A\cap E_n).$$

En choisissant $A = \{|f| \geq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A\cap E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $\mu(A) = 0$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et

$$\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'}.$$

Si $1 < p < \infty$, on prend $g = f|f|^{p'-2}\chi_{\{f\neq 0\}}$. Notons que $g \in L^p(X)$ car

$$\int_X |g|^p\, d\mu = \int_X |f|^{(p'-1)p}\, d\mu = \int_X |f|^{p'}\, d\mu < \infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_X |f|^{p'}\, d\mu = L(g) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'}\left(\int_X |f|^{p'}\, d\mu\right)^{1/p}$$

ce qui implique que

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Quant à l'unicité, si $f_1$ et $f_2 \in L^{p'}(X)$ satisfont

$$L(g) = \int_X f_1 g\, d\mu = \int_X f_2 g\, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X),$$

alors on a

$$\int_X (f_1 - f_2)g\, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Le choix $g = \frac{f_1 - f_2}{|f_1 - f_2|}\chi_{\{f_1\neq f_2\}\cap E_n} \in L^1(X)$ pour $p = 1$ montre que

$$\int_{E_n} |f_1 - f_2|\, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$ par convergence monotone, $\|f_1 - f_2\|_1 = 0$, soit $f_1 = f_2$ $\mu$-presque partout. Si $1 < p < \infty$, alors on pose $g = (f_1 - f_2)|(f_1 - f_2|^{p'-2}\chi_{\{f_1\neq f_2\}} \in L^p(X)$ et on obtient $\|f_1 - f_2\|_p = 0$ d'où $f_1 = f_2$ $\mu$-presque partout. $\square$

**Remarque 8.4.** Le Théorème 8.3 ne couvre pas le cas $p = \infty$. En particulier, $L^1(X)$ est un sous-espace strict du dual de $L^\infty(X)$. On peut montrer (et ça n'est pas forcément très difficile !) que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, n'importe quel élément $L \in [L^\infty(X)]'$ dans le dual de $L^\infty(X)$ s'identifie avec un unique élément de l'espace $\mathrm{ba}(X, \mathcal{A}, \mu)$ qui sont les applications **b**ornées et **a**dditives d'ensembles $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

— $\lambda(\emptyset) = 0$ ;
— $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ pour tout $A$, $B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$ ;
— la quantité

$$|\lambda|(X) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} |\lambda(A_i)| : \{A_i\}_{1 \leq i \leq m} \subset \mathcal{A} \text{ partition finie de } X \right\}$$

est finie ;
— $\lambda(A) = 0$ si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$ ;

via la dualité [1]

$$L(f) = \int_X f \, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in L^\infty(X).$$

1. Sous réserve que l'intégrale par rapport à une telle "mesure finiment additive" soit correctement définie