Espaces de fonctions continues

Jean-François Babadjian
Université Paris-Saclay, Laboratoire de mathématiques d'Orsay
jean-francois.babadjian@universite-paris-saclay.fr

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à montrer des propriétés topologiques d'espaces de fonctions continues d'un espace métrique (X, d) dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On notera

$$\mathcal{C}(X;\mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ continue}\}$$

et

$$\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ continue et bornée}\}.$$

Les espaces $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$ sont clairement des espaces vectoriels et la quantité

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$$

est finie quelque soit $f \in \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. On montre aisément qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$, ce qui confère à $(\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ une structure d'espace vectoriel normé.

1 Complétude de $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$

Proposition 1.1. *L'espace $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$ est complet. Pour ce faire, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$ et montrons qu'elle converge uniformément sur X vers une fonction $f \in \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq n_0$ et pour tout $x \in X$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ complet, ce qui assure l'existence d'un scalaire $f(x) \in \mathbb{K}$ tel que $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{K}$. Par passage à la limite quand $m \to \infty$ dans l'inégalité précédente, puis par passage au sup en x, il vient pour tout $n \geq n_0$,

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui assure que f_n converge uniformément vers f sur X. De plus, l'inégalité précédente montre que $\|f\|_\infty \leq \|f_{n_0}\|_\infty + \varepsilon < \infty$, ce qui assure que f est bornée. Il reste à montrer que la fonction f est continue. Pour ce faire, on utilise la continuité de f_{n_0} qui assure, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que si $y \in X$ et $d(x, y) \leq \delta$, alors $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq \varepsilon$. D'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre bien la continuité de f en x et donc que $f \in \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. $\square$

Remarque 1.2. Si (X, d) est un espace métrique compact, on a que $\mathcal{C}(X;\mathbb{K}) = \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. Dans ce cas, $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

2 Séparabilité de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$

Le Théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynômiales. Le Théorème de Stone-Weierstrass donne une généralisation de ce résultat au cas des fonctions continues $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ sur un espace métrique compact (X,d), vu comme une algèbre de Banach muni du produit ponctuel des fonctions. Ce résultat de portée générale donne une caractérisation des sous-algèbres $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ qui sont denses dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$. Nous nous concentrons ici juste sur la condition suffisante dans le cas de fonctions à valeurs réelles ($\mathbb{K}=\mathbb{C}$).

Théorème 2.1 **(Stone-Weierstrass, cas réel).** *Soient (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. On suppose que*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes ;*
- *$\mathcal{A}$ sépare les points, i.e., pour tout x, $y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$.

Nous commençons par montrer le résultat suivant d'approximation polynômiale de la fonction racine carrée.

Lemme 2.2. *Il existe une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.*

Démonstration. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} P_0(x) = 0, \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est polynômiale. Montrons par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. En effet, cette propriété est claire pour $n = 0$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors, $P_{n+1}(x) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x)) \\ &\leq P_n(x) + (\sqrt{x} - P_n(x)) \\ &\leq \sqrt{x}, \end{aligned}$$

car $\sqrt{x} - P_n(x) \geq 0$ et $\sqrt{x} + P_n(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$ pour tout $x \in [0,1]$. On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en majorée. Elle converge pontuellement vers une limite $\ell(x) \geq 0$ qui satisfait $\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2)$, i.e. $\ell(x) = \sqrt{x}$.

Montrons à présent que la convergence est uniforme. Pour ce faire, on remarque que $x \mapsto \sqrt{x} - P_n(x)$ est continue sur $[0,1]$. Soit $x_n \in [0,1]$ tel que

$$\max_{x\in[0,1]}(\sqrt{x} - P_n(x)) = \sqrt{x_n} - P_n(x_n).$$

Comme $[0,1]$ est compact, il existe une sous suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{x} \in [0,1]$ tels que $x_{\sigma(n)} \to \bar{x}$. En utilisant le fait que la suite de fonctions $(\sqrt{\cdot} - P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]}(\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_m(x_{\sigma(n)})\right) \\ &= \sqrt{\bar{x}} - P_m(\bar{x}). \end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $m \to \infty$, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} (\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) = 0.$$

Enfin, en utilisant de nouveau le fait que la suite de fonction $(\sqrt{\cdot} - P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient $\|\sqrt{\cdot} - P_n\|_\infty \to 0$. $\square$

On montre à présent que toute sous-algèbre (fermée) de fonctions continues est stable par passage au maximum et minimum.

Corollaire 2.3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 2.4, si f et $g \in \overline{\mathcal{A}}$, alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Démonstration. Par continuité de la somme et du produit, on en déduit que si $\mathcal{A}$ est une algèbre, il en est de même pour $\overline{\mathcal{A}}$. Si $\|f - g\|_\infty = 0$, alors $\max(f, g) = \min(f, g) = f = g \in \overline{\mathcal{A}}$. On suppose donc désormais que $\|f - g\|_\infty > 0$. On remarque tout d'abord que, du fait que

$$\max(f, g) := \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \text{ et } \min(f, g) := \frac{1}{2}(f + g - |f - g|),$$

il suffit de montrer que $|f - g| \in \overline{\mathcal{A}}$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômiales construite au Lemme 2.2. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre, il vient

$$P_n\left(\frac{(f - g)^2}{\|f - g\|_\infty^2}\right) \|f - g\|_\infty \in \overline{\mathcal{A}}$$

et d'après le Lemme 2.2,

$$P_n\left(\frac{(f - g)^2}{\|f - g\|_\infty^2}\right) \|f - g\|_\infty \to |f - g| \quad \text{uniformément sur } X.$$

Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermée, on en déduit que $|f - g| \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc que $\max(f, g)$ et $\min(f, g) \in \overline{\mathcal{A}}$. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le Théorème de Stone-Weierstrass.

Démonstration du Théorème 2.4. La preuve est divisée en quatre étapes.

Etape 1 : Pour tout x, $y \in X$ et tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, si $\alpha = \beta$, il suffit de considérer la fonction constante égale à $\alpha = \beta$. Par ailleurs, si $\alpha \neq \beta$, alors par hypothèse, il existe une fonction $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Dans ce cas, la fonction

$$f := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x)),$$

appartient à $\mathcal{A}$ et satisfait $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Etape 2 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f^x dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, d'après l'étape 1, pour tout $y \in X$, il existe une fonction $f_y^x \in \mathcal{A}$ telle que $f_y^x(x) = h(x)$ et $f_y^x(y) = h(y)$. Comme h et f_y^x sont continues, il existe $r_y^x > 0$ tel que pour tout $z \in B(y, r_y^x)$,

$$|f_y^x(z) - f_y^x(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(y) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Du fait que $f_y^x(y) = h(y)$, on en déduit que $f_y^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in B(y, r_y^x)$. Comme

$$X \subset \bigcup_{y \in X} B(y, r_y^x),$$

par compacité de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{B(y_i, r_{y_i}^x)\}_{1 \le i \le l}$. D'après le Corollaire 2.3, la fonction

$$f^x := \min_{1 \le i \le l} f_{y_i}^x$$

appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ et elle satisfait $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 3 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, soient $x \in X$ et f^x la fonction construite à l'étape 2. Les fonctions f^x et h étant continues, il existe $r'_x > 0$ tel que pour tout $z \in B(x, r'_x)$,

$$|f^x(z) - f^x(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(z) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $f^x(x) = h(x)$, on en déduit que $f^x(z) > h(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in B(x, r'_x)$. On utilise de nouveau la compacité de X pour extraire du recouvrement ouvert $\{B(x, r'_x)\}_{x \in X}$ de X un sous-recouvrement fini $\{B(x_j, r'_{x_j})\}_{1 \le j \le m}$. On introduit la fonction

$$f := \max_{1 \le j \le m} f^{x_j}$$

qui appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ en vertu du Corollaire 2.3, et qui satisfait $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 4 : D'après l'étape 3, pour tout $h \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$ il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f_n \to h$ uniformément sur X. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermé, on en déduit que $h \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$. $\square$

Théorème 2.4 (**Stone-Weierstrass, cas complexe**). *Soient (X, d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X; \mathbb{C})$. On suppose que*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes ;*
- *$\mathcal{A}$ sépare les points ;*
- *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complexe conjugué : si $f \in \mathcal{A}$, alors $\bar{f} \in \mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X; \mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} := \{\mathrm{Re}(f) : f \in \mathcal{A}\}$. Comme $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(-if)$, on en déduit que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathbb{R}} + i\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$. On montre que $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X; \mathbb{R})$ qui contient les constantes et qui sépare les points, de sorte que le théorème 2.1 assure que $\overline{\mathcal{A}_{\mathbb{R}}} = \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$. Par conséquent, $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X; \mathbb{C})$. $\square$

Nous donnons à présent quelques conséquences du théorème de Stone-Weierstrass.

Corollaire 2.5. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K; \mathbb{K})$, il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f sur K.*

Démonstration. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}^N$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ contient les fonctions constantes et sépare les points. En effet, si x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $x_0 \neq y_0$, alors la fonction affine $f : x \mapsto (x - x_0) \cdot (x_0 - y_0) + (x - y_0) \cdot (x_0 - y_0)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et satisfait $f(x_0) = \|x_0 - y_0\|^2 \neq -\|x_0 - y_0\|^2 = f(y_0)$ (car $\|x_0 - y_0\| \neq 0$). Par ailleurs, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}[X]$ est stable par passage au complexe conjugué. La conclusion suit du Théorème de Stone-Weierstrass. $\square$

Corollaire 2.6. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $\mathcal{C}(K;\mathbb{K})$ est séparable.*

Démonstration. En distinguant les parties réelles et imaginaires, on se ramène au cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. D'après le Corollaire 2.5, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}(K)$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{R}[X]$ est séparable pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathbf{P}_n$ (resp. $\mathbf{Q}_n$) l'ensemble des polynômes à coefficients réels (resp. rationnels) de degré inférieur ou égal à n. L'espace $\mathbf{P}_n$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $d=\dim(\mathbf{P}_n)$, on en déduit que $\mathbf{P}_n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^d$. Comme $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{Q}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^d$, il s'ensuit que $\mathbf{Q}_n$ est dénombrable et dense dans $\mathbf{P}_n$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$ (on utilise ici le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Enfin comme $\mathbb{R}[X]=\bigcup_n \mathbf{P}_n$ et $\mathbb{Q}[X]:=\bigcup_n \mathbf{Q}_n$, on en déduit que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}[X]$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. $\square$

En général l'espace $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$ n'est pas séparable comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 2.7. Soient $-\infty\le a<b\le+\infty$, on considère l'espace $\mathcal{C}_b(]a,b[)$. Nous allons montrer que $\mathcal{C}_b(]a,b[)$ n'est pas séparable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $a_n\to a$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $b_n\to b$. On pose $x_n=\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ et on considère une fonction $\varphi_n\in\mathcal{C}_c(]a,b[)$ telle que $0\le\varphi_n\le 1$, $\varphi_n(x_n)=1$ et $\mathrm{Supp}(\varphi_n)\subset\,]a_{n+1},a_n[$. En notant $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on pose pour tout $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\varphi_A:=\sum_{n\in A}\varphi_n.$$

Comme $\mathrm{Supp}(\varphi_n)\cap\mathrm{Supp}(\varphi_m)=\emptyset$ dès que $n\neq m$, la somme définissant φ_A est toujours localement finie même si A est infini. Par conséquent, φ_A est continue et $0\le\varphi_A\le 1$, ce qui montre que $\varphi_A\in\mathcal{C}_b(]a,b[)$.

Supposons que $\mathcal{C}_b(]a,b[)$ est séparable est considérons une famille $D=\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui est dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_b(]a,b[)$. Pour tout $A\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$, on considère le plus petit entier $k_A\in\mathbb{N}$ tel que

$$\|\varphi_A-f_{k_A}\|_\infty<\frac{1}{2}.$$

On définit ainsi une application $\Phi:\mathcal{P}(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ qui a toute partie A de $\mathbb{N}$ associe $\Phi(A):=k_A$. Notons que si A et $B\in\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont tels que $A\neq B$, alors (quitte à échanger les rôles de A et B) il existe $n_0\in A\setminus B$ et donc

$$\|\varphi_A-\varphi_B\|_\infty\ge|\varphi_A(x_{n_0})-\varphi_B(x_{n_0})|=\varphi_A(x_{n_0})=1.$$

Par conséquent, si $k_A=k_B$, on aurait par inégalité triangulaire

$$\|\varphi_A-\varphi_B\|_\infty\le\|\varphi_A-f_{k_A}\|_\infty+\|\varphi_B-f_{k_B}\|_\infty<1,$$

ce qui est absurde. On a donc montré que si $A\neq B$, alors $k_A\neq k_B$ ce qui établit l'injectivité de l'application Φ, et donc que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ ce qui est impossible car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable. [1]

1. Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il existerait une bijection $\Psi:\mathbb{N}\to\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $E=\{n\in\mathbb{N}:\ n\notin\Psi(n)\}$. Par surjectivité de Ψ, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\Psi(n_0)=E$. Si $n_0\in E$, alors par définition de E on aurait $n_0\notin\Psi(n_0)=E$ ce qui est impossible. Si $n_0\notin E$, alors toujours par définition de E, on aurait $n_0\in\Psi(n_0)=E$ ce qui est de nouveau impossible.

3 Critère de compacité

Nous établissons pour finir un critère de compacité dans l'espace $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$.

Théorème 3.1 (Ascoli-Arzela)**.** *Soient (X,d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ telle que*

i) (bornitude) pour tout $x\in X$, il existe $M(x)>0$ telle que $\sup_n |f_n(x)|\le M(x)$;

ii) (uniforme équi-continuité) pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que pour tout x, $y\in X$,

$$d(x,y)\le\delta \quad\Longrightarrow\quad \sup_{n\in\mathbb{N}}|f_n(x)-f_n(y)|\le\varepsilon.$$

Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f\in\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ telles que $f_{\sigma(n)}$ converge uniformément vers f sur X.

Réciproquement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ uniformément convergente, alors elle est bornée et uniformément équi-continue.

Démonstration. Pour simplifier, on ne traitera que le cas $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. L'espace métrique (X,d) étant compact, il est séparable. Il existe donc un sous-ensemble D dénombrable et dense dans X.

Etape 1 : Définition de la fonction f sur D. L'ensemble D étant dénombrable, on peut énumérer ses éléments en une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. D'après la propriété de bornitude i), pour tout $j\in\mathbb{N}$, la suite numérique $(f_n(a_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonal de sous-suite. Pour $j=0$, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(f_{\sigma_0(n)}(a_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $f(a_0)\in\mathbb{R}$ tels que $f_{\sigma_0(n)}(a_0)\to f(a_0)$. Pour un certain $k\in\mathbb{N}$, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0,\dots,\sigma_k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $f(a_0),\dots,f(a_k)\in\mathbb{R}$ tels que

$$f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_j(n)}(a_j)\to f(a_j) \quad \text{pour tout } 0\le j\le k.$$

La suite $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass permet de nouveau d'extraire une sous-suite notée $(f_{\sigma_0\circ\cdots\sigma_k\circ\sigma_{k+1}(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $f(a_{k+1})\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons

$$f_{\sigma(n)}:=f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_n(n)}$$

de sorte que $(f_{\sigma(n)}(a_k))_{n\ge k}$ est une sous-suite de $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_k))_{n\ge k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(a_k)=f(a_k) \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Etape 2 : Convergence simple. Montrons que pour tout $x\in X$, la suite $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soient ε et δ comme dans la définition de l'uniforme équi-continuité. Par densité de D dans X, il existe un $a\in D$ tel que $d(x,a)\le\delta$. Par conséquent, pour tout n et $m\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|f_{\sigma(n)}(x)-f_{\sigma(m)}(x)|\\
&\qquad\le |f_{\sigma(n)}(x)-f_{\sigma(n)}(a)|+|f_{\sigma(n)}(a)-f_{\sigma(m)}(a)|+|f_{\sigma(m)}(a)-f_{\sigma(m)}(x)|\\
&\qquad\qquad\le 2\varepsilon+|f_{\sigma(n)}(a)-f_{\sigma(m)}(a)|.
\end{aligned}$$

Comme $a\in D$, d'après l'étape 1, la suite numérique $(f_{\sigma(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc est de Cauchy. Il existe donc un $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n\ge N$, on a $|f_{\sigma(n)}(a)-f_{\sigma(m)}(a)|\le\varepsilon$, ce qui implique que

$$|f_{\sigma(n)}(x)-f_{\sigma(m)}(x)|\le 3\varepsilon.$$

Ceci montre effectivement que $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc il existe un $f(x)\in\mathbb{R}$ tel que $f_{\sigma(n)}(x)\to f(x)$.

Etape 3 : Uniforme continuité de f. D'après la propriété d'uniforme équi-continuité de f_n, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in X$ avec $d(x,y) \leq \delta$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(y)| \leq \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre bien l'uniforme continuité de f sur X.

Etape 4 : Convergence uniforme. Soient ε et δ donnés par la propriété ii). Par compacité de X, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_{N_\varepsilon} \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(a_i, \delta/2)$. Donc si $x \in X$, il existe $i \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$ tel que $x \in B(a_i, \delta/2)$ et

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| &\leq |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a_i)| + |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\ &\leq 2\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq N_\varepsilon} |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et l'uniforme continuité de f établie à l'étape 3. D'après l'étape 2, on en déduit que $|f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon$ dès lors que $n \geq n_i$ (qui ne dépend que de ε et de a_i). En notant $n_\varepsilon := \max\{n_1, \ldots, n_{N_\varepsilon}\}$, il vient : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \leq 3\varepsilon$ pour tout $n \geq n_\varepsilon$ et tout $x \in X$. On en déduit la convergence uniforme de $f_{\sigma(n)}$ vers f sur X.

Etape 5 : Réciproque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}(X)$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon/3$ pour tout $n \geq N$. Comme les fonctions f, $f_0, \ldots, f_N$ sont continues sur le compact X, elles sont uniformément continues d'après le Théorème de Heine. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $\delta_0, \ldots, \delta_N > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$\begin{cases} d(x,y) \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \\ d(x,y) \leq \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N. \end{cases}$$

On définit $\delta := \min(\eta, \delta_0, \ldots, \delta_N)$ de sorte que si x et $y \in X$, alors

$$d(x,y) \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |f_i(x) - f_i(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq N.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq N$ et pour tout $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient finalement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien uniformément équi-continue. $\square$

4 Quelques espaces de fonctions continues

Pour simplifier, dans ce qui suit, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$. Si $K \subset \Omega$ est un compact, on note

$$\mathcal{C}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \text{Supp}(f) \subset K\},$$

où $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega :\ f(x) \neq 0\}}$ désigne le support de f. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega)$, ce qui en fait donc un espace de Banach. On note également

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega \text{ compact}} \mathcal{C}_K(\Omega)$$

l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans Ω. Cet espace n'est pas fermé dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.1. En dimension $N = 1$, on pose $\Omega =]-1, 1[$ et, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, -1+\frac{1}{n}[\cup]1-\frac{1}{n}, 1[, \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ \frac{2n}{2-n}(x - 1 + \frac{1}{n}) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{n}[, \\ \frac{2n}{n-2}(x + 1 - \frac{1}{n}) & \text{si } x \in]-1+\frac{1}{n}, -\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Clairement $f_n \in \mathcal{C}_c(]-1, 1[)$ et $f_n \to f$ uniformément sur $[-1, 1]$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1[, \\ 2(x+1) & \text{si } x \in]-1, -\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Or $\mathrm{Supp}(f) = [-1, 1]$ ce qui montre que $f \notin \mathcal{C}_c(]-1, 1[)$.

On note $\mathcal{C}_0(\Omega)$ la fermeture de l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$. Nous allons caractériser l'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 sur le bord de Ω. Avant cela, il convient de rappeler les résultats suivant qui seront utile par la suite.

Lemme 4.2 (Urysohn). *Soient K un compact et V un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ tels que $K \subset V$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0, 1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.*

Démonstration. Soit

$$d := \inf_{x \in K, y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x - y\| = \inf_{x \in K} \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V),$$

où

$$\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V) := \inf_{y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x - y\|.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V)$ étant continue (en fait elle est même 1-Lipschitz) et K étant compact, il existe $\bar{x} \in K$ tel que $d = \mathrm{dist}(\bar{x}, \mathbb{R}^N \setminus V)$. Si $d = 0$, par définition de l'infimum, il existerait une suite $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus V$ telle que $\|\bar{x} - y_j\| \to 0$. L'ensemble $\mathbb{R}^N \setminus V$ étant fermé, on aurait alors $\bar{x} \in \mathbb{R}^N \setminus V$ ce qui est impossible puisque $\bar{x} \in K \subset V$. Par conséquent, $d > 0$ et l'ensemble

$$U := \{x \in \mathbb{R}^N :\ \mathrm{dist}(x, K) < d/2\},$$

est un ouvert borné satisfaisant $K \subset U \subset \overline{U} \subset V$. La fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U)}{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U) + \mathrm{dist}(x, K)}$$

convient. $\square$

Lemme 4.3 (Partition de l'unité). *Soient $V_1, \dots, V_n$ des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$. Alors, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe des fonctions $f_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que* $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ *et* $\sum_{i=1}^n f_i = 1$ *sur* K.

Démonstration. Pour tout $x \in K$, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ et une boule ouverte B_x centrée en x et telle que $\overline{B_x} \subset V_i$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{x \in K} B_x$, et comme K est compact, on peut extraire un sous recouvrement fini $K \subset \bigcup_{j=1}^p B_{x_j}$. On définit K_i comme l'union des boules fermées $\overline{B_{x_j}}$ qui sont contenues dans V_i. Alors K_i est un compact contenu dans V_i et $K \subset \bigcup_{i=1}^n K_i$. Soit U_i un ouvert borné tel que $K_i \subset U_i \subset \overline{U}_i \subset V_i$, on pose alors

$$f_i(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_i)}{\mathrm{dist}(x, K) + \sum_{j=1}^n \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U_j)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N,$$

qui satisfait bien les propriétés souhaitées. □

Proposition 4.4. *Une fonction f appartient à $\mathcal{C}_0(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ tels que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K$. D'après le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Posons $h = fg$ de sorte que $h \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Réciproquement, considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, par définition il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur Ω. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty < \varepsilon/2$ et définissons $K := \{x \in \Omega : \ |f_{n_\varepsilon}| \geq \varepsilon/2\}$. Alors K est un sous ensemble compact de Ω et pour tout $x \in \Omega \setminus K$, $|f| \leq |f - f_{n_\varepsilon}| + |f_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. □

Proposition 4.5. *Les espaces $\mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0(\Omega)$ sont séparables.*

Démonstration. Par définition de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est séparable. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille exhaustive de compacts, i.e. $K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = \Omega$[2]. Comme $\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$, il suffit de montrer que chacun des $\mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$ est séparable (pour la norme uniforme sur Ω).

Soit donc $K \subset \Omega$ un compact et ω un ouvert borné tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Comme $\overline{\omega}$ est compact, l'espace $\mathcal{C}(\overline{\omega})$ est séparable d'après le Corollaire 2.6. Il existe donc une famille $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dénombrable et dense dans $\mathcal{C}(\overline{\omega})$. Soit $(r_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0. Comme $\mathcal{C}_K(\omega)$ est un sous ensemble de $\mathcal{C}(\overline{\omega})$, il existe $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell) \neq \emptyset$. Pour de tels couples (k, ℓ), on choisit arbitrairement une fonction $g_{k,\ell} \in \mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell)$ de sorte que l'ensemble (dénombrable) $D := \{g_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\omega)$ (pour la norme uniforme sur $\overline{\omega}$). En effet, pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{\ell_0} < \varepsilon/2$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_\omega |f - f_{k_0}| < r_{\ell_0}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_{k_0}, r_{\ell_0}) \neq \emptyset$ de sorte que

$$\sup_\omega |f - g_{k_0,\ell_0}| \leq \sup_\omega |f - f_{k_0}| + \sup_\omega |f_{k_0} - g_{k_0,\ell_0}| \leq 2 r_{\ell_0} < \varepsilon.$$

Comme les fonctions $g_{k,\ell}$ sont à support dans K qui est un sous-ensemble compact de ω, on peut les étendre par 0 sur $\Omega \setminus \omega$ en des fonctions $\tilde{g}_{k,\ell}$ qui sont donc dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} = \{\tilde{g}_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\Omega)$ est donc dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$ (pour la norme uniforme sur Ω). □

2. On peut par exemple considérer $K_n = \left\{x \in \Omega : \ |x| \leq n \text{ et } \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\right\}$.

5 Mesures de Radon

L'objet de ce chapitre consiste à identifier le dual topologique de certains espaces de fonctions continues. La connaissance du dual d'un espace fonctionnel est d'une importance capitale en analyse fonctionnelle. Cela permet notamment d'introduire des topologies affaiblies (par rapport à la topologie forte de la norme) grâce auxquelles on augmente le nombre de compact.

5.1 Mesures de Radon positives

Toute mesure de Radon positive μ (une mesure Borélienne finie sur les compacts) définit une forme linéaire sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu$$

est bien définie puisque, en notant $K = \mathrm{Supp}(f)$, on a

$$\int_K |f|\, d\mu \leq \mu(K) \max_K |f| < \infty.$$

Par conséquent, l'application

$$L : f \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu$$

définit une forme linéaire positive $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, *i.e.*,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g) \quad \text{pour tout } f,\, g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \text{ et tout } \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

$$L(f) \geq 0 \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \text{ avec } f \geq 0. \tag{5.2}$$

Nous allons en fait montrer que toute forme linéaire positive sur l'espace $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ peut être représentée de façon unique par une telle mesure.

Théorème 5.1 (de représentation de Riesz). *Soit $L : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire positive (i.e. qui satisfait (5.1) et (5.2)). Il existe une unique mesure de Radon μ sur $\mathbb{R}^N$ telle que*

$$L(f) = \int_\Omega f\, d\mu \quad \textit{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N). \tag{5.3}$$

Pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^N$, on définit

$$\mu^*(V) := \sup\{L(f) :\ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ \mathrm{Supp}(f) \subset V\}. \tag{5.4}$$

Si $U \subset V$, alors $\mu^*(U) \leq \mu^*(V)$ de sorte que l'on peut étendre μ^* à n'importe quel ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ en posant

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu^*(V) :\ E \subset V \text{ ouvert}\}.$$

La propriété de croissance de μ^* reste vraie au sens où $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ pour tout $E \subset F$.

Lemme 5.2. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$\mu^*(K) = \inf\{L(g) :\ g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1]),\ g = 1 \textit{ sur } K\}.$$

En particulier, $\mu^*(K) < \infty$. De plus, pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$,

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) :\ K \subset U,\ K \textit{ compact}\}.$$

Démonstration. Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Pour tout $0 < t < 1$, l'ensemble $V_t := \{g > t\}$, qui est ouvert, satisfait $K \subset V_t$ et $f \leq t^{-1}g$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V_t$. Par conséquent, la croissance de L montre que

$$\mu^*(K) \leq \mu^*(V_t) = \sup\{L(f) : \; f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1]),\, \mathrm{Supp}(f) \subset V_t\} \leq t^{-1}L(g) < \infty.$$

En faisant tendre $t \to 1^-$, on obtient $\mu(K) \leq L(g)$ et donc, par passage à l'infimum en g,

$$\mu^*(K) \leq \inf\{L(g) : \; g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1]),\, g = 1 \text{ sur } K\}.$$

L'autre inégalité se montre en considérant un ouvert arbitraire $U \subset \Omega$ contenant K. Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ est une fonction telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $f = 1$ sur K, il vient par définition de μ^* sur les ouverts que

$$\inf\{L(g) : \; g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1]),\, g = 1 \text{ sur } K\} \leq L(f) \leq \mu^*(U),$$

puis, par passage à l'infimum par rapport à U, que

$$\inf\{L(g) : \; g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1]),\, g = 1 \text{ sur } K\} \leq \mu^*(K).$$

Pour établir la propriété de régularité intérieure sur les ouverts, considérons un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$. Alors, par définition de μ^* sur les ouverts, pour tout $\alpha < \mu^*(U)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telle que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $\alpha < L(f)$. Soit $K = \mathrm{Supp}(f)$ et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telle que $g = 1$ sur K. Comme $f \leq g$ sur $\mathbb{R}^N$, on a $L(f) \leq L(g)$, puis par passage à l'infimum par rapport à g, on obtient que $L(f) \leq \mu^*(K)$. Ceci montre l'existence d'un compact $K \subset U$ tel que $\alpha < \mu^*(K)$. □

A ce stade, nous avons défini une fonction d'ensembles $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$ qui est finie sur les compacts, qui satisfait, par définition, la propriété de régularité extérieure

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(V) : \; E \subset V,\; V \text{ ouvert}\} \quad \text{pour tout } E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \tag{5.5}$$

et la propriété de régularité intérieure

$$\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(K) : \; K \subset U,\; K \text{ compact}\} \quad \text{pour tout ouvert } U \subset \mathbb{R}^N. \tag{5.6}$$

Lemme 5.3. *La fonction d'ensemble μ^* est une mesure extérieure.*

Démonstration. On a évidemment que $\mu^*(\emptyset) = 0$ et μ^* est une fonction croissante d'ensemble, *i.e.* si $E \subset F$, alors $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$. Il s'agit à présent de montrer que μ^* est dénombrablement sous-additive, *i.e.*, pour toute suite $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Montrons d'abord que si V_1 et V_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^N$,

$$\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2). \tag{5.7}$$

Soit $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(g) \subset V_1 \cup V_2$. D'après le Lemme 4.3, il existe des fonctions f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(f_1) \subset V_1$, $\mathrm{Supp}(f_2) \subset V_2$ et $f_1 + f_2 = 1$ sur $\mathrm{Supp}(g)$. Par conséquent, pour $i = 1, 2$, $f_i g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$, $\mathrm{Supp}(f_i) \subset V_i$ et $g = f_1 g + f_2 g$ de sorte que, par linéarité de L et la définition de μ^*,

$$L(g) = L(f_1 g) + L(f_2 g) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2).$$

Par passage au supremum en g, on obtient $\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$.

Si $\mu(E_n) = \infty$ pour un certain $n \geq 1$, alors le résultat suit. Sinon, si $\mu(E_n) < \infty$ pour tout n, alors quelque soit $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert V_n tel que $E_n \subset V_n$ et $\mu^*(V_n) < \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$. On définit $V := \bigcup_n V_n$ et on considère $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{n=1}^p V_n$. En itérant (5.7), il vient

$$L(f) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^p V_n\right) \leq \sum_{n=1}^p \mu^*(V_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Comme cette inégalité est satisfaite quelque soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset V$, et $\bigcup_n E_n \subset V$, on en déduit que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) \leq \mu^*(V) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon,$$

ce qui montre la dénombrable sous-additivité, le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire. □

D'après le Théorème de Carathéodory (voir le Théorème 6.3), la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables, *i.e.*, l'ensemble des parties $A \subset \mathbb{R}^N$ qui satisfont

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{pour tout } E \subset \mathbb{R}^N,$$

est une tribu sur $\mathbb{R}^N$, et la restriction $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}}$ de μ^* à cette tribu est une mesure. De plus, pour tout A, $B \subset \mathbb{R}^N$ avec $\mathrm{dist}(A,B) > 0$, on a

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

En effet, par sous-additivité de μ^*, il suffit de montrer que $\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Soit $W \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tel que $A \cup B \subset W$. Comme $\mathrm{dist}(A,B) > 0$, il existe des ouverts U et V tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cup V \subset W$ et $U \cap V = \emptyset$. Soient f et $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ des fonctions telles que $\mathrm{Supp}(f) \subset U$ et $\mathrm{Supp}(g) \subset V$. Comme $\mathrm{Supp}(f) \cap \mathrm{Supp}(g) = \emptyset$, la fonction $f + g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ satisfait $\mathrm{Supp}(f+g) \subset U \cup V$, et par définition de μ^* sur les ouverts, on a

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U \cup V) \geq L(f+g) = L(f) + L(g).$$

Par passage au supremum par rapport à f et g, on en déduit que

$$\mu^*(W) \geq \mu^*(U) + \mu^*(V) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Par passage à l'infimum parmi tous les ouverts $W \supset A \cup B$, on obtient le résultat voulu. Une application immédiate de la Proposition 6.4 montre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{A}$. Par conséquent, la restriction de μ à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est une mesure Borélienne. Comme par le Lemme 5.2, on a $\mu(K) = \mu^*(K) < \infty$ (puisque les compacts sont Boréliens), on en déduit que μ est une mesure de Radon.

Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve du théorème de représentation de Riesz.

Démonstration du théorème 5.1. Il reste à établir la propriété de représentation (5.3). Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, par linéarité de L, il suffit d'établir que

$$L(f) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu. \tag{5.8}$$

Soit $K := \mathrm{Supp}(f)$ et $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ qui contient $f(K)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ tels que $y_0 < a = y_1 < \cdots < y_n = b$ et $\max_{1 \leq i \leq n}(y_i - y_{i-1}) < \varepsilon$. On définit, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$B_i := f^{-1}(]y_{i-1}, y_i]) \cap K.$$

Comme f est continue, les ensembles B_i constituent une partition Borélienne de K. D'après la propriété de régularité extérieure (5.5), il existe un ouvert V_i contenant B_i tel que $\mu(V_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$. Par ailleurs, l'ouvert $W_i = f^{-1}(]y_i - \varepsilon, y_i + \varepsilon[)$ contenant B_i, on obtient en posant $U_i = V_i \cap W_i$ un ouvert contenant B_i et satisfaisant

$$\mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}, \quad \sup_{U_i} f \leq y_i + \varepsilon \text{ pour tout } i = 1, \dots, n.$$

Comme $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ est un recouvrement ouvert du compact K, on peut trouver une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, *i.e.* des fonctions $h_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telles que $\mathrm{Supp}(h_i) \subset U_i$ et $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K. Par conséquent, $f = \sum_{i=1}^n h_i f$ et $h_i f \leq (y_i + \varepsilon) h_i$ dans $\mathbb{R}^N$, puis par linéarité et croissance de L, il vient

$$L(f) = \sum_{i=1}^n L(h_i f) \leq \sum_{i=1}^n (y_i + \varepsilon) L(h_i) = \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) L(h_i) - |a| \sum_{i=1}^n L(h_i).$$

Comme $\sum_{i=1}^n h_i \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ est telle que $\sum_{i=1}^n h_i = 1$ sur K, le Lemme 5.2 montre que

$$\sum_{i=1}^n L(h_i) = L\left(\sum_{i=1}^n h_i\right) \geq \mu(K).$$

Par ailleurs, la définition de μ^* sur les ouverts (et donc de μ) montre $L(h_i) \leq \mu(U_i) \leq \mu(B_i) + \varepsilon/n$, de sorte que

$$L(f) \leq \sum_{i=1}^n (|a| + y_i + \varepsilon) \left(\mu(B_i) + \frac{\varepsilon}{n}\right) - |a|\mu(K).$$

Comme $\{B_1, \dots, B_n\}$ est une partition de K, on en déduit que

$$\begin{aligned}
L(f) &\leq \sum_{i=1}^n y_i \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + \mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n y_{i-1} \mu(B_i) + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_{B_i} f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu + \varepsilon(|a| + |b| + \varepsilon + 2\mu(K)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve (5.8), le paramètre $\varepsilon > 0$ étant arbitraire.

Etablissons enfin l'unicité. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures de Radon satisfaisant la conclusion du théorème de représentation de Riesz. Par les propriétés de régularité (5.5) et (5.6), il suffit d'établir que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$. Soit $\varepsilon > 0$ et $K \subset \Omega$ un compact. D'après (5.5), il existe un ouvert V contenant K tel que $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$. Par le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(f) \subset V$ d'où $\mathbf{1}_K \leq f \leq \mathbf{1}_V$. Il vient alors

$$\mu_1(K) = \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_K \, d\mu_1 \leq \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu_1 = L(f) = \int_{\mathbb{R}^N} f \, d\mu_2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{1}_V \, d\mu_2 = \mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Donc $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ et en échangeant les rôles de μ_1 et μ_2 on en déduit que cette inégalité et une égalité. □

5.2 Mesures de Radon bornées

Définition 5.4. L'espace des mesures de Radon bornées sur Ω, noté $\mathcal{M}(\Omega)$, est le dual topologique de l'espace de Banach $\mathcal{C}_0(\Omega)$.

Grâce au théorème de représentation de Riesz (Théorème 5.1), on peut caractériser l'espace de mesures de Radon bornées.

Théorème 5.5. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe deux mesures de Borel finies μ^+ et μ^- sur Ω telles que si μ désigne la mesure signée $\mu := \mu^+ - \mu^-$, alors*

$$L(f) = \int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f\, d\mu^+ - \int_\Omega f\, d\mu^- \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

De plus, en notant $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ la mesure (positive) variation de μ, on a

$$\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} = |\mu|(\Omega).$$

Commençons par établir que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ peut s'écrire comme la différence de deux formes linéaires positives.

Lemme 5.6. *Pour tout $L \in \mathcal{M}(\Omega)$, il existe des formes linéaiires continues positives L^+ et L^- sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Démonstration. Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in \mathcal{C}_0(\Omega) :\ f \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) :\ g \in \mathcal{C}^+,\, g \leq f\}.$$

Etape 1 : *L^+ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$, comme $0 \in \mathcal{C}^+$, on a $L^+(f) \geq 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \leq g \leq f$. Par continuité de L, on a $L(g) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|g\|_\infty \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty$, et par passage au sup en g, on obtient que $0 \leq L^+(f) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)}\|f\|_\infty < \infty$.

Etape 2 : *L^+ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \leq g \leq f_1 + f_2$. On décompose g comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \leq f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \leq f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au supremum en g,

$$L^+(f_1 + f_2) \leq L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité, on se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de L^+, il existe g_1 et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \leq g_i \leq f_i$ et $L^+(f_i) \leq L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \leq g_1 + g_2 \leq f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \geq L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \geq L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résultat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Etape 3 : *Définition et additivitéde L^+ sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$.* Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, on décompose f comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f^-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si f et $g \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors $(f+g)^+ - (f+g)^- = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f+g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f+g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f+g) = L^+(f) + L^+(g)$.

Etape 4 : *L^+ est continue sur* $\mathcal{C}_0(\Omega)$. Soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$. Comme L^+ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \|f_1 - f_2\|_\infty.$$

Etape 5 : *L^+ est une forme linéaire sur* $\mathcal{C}_0(\Omega)$. L'additivité de L^+ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $(-f)^\pm = f^\mp$, alors $L^+(-f) = -L^+(f)$ et l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $pL^+(f) = L^+(pf) = L^+(qrf) = qL^+(rf)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de L^+ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ implique que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etape 6 : *L^- est une forme linéaire continue positive sur* $\mathcal{C}_0(\Omega)$. On défiinit $L^- := L^+ - L$. Alors L^- est clairement une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. De plus, par définition de L^+, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que L^- est également positive. □

Démonstration du Théorème 5.5. D'après le Lemme 5.6, on peut décomposer $L \in \mathcal{M}(\Omega)$ comme $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues positives sur $\mathcal{C}_0(\Omega)$. D'après le Théorème de Représentation de Riesz, il existe deux mesures de Radon positives $\mu^\pm$ telles que

$$L^\pm(f) = \int_\Omega f \, d\mu^\pm \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

De plus, par définition de $\mu^\pm$ sur les ouverts (voir (5.4)) et par définition de la norme dans $\mathcal{M}(\Omega)$, on a

$$\mu^\pm(\Omega) = \sup_{f \in \mathcal{C}_c(\Omega;[0,1])} L^\pm(f) \leq \|L^\pm\|_{\mathcal{M}(\Omega)} < +\infty,$$

ce qui montre que $\mu^\pm$ sont des mesures finies. Par conséquent,

$$L(f) = \int_\Omega f \, d\mu^+ - \int_\Omega f \, d\mu^- \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_c(\Omega).$$

Cette inégalité peut être étendue à toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ par densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_0(\Omega)$, par continuité de L et par convergence dominée.

Si $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ est telle que $\|f\|_\infty \leq 1$, alors on

$$|L(f)| \leq \int_\Omega |f| \, d|\mu| \leq |\mu|(\Omega),$$

puis par passage au supremum par rapport à f, $\|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} \leq |\mu|(\Omega)$. Réciproquement, par définition de $\mu^\pm$ sur les ouverts, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonction $f^\pm \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0,1])$ telles que $\mu^\pm(\Omega) \leq L^\pm(f^\pm) + \varepsilon$, d'où

$$|\mu|(\Omega) = \mu^+(\Omega) + \mu^-(\Omega) \leq L^+(f^+) + L^-(f^-) + 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, par définition de L^+, il existe $g^+ \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $0 \leq g^+ \leq f^+$ et $L^+(f^+) \leq L(g^+) + \varepsilon$. Par ailleurs, comme

$$L^-(f^-) = L^+(f^-) - L(f^-) = \sup_{h \in \mathcal{C}_0(\Omega),\, 0 \leq h \leq f^-} L(h) - L(f^-) = \sup_{g \in \mathcal{C}_0(\Omega),\, 0 \leq g \leq f^-} \{-L(g)\},$$

il existe $g^- \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ telle que $0 \leq g^- \leq f^-$ et $L^-(f^-) \leq -L(g^-) + \varepsilon$. Par conséquent,

$$|\mu|(\Omega) \leq L(g^+ - g^-) + 4\varepsilon$$

et comme $-1 \le -f^- \le -g^- \le g^+ - g^- \le g^+ \le f^+ \le 1$, on en déduit que

$$|\mu|(\Omega) \le \|L\|_{\mathcal{M}(\Omega)} + 4\varepsilon$$

et la conclusion vient du fait que $\varepsilon > 0$ est arbitraire. □

6 Appendice : mesures extérieures

Pour pouvoir “mesurer” toutes les parties d'un ensemble, il convient d'affaiblir la notion de mesure en celle de mesure extérieure. Dans cette section, on désigne par X un ensemble et par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 6.1. Une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ est appelée *mesure extérieure* si elle vérifie
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(ii) Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$;
(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Si une mesure sur la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$ est toujours une mesure extérieure, la réciproque n'est pas forcément vraie. Toutefois il est possible de restreindre μ^* à une tribu sur laquelle μ^* est une mesure.

Définition 6.2. Un ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ est dit *μ^*-mesurable* si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par sous-additivité d'une mesure extérieure, pour vérifier qu'un ensemble A est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$.

Théorème 6.3. (de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Alors la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables est une tribu et la restriction de μ^* à $\mathcal{A}$ est une mesure.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est une tribu. Clairement, on a $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire puisque $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$ et $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie (ce qui fera de $\mathcal{A}$ une algèbre). Si A_1 et A_2 sont μ^*-mesurables, par sous-additivité de μ^*, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1)\\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2)\\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2 \setminus A_1) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2))\\
&\ge \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, puis que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, posons $A = \bigcup_n A_n$ et montrons que $A \in \mathcal{A}$. On définit $A'_0 = A_0$ puis $A'_n = A_n \backslash \bigcup_{m<n} A_m$ pour tout $n \geq 1$; $\mathcal{A}$ étant une algèbre, on obtient ainsi une suite $\{A'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles dans $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion $\bigcup_n A'_n = \bigcup_n A_n = A$.

Posons $B_n = \bigcup_{k\leq n} A'_k \in \mathcal{A}$, on obtient alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \setminus B_n) \\ &= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A'_{n+1}), \end{aligned}$$

car les A'_n sont deux à deux disjoints. Ceci établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_n). \tag{6.1}$$

Les ensembles B_n étant μ^*-mesurables, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n)$$

ce qui implique, par (6.1) et croissance de μ^* ($B_n \subset A$), que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ et sous-additivité de la mesure extérieure μ^*, il vient

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \tag{6.2}$$

ce qui montre que $A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $A'_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $E = A$ dans (6.2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que μ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$. □

Si à présent (X, d) est un espace métrique (que l'on peut donc munir de la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(X)$, engendrée par les ouverts), le résultat suivant donne un critère assurant la μ^*-mesurabilité des ensembles Boréliens de X.

Proposition 6.4. *Si, pour tout A, $B \subset X$ avec $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, on a*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \tag{6.3}$$

alors $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Puisque la tribu Borélienne $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par les fermés, il suffit de montrer que tous les fermés de X sont μ^*-mesurables. De plus, par sous-additivité de μ^*, il suffit d'établir que si $C \subset X$ est fermé,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \text{pour tout } E \subset X \text{ tel que } \mu^*(E) < \infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(E \setminus C_n, E \cap C) \geq 1/n > 0$, l'hypothèse montre que

$$\mu^*(E \setminus C_n) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \setminus C_n) \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E). \tag{6.4}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in E : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j - i| \geq 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

et

$$\sum_{k=0}^{m} \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^* \left(\bigcup_{i=0}^{m} R_{2k+1} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(E) < \infty$. Comme C est fermé, on a $E \setminus C = (E \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de μ^*,

$$\mu^*(E \setminus C_n) \leq \mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$, $\mu^*(E \setminus C_n) \to \mu^*(E \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (6.4), il vient

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$$

ce qui montre effectivement la μ^*-mesurabilité de C. □