Mesure de Lebesgue

Jean-François Babadjian
Université Paris-Saclay, Laboratoire de mathématiques d'Orsay
jean-francois.babadjian@universite-paris-saclay.fr

1 Quelques éléments de théorie de la mesure

On rappelle les définitions suivantes. Etant donné un ensemble X, on désigne par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.1. Une *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur X est une sous famille $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant :
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;
(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
(iii) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.
Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

Définition 1.2. Une *mesure* est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ qui satisfait
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

On rappelle les propriétés suivantes des mesures, qui seront utilisées systématiquement par la suite.

Proposition 1.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{A}$. Alors*

1.

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n);$$

2. si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n);$$

3. si $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\mu(A_0) < \infty$,

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Si X est un espace topologique, on désigne par $\mathcal{B}(X)$ la *tribu Borélienne* sur X, *i.e.* la plus petite tribu contenant les ouverts de X. Une mesure définie sur la tribu $\mathcal{B}(X)$ s'appelle une *mesure Borélienne*. Une mesure Borélienne finie sur les compacts s'appelle une *mesure de Radon*.

Les mesures de Radon jouissent de propriétés de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par la mesure d'ouverts ou de fermés.

Proposition 1.4. *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$. Alors, pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}^N$*

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \sup\{\mu(K) : \; K \subset A, \, K \text{ compact}\}, \\ &= \inf\{\mu(U) : \; A \subset U, \, U \text{ ouvert}\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On suppose tout d'abord que $\mu(A) < \infty$ et on pose $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ce qui définit une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$.

On considère la famille

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \;\; := \;\; \Big\{ & B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe} \\ & \text{un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \Big\}. \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}$ contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fermé $C_n \subset B_n$ tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

L'ensemble $C := \bigcap_n C_n$ est fermé et

$$\nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus C\right) = \nu\left(\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \leq \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon,$$

ce qui montre que $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, comme ν est une mesure finie, on a

$$\begin{aligned} \lim_{m \to \infty} \nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{m} C_n\right)\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right)\right) \\ &\leq \nu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (B_n \setminus C_n)\right) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Pour m asssez grand, on a donc en posant $C' := \bigcup_{n=0}^{m} C_n$

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n\right) \setminus C'\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre, C' étant fermé, que $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Montrons que U est l'union dénombrables de fermés. Pour ce faire, on considère la famille $\mathcal{F}$ des boules fermées $\overline{B}(x, r)$ dans $\mathbb{R}^N$ centrées en $x \in \mathbb{Q}^N$ et de rayon $r \in \mathbb{Q}^+$. La famille $\mathcal{F}$ est dénombrable et U étant ouvert, on a

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}, \; B \subset U} B \subset U.$$

Pour montrer l'autre inclusion, on utilise la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Soit donc $x \in U$ et $R > 0$ tel que $\overline{B}(x, R) \subset U$. Il existe alors $\bar{x} \in \mathbb{Q}^N \cap \overline{B}(x, R/4)$ et $\bar{r} \in \mathbb{Q}^+$ tels que $R/4 < \bar{r} < R/2$ de sorte que $x \in \overline{B}(\bar{x}, \bar{r}) \subset \overline{B}(x, R) \subset U$, ce qui montre que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F},\ B \subset U} B \supset U$$

et donc l'égalité. On en déduit que $\mathcal{F}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} :\ {}^c B \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable. Par conséquent, $\mathcal{G}$ est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans $\mathcal{G}$, on en déduit que la tribu $\mathcal{G}$ contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout $B \subset \mathbb{R}^N$ Borélien et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C \subset B$ tel que $\nu(B \backslash C) < \varepsilon$. En particulier, pour $B = A$, on obtient un fermé $C \subset A$ tel que $\mu(A \backslash C) < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := C \cap \overline{B}(0, n)$ qui est un compact inclu dans A. Comme $\mu(C) \le \mu(A) < \infty$), on a $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$. Pour n assez grand, on obtient donc un compact $K_n \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$.

Si $\mu(A) = \infty$, on décompose $A = \bigcup_j (A \cap C_j)$ où $C_j = \{x \in \mathbb{R}^N :\ j \le |x| < j+1\}$. Comme μ est une mesure de Radon, $\mu(A \cap C_j) < \infty$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par ce qui a été montré précédemment, il existe un compact $K_j \subset A \cap C_j$ tel que $\mu(K_j) \ge \mu(A \cap C_j) - 2^{-j}$. Par convergence monotone,

$$\lim_{n \to \infty} \mu \left(\bigcup_{j=0}^{n} K_j \right) = \mu \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j \right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(K_j) \ge \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\mu(A \cap C_j) - \frac{1}{2^j} \right) = \infty = \mu(A).$$

Comme $\bigcup_{j=0}^{n} K_j$ est compact, on obtient ainsi l'approximation intérieure par des compacts.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. Si $\mu(A) = \infty$, il suffit de considérer l'ouvert $U = \mathbb{R}^N$. On peut donc supposer que $\mu(A) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $B(0, n) \setminus A$ étant un Borélien de mesure finie (car μ est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé $C_n \subset B(0, n) \setminus A$ tel que

$$\mu((B(0, n) \setminus A) \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Posons $U_n = B(0, n) \setminus C_n$ qui est un ouvert avec $B(0, n) \cap A \subset U_n$ et tel que

$$\mu(U_n \setminus (A \cap B(0, n)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Si on pose $U := \bigcup_n U_n$ qui est un ouvert, on obtient que $A \subset U$ et

$$\mu(U) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(U_n) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\mu(A \cap B(0, n)) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right) \le \mu(A) + \varepsilon,$$

ce qui conclut la propriété de régularité extérieure. $\square$

Une conséquence presque immédiate du résultat précédent est la densité des fonctions continues à support compact dans les espaces de Lebesgue munis d'une mesure de Radon.

Corollaire 1.5. *Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{R}^N$. Pour tout fonction $f \in L^1_\mu(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Démonstration. Soit $f \in L^1_\mu(\mathbb{R}^N)$. On écrit $f = f^+ - f^-$ où $f^\pm$ sont deux fonctions Boréliennes positives et intégrales. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g^\pm \in L^1_\mu(\mathbb{R}^N)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^N} |f^\pm - g^\pm| \, d\mu \leq \varepsilon$. On est donc ramené à montrer que toute fonction étagée positive et inégrable peut être approchée par une fonction de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, le Théorème de la convergence dominée assure que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |g^\pm - \mathbf{1}_{B(0,n)} g^\pm| \, d\mu \to 0$$

quand $n \to \infty$. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que g est à support compact.

Par linéarité, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble Borélien A tel que $\overline{A}$ est compact. En particulier, comme A est borné, on a $\mu(A) < \infty$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un ouvert U et d'un compact K tels que $K \subset A \subset U$ et $\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Le Lemme d'Urysohn donne alors l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N; [0,1])$ telle que $h = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(h) \subset U$. D'où, comme $\mathbf{1}_K \leq h \leq \mathbf{1}_U$,

$$\int_\Omega |h - \mathbf{1}_A| \, d\mu \leq \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

2 Pourquoi ne peut-on pas mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$?

Une mesure priviliégiée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$ est la mesure de Lebesgue qui correspond intuitivement à la notion de volume. Nous démontrerons au chapitre 2 son existence de diverses manières. Avant cela, il convient de noter que cette mesure, temporairement notée λ en dimension $N = 1$, doit satisfaire certaines propriétés comme l'invariance par translation ainsi que la formule usuelle pour la longueur d'un intervalle $\lambda([a, b]) = b - a$.

Nous allons montrer qu'une telle mesure, si elle existe, ne peut pas être définie sur toutes les partie de $\mathbb{R}$. L'exemple suivant, dû à Vitali, montre en fait l'existence d'un ensemble non Lebesgue mesurable.

Pour ce faire, on introduit la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ par

$$x \sim y \quad \text{si et seulement si} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

On note $[x]$ la classe d'équivalence de x qui est un sous-ensemble de $[0, 1]$. L'ensemble des classes d'équivalences définit une partition de $[0, 1]$. A l'aide de l'axiome de choix, on construit un sous-ensemble V de $[0, 1]$, appelé *ensemble de Vitali*, qui ne contient qu'un et un seul élément de chaque classe d'équivalence.

Soit $D := \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ qui est dénombrable. Pour $q \in D$, on pose $V_q = q + V$ de sorte que $V_q \subset [-1, 2]$. Pour tout $y \in [0, 1]$, par définition de V, il existe un unique $x \in V$ tel que $y \in [x]$. Par conséquent, il existe un rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $y - x = q$. De plus comme x et $y \in [0, 1]$, on a que $q \in [-1, 1]$ ce qui montre que $q \in D$ et $y = q + x \in V_q$. On en déduit alors que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q \in D} V_q \subset [-1, 2].$$

Supposons maintenant que V est Lebesgue mesurable de sorte que chaque V_q l'est aussi pour tout $q \in D$. Par passage à la mesure de Lebesgue λ dans les inclusions précédentes, il vient

$$1 \leq \lambda \left(\bigcup_{q \in D} V_q \right) \leq 3. \tag{2.1}$$

Notons que si q et $q' \in D$ sont tels que $q \neq q'$, alors $V_q \cap V_{q'} = \emptyset$. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait $y \in V_q \cap V_{q'}$ et donc des éléments x et $x' \in E$ tels que

$$y = q + x = q' + x'.$$

On en déduirait alors que $x - x' = q' - q \in \mathbb{Q}$ ce qui impliquerait que $x = x'$ puisque V contient un unique élément de chaque classe d'équivalence. Par suite, on obtiendrait que $q = q'$ ce qui est absurde. Les ensembles V_q étant donc deux à deux disjoints, il vient que

$$\lambda\left(\bigcup_{q\in D} V_q\right) = \sum_{q\in D} \lambda(V_q) = \sum_{q\in D} \lambda(q+V) = \sum_{q\in D} \lambda(V),$$

où l'on a utilisé l'invariance par translation de λ. Si $\lambda(V) > 0$, on obtient alors que

$$\lambda\left(\bigcup_{q\in D} V_q\right) = \infty,$$

ce qui contredit la deuxième inégalité de (2.1). Si, en revanche, $\lambda(V) = 0$ on obtient alors que

$$\lambda\left(\bigcup_{q\in D} V_q\right) = 0,$$

ce qui contredit la première inégalité de (2.1). Dans tous les cas, on obtient une contradiction, ce implique que l'ensemble V ne peut être Lebesgue mesurable.

3 Mesures extérieures et construction de mesures

Pour pouvoir "mesurer" toutes les parties d'un ensemble, il convient d'affaiblir la notion de mesure en celle de mesure extérieure. Dans cette section, on désigne par X un ensemble et par $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 3.1. Une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ est appelée *mesure extérieure* si elle vérifie
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
(ii) Pour tout A, $B \in \mathcal{P}(X)$, on a $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$;
(iii) Pour toute suite $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Si une mesure sur la tribu triviale $\mathcal{P}(X)$ est toujours une mesure extérieure, la réciproque n'est pas forcément vraie. Toutefois il est possible de restreindre μ^* à une tribu sur laquelle μ^* est une mesure.

Définition 3.2. Un ensemble $A \in \mathcal{P}(X)$ est dit μ^**-mesurable* si pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par sous-additivité d'une mesure extérieure, pour vérifier qu'un ensemble A est μ^*-mesurable, il suffit de montrer que

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A)$$

pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$ tel que $\mu^*(E) < \infty$.

Théorème 3.3. (de Carathéodory) *Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X. Alors la classe $\mathcal{A}$ des ensembles μ^*-mesurables est une tribu et la restriction de μ^* à $\mathcal{A}$ est une mesure.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est une tribu. Clairement, on a $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\mu^*(\emptyset) = 0$. Par ailleurs $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire puisque $E \cap (X \setminus A) = E \setminus A$ et $E \setminus (X \setminus A) = E \cap A$. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.

Vérifions d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par réunion et intersection finie (ce qui fera de $\mathcal{A}$ une algèbre). Si A_1 et A_2 sont μ^*-mesurables, par sous-additivité de μ^*, on a pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$,

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \setminus A_1) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*((E \setminus A_1) \cap A_2) + \mu^*((E \setminus A_1) \setminus A_2) \\
&= \mu^*(E \cap A_1) + \mu^*(E \cap A_2 \setminus A_1) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)) \\
&\geq \mu^*(E \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(E \setminus (A_1 \cup A_2)),
\end{aligned}$$

ce qui montre que $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$. Par passage au complémentaire, on en déduit que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$, puis que $A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$.

Soit maintenant $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, posons $A = \bigcup_n A_n$ et montrons que $A \in \mathcal{A}$. On définit $A'_0 = A_0$ puis $A'_n = A_n \setminus \bigcup_{m<n} A_m$ pour tout $n \geq 1$; $\mathcal{A}$ étant une algèbre, on obtient ainsi une suite $\{A'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles dans $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux et de réunion $\bigcup_n A'_n = \bigcup_n A_n = A$.

Posons $B_n = \bigcup_{k \leq n} A'_k \in \mathcal{A}$, on obtient alors pour tout $E \in \mathcal{P}(X)$

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap B_{n+1}) &= \mu^*(E \cap B_{n+1} \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_{n+1} \setminus B_n) \\
&= \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap A'_{n+1}),
\end{aligned}$$

car les A'_n sont deux à deux disjoints. Ceci établit par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu^*(E \cap B_n) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_n). \tag{3.1}$$

Les ensembles B_n étant μ^*-mesurables, on a

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \setminus B_n)$$

ce qui implique, par (3.1) et croissance de μ^* ($B_n \subset A$), que

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ et sous-additivité de la mesure extérieure μ^*, il vient

$$\mu^*(E) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(E \cap A'_k) + \mu^*(E \setminus A) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A), \tag{3.2}$$

ce qui montre que $A \in \mathcal{A}$ et donc que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Si les A_n sont disjoints deux à deux, alors $A'_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En prenant $E = A$ dans (3.2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mu^*(A_k) = \mu^*(A),$$

ce qui montre que μ^* est une mesure sur $\mathcal{A}$. $\square$

Si à présent (X, d) est un espace métrique (que l'on peut donc munir de la tribu Borélienne, $\mathcal{B}(X)$, engendrée par les ouverts), le résultat suivant donne un critère assurant la μ^*-mesurabilité des ensembles Boréliens de X.

Proposition 3.4. *Si, pour tout A, $B \subset X$ avec $\operatorname{dist}(A, B) > 0$, on a*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B), \tag{3.3}$$

alors $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$.

Démonstration. Puisque la tribu Borélienne $\mathcal{B}(X)$ est engendrée par les fermés, il suffit de montrer que tous les fermés de X sont μ^*-mesurables. De plus, par sous-additivité de μ^*, il suffit d'établir que si $C \subset X$ est fermé,

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \text{pour tout } E \subset X \text{ tel que } \mu^*(E) < \infty.$$

On pose pour tout $n \geq 1$,

$$C_n = \left\{ x \in X : \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(E \setminus C_n, E \cap C) \geq 1/n > 0$, l'hypothèse montre que

$$\mu^*(E \setminus C_n) + \mu^*(E \cap C) = \mu^*((E \setminus C_n) \cup (E \cap C)) \leq \mu^*(E). \tag{3.4}$$

Posons

$$R_k := \left\{ x \in E : \frac{1}{k+1} < \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme $\operatorname{dist}(R_i, R_j) > 0$ dès que $|j - i| \geq 2$, on a

$$\sum_{k=1}^{m} \mu^*(R_{2k}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{m} R_{2k} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

et

$$\sum_{k=0}^{m} \mu^*(R_{2k+1}) = \mu^*\left(\bigcup_{i=0}^{m} R_{2k+1} \right) \leq \mu^*(E) < \infty,$$

pour tout $m \geq 1$, d'où $\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(R_k) \leq 2\mu^*(E) < \infty$. Comme C est fermé, on a $E \setminus C = (E \setminus C_n) \cup \bigcup_{k \geq n} R_k$, et donc, par sous-additivité de μ^*,

$$\mu^*(E \setminus C_n) \leq \mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_n) + \sum_{k \geq n} \mu^*(R_k),$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$, $\mu^*(E \setminus C_n) \to \mu^*(E \setminus C)$. Enfin, en faisant tendre $n \to \infty$ dans (3.4), il vient

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C)$$

ce qui montre effectivement la μ^*-mesurabilité de C. $\square$

4 Théorème de la classe monotone : unicité de mesures

Définition 4.1. On appelle *classe monotone* sur X toute famille $\mathscr{C}$ de parties de X vérifiant :

(i) $X \in \mathscr{C}$;

(ii) Si A, $B \in \mathscr{C}$ et $A \subset B$, alors $B \setminus A \in \mathscr{C}$;

(iii) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathcal{P}(X)$ (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Une tribu est toujours une classe monotone, mais la réciproque n'est pas forcément vraie.

Théorème 4.2. (de la classe monotone) *Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de X stable par intersection finie et contenant X. Alors la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{C}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ et $\mathscr{T}$ la tribu engendrée par $\mathcal{E}$. Comme $\mathscr{T}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$. Il s'agit maintenant de montrer l'autre inclusion.

Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ est stable par intersection finie. Soit $E \in \mathcal{E}$ fixé et

$$\mathscr{C}_E := \{A \in \mathscr{C} : \ A \cap E \in \mathscr{C}\}.$$

Comme $E = X \cap E \in \mathcal{E}$, on en déduit que $X \in \mathscr{C}_E$. Par ailleurs, si A, $B \in \mathscr{C}_E$ et $A \subset B$, alors $A \cap E \in \mathscr{C}$, $B \cap E \in \mathscr{C}$ et $A \cap E \subset B \cap E$, ce qui implique que $(B \setminus A) \cap E = (B \cap E) \setminus (A \cap E) \in \mathscr{C}$ et donc que $B \setminus A \in \mathscr{C}_E$. Enfin si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_E$, alors on a $A_n \cap E \in \mathscr{C}$ et $A_n \cap E \subset A_{n+1} \cap E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui montre que $(\bigcup_n A_n) \cap E = \bigcup_n (A_n \cap E) \in \mathscr{C}$, soit $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}_E$. On en déduit que $\mathscr{C}_E$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$ puisque $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_E$ pour tout $E \in \mathcal{E}$, i.e.

$$A \cap E \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A \in \mathscr{C} \text{ et tout } E \in \mathcal{E}.$$

Soit maintenant $B \in \mathscr{C}$ et

$$\mathscr{C}_B := \{A \in \mathscr{C} : \ A \cap B \in \mathscr{C}\}.$$

On montre de même que $\mathscr{C}_B$ est une classe monotone qui, d'après ce qui précède, contient $\mathcal{E}$. Par conséquent, $\mathscr{C} \subset \mathscr{C}_B$, ce qui signifie que

$$A \cap B \in \mathscr{C} \quad \text{pour tout } A, B \in \mathscr{C}.$$

Montrons à présent que $\mathscr{C}$ est une tribu. On sait déjà que $\mathscr{C}$ contient X et que $\mathscr{C}$ est stable par passage au complémentaire et intersection finie. Il s'ensuit que $\mathscr{C}$ est également stable par union finie. Il reste à montrer que $\mathscr{C}$ est stable par union dénombrable. Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_n.$$

Comme $\mathscr{C}$ est stable par réunion finie, il vient $B_n \in \mathscr{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et $\mathscr{C}$ étant une classe monotone, on en déduit que $\bigcup_n B_n \in \mathscr{C}$. Finalement, comme $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$ on en déduit que $\bigcup_n A_n \in \mathscr{C}$.

Comme $\mathscr{C}$ est une tribu contenant $\mathcal{E}$, on obtient l'autre inclusion $\mathscr{T} \subset \mathscr{C}$. ☐

On introduit maintenant la notion de pavé dans $\mathbb{R}^N$.

Définition 4.3. Un *pavé* ouvert (resp. fermé) $P \subset \mathbb{R}^N$ est le produit cartésien de N intervalles ouverts (resp. fermés) bornés de $\mathbb{R}$:

$$P = \prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\qquad \left(\text{resp. } P = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right),$$

avec $a_i < b_i$ (resp. $a_i \leq b_i$) pour tout $1 \leq i \leq N$.

En particulier, les boules $B_\infty(x, r)$ pour la norme

$$\|y\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |y_i|, \quad y = (y_1, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N$$

sont des pavés de $\mathbb{R}^N$.

Corollaire 4.4. *Soient λ et μ deux mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$ qui coïncident sur les pavés ouverts. Alors $\lambda = \mu$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ la famille des pavés ouverts dans $\mathbb{R}^N$. Clairement $\mathcal{E}$ est stable par intersection finie. Montrons que la tribu $\mathscr{T}$ engendrée par $\mathcal{E}$ est la tribu Borélienne sur $\mathbb{R}^N$. En effet, on a tout d'abord l'inclusion $\mathscr{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Pour montrer l'autre inclusion, on considère un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ et le sous ensemble dénombrable de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{F}_U := \{(B_\infty(a, r) \subset U : \ a \in U \cap \mathbb{Q}^N \text{ et } r \in \mathbb{Q}_+^*\}$$

de boules (pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) de centre rationnel et de rayon rationnel, incluses dans U. Si $x \in U$ et $R > 0$ tel que $\overline{B_\infty(x, R)} \subset U$, alors il existe $a \in U \cap \mathbb{Q}^N$ tel que $\|x - a\|_\infty < R/4$. De plus, il existe $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $R/4 < r < R/2$, ce qui implique que $x \in B_\infty(a, r)$ et $B_\infty(a, r) \subset B_\infty(x, R) \subset U$. On a donc montré que

$$U = \bigcup_{B \in \mathcal{F}_U} B$$

et donc que $U \in \mathscr{T}$. Comme la tribu Borélienne est engendrée par les ouverts, on en déduit l'autre inclusion $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathscr{T}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, on pose

$$\lambda_n(B) := \lambda(B \cap] - n, n[^N), \quad \mu(B \cap] - n, n[^N) =: \mu_n(B).$$

Comme λ et μ sont des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^N$, on en déduit que λ_n et μ_n sont des mesures Boréliennes finies sur $\mathbb{R}^N$. On définit

$$\mathscr{C}_n = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) : \ \lambda_n(A) = \mu_n(A)\} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N).$$

Alors $\mathbb{R}^N \in \mathscr{C}_n$ car $\lambda_n(\mathbb{R}^N) = \lambda(]-n, n[^N) = \mu(]-n, n[^N) = \mu_n(\mathbb{R}^N)$ puisque $]-n, n[^N \in \mathcal{E}$. Ensuite si A, $B \in \mathscr{C}_n$ sont tels que $A \subset B$, alors $\lambda_n(B \setminus A) = \lambda_n(B) - \lambda_n(A) = \mu_n(B) - \mu_n(A) = \mu_n(B \setminus A)$ ce qui montre que $B \setminus A \in \mathscr{C}_n$. Enfin si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de $\mathscr{C}_n$, alors $\lambda_n(A_k) = \mu_n(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis passage à la limite quand $k \to \infty$,

$$\lambda_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \lambda_n(A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu_n(A_k) = \mu_n\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right),$$

ce qui montre que $\bigcup_k A_k \in \mathscr{C}_n$. On a donc établi que $\mathscr{C}_n$ est une classe monotone. Comme par hypothèse $\mathscr{C}_n$ contient $\mathcal{E}$, alors $\mathscr{C}_n$ contient la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$ qui, en vertu du théorème de la classe monotone, coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$, i.e. la tribu Borélienne. On a donc établi que $\mathscr{C}_n = \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, i.e. $\lambda_n(B) = \mu_n(B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ou encore

$$\lambda(B \cap] - n, n[^N) = \mu(B \cap] - n, n[^N).$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, il vient $\lambda(B) = \mu(B)$. $\square$

5 La mesure de Lebesgue

L'objet de ce chapitre est de montrer le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Il existe une unique mesure de Radon $\mathcal{L}^N$ (qui s'appelle la mesure de Lebesgue) dans $\mathbb{R}^N$ satisfaisant*

1. $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$ *;*
2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}^N(x+B) = \mathcal{L}^N(B)$.*

5.1 On règle une fois pour toute la question de l'unicité

Soient λ et μ deux mesures de Radon invariantes par translation telles que $\lambda([0,1]^N) = \mu([0,1]^N) = 1$. Montrons que $\lambda = \mu$.

Etape 1. Montrons tout d'abord que si $a \in \mathbb{R}$ et $i \in \{1,\dots,N\}$, alors $\lambda(\{x_i = a\}) = 0$. Nous supposons pour simplifier que $i = 1$ et $a = 0$. Alors

$$\lambda(\{x_1 = 0\}) = \lambda\left(\{x_1 = 0\} \cap \bigcup_{n \geq 1} [-n,n]^N\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\{x_1 = 0\} \cap [-n,n]^N\right). \tag{5.1}$$

On définit $E_n := \{x_1 = 0\} \cap [-n,n]^N$ et on observe que

$$[-n,n]^N = \bigcup_{y_1 \in [-n,n]} (y_1 e_1 + E_n) \supset \bigcup_{y_1 e_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} (y_1 e_1 + E_n),$$

où les ensembles Boréliens $\{y_1 e_1 + E_n\}_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}}$ sont disjoints deux à deux. Comme λ est finie sur les compacts, il vient en utilisant l'invariance par translation que

$$\sum_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} \lambda(E_n) = \sum_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} \lambda(y_1 e_1 + E_n) = \lambda\left(\bigcup_{y_1 \in [-n,n] \cap \mathbb{Q}} (y_1 e_1 + E_n)\right) \leq \lambda([-n,n]^N) < \infty,$$

ce qui n'est possible que si $\lambda(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, en vertu de (5.1), on obtient que $\lambda(\{x_1 = 0\}) = 0$. On montre de même que $\mu(\{x_1 = 0\}) = 0$.

Etape 2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[0,1[^N = \bigcup_{k \in \{0,\dots,n-1\}^N} \left(\frac{k}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right),$$

où les ensembles Boréliens dans l'union précédente sont deux à deux disjoints. Il vient alors que

$$\begin{aligned} 1 = \lambda([0,1]^N) = \lambda([0,1[^N) &= \lambda\left(\bigcup_{k \in \{0,\dots,n-1\}^N} \left(\frac{k}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right)\right) \\ &= \sum_{k \in \{0,\dots,n-1\}^N} \lambda\left(\frac{k}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right) = \sum_{k \in \{0,\dots,n-1\}^N} \lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right) = n^N \lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right), \end{aligned}$$

d'où $\lambda([0,1/n[^N) = n^{-N}$. On montre de même que $\mu([0,1/n[^N) = n^{-N}$.

Etape 3. Montrons à présent que λ et μ coïncident sur les pavés de côtés rationnels. Soit $Q := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ avec a_i et $b_i \in \mathbb{Q}$ et $a_i < b_i$ pour $i \in \{1, \ldots, N\}$. Alors il existe des entiers $n \in \mathbb{N}$, α_i et $\beta_i \in \mathbb{Z}$ tels que $a_i = \alpha_i/n$ et $b_i = \beta_i/n$. Par conséquent,

$$Q = \left(\frac{\alpha_1}{n}, \ldots, \frac{\alpha_N}{n}\right) + \prod_{i=1}^N \left[0, \frac{q_i}{n}\right],$$

avec $q_i = \beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N}$. En vertu de l'invariance par translation de λ, on en déduit que

$$\lambda(Q) = \lambda\left(\prod_{i=1}^N \left[0, \frac{q_i}{n}\right[\right).$$

Par ailleurs,

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^N \left[0, \frac{q_i}{n}\right[\right) = \lambda\left(\prod_{i=1}^N \left(\bigcup_{k_i=0}^{q_i-1} \left[\frac{k_i}{n}, \frac{k_i+1}{n}\right[\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_{k\in K}\left(\frac{k}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right)\right),$$

où $K := \{k \in \mathbb{N}^N : 0 \le k_i \le q_i - 1 \text{ pour tout } i \in \{1, \ldots, N\}\}$. En utilisant de nouveau l'invariance par translation de λ, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda\left(\prod_{i=1}^N \left[0, \frac{q_i}{n}\right[\right) &= \sum_{k\in K} \lambda\left(\frac{k}{n} + \left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right) = \sum_{k\in K} \lambda\left(\left[0, \frac{1}{n}\right[^N\right) \\ &= \frac{1}{n^N}\mathrm{Card}(K) = \frac{1}{n^N}\prod_{i=1}^N q_i = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).\end{aligned}$$

On obtient finalement que $\lambda(Q) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$ et on montre de même que $\mu(Q) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i)$.

Etape 4. Montrons enfin que λ et μ coïncident sur tous les pavés. Soit $Q := \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ avec a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ avec $a_i < b_i$ pour $i \in \{1, \ldots, N\}$. Il existe des suites $(a_i^n)_{n\ge1}$ et $(b_i^n)_{n\ge1} \subset \mathbb{Q}$ telles que $a_i^n \searrow a_i$ et $b_i^n \nearrow b_i$ quand $n \to \infty$, quelque soit $i \in \{1, \ldots, N\}$. Comme $(\prod_{i=1}^N [a_i^n, b_i^n])_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de pavés fermés dont l'union est le pavé ouvert $\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[$, on en déduit que

$$\begin{aligned}\lambda\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right) &= \lambda\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \lim_{n\to\infty} \lambda\left(\prod_{i=1}^N [a_i^n, b_i^n]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^N (b_i^n - a_i^n) \\ &= \prod_{i=1}^N (b_i - a_i) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu\left(\prod_{i=1}^N [a_i^n, b_i^n]\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^N]a_i, b_i[\right) = \mu\left(\prod_{i=1}^N [a_i, b_i]\right).\end{aligned}$$

D'après le théorème de la classe monotone montre finalement que $\lambda(B) = \mu(B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$.

5.2 Construction par mesure extérieure

Cette approche de nature purement géométrique consiste à voir la mesure de Lebesgue comme une généralisation naturelle celle de volume. Il convient donc d'étudier au préalable la notion de volume pour la classe élémentaires d'ensembles que sont les pavés.

Définition 5.2. Le *volume* d'un pavé ouvert ou fermé $P = \prod_{i=1}^N (a_i, b_i)$ est donné par

$$|P| = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

On montre aisément que l'application volume est sous-additive sur la classe des pavés.

Lemme 5.3. *Soient P, $P_1, \dots, P_m$ des pavés tels que*

$$P \subset \bigcup_{i=1}^m P_i.$$

Alors

$$|P| \leq \sum_{i=1}^m |P_i|.$$

Nous pouvons à présent introduire la mesure (extérieure) de Lebesgue. Pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, on pose

$$\mathcal{L}^N_*(A) := \inf \left\{ \sum_{i=0}^\infty |Q_i| : \ A \subset \bigcup_{i=0}^\infty Q_i, \ Q_i \text{ cubes ouverts} \right\}.$$

Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{L}^N_*$ est une mesure extérieure. De plus comme tous les cubes Q_i peuvent être subdivisés en une union finie disjointe de plus petits cubes de côtés arbitrairement petits, on en déduit que la propriété (3.3) est vérifiée. Ceci montre que (la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ de) $\mathcal{L}^N_*$, notée $\mathcal{L}^N$, est une mesure Borélienne. Comme elle est de plus finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N$ est une mesure de Radon.

Le volume d'un cube étant invariant par translation, on en déduit que $\mathcal{L}^N$ est invariant par translation. Il s'agit de montrer que $\mathcal{L}^N([0,1]^N) = 1$. En remarquant que $[0,1]^N \subset Q_\varepsilon :=]-\varepsilon, 1+\varepsilon[^N$ pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit par définition que

$$\mathcal{L}^N([0,1]^N) \leq |Q_\varepsilon| = (1+2\varepsilon)^N,$$

puis, par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, $\mathcal{L}^N([0,1]^N) \leq 1$.

Pour montrer la deuxième inégalité, on considère un recouvrement dénombrable de $[0,1]^N$ par des cubes ouverts $\{Q_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Par compacité, on peut en extraire un sous-recouvrement fini : il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$[0,1]^N \subset \bigcup_{i=0}^m Q_i.$$

D'après le Lemme 5.2, on en déduit que

$$1 = |[0,1]^N| \leq \sum_{i=0}^m |Q_i| \leq \sum_{i=0}^\infty |Q_i|.$$

Par passage à l'infimum parmi tous les recouvements de $[0,1]^N$ par des cubes ouverts, on en déduit que $1 \leq \mathcal{L}^N([0,1]^N)$.

6 Points de Lebesgue

Dans la suite, nous allons considérer des familles $\mathcal{F}$ de boules ouvertes qui recouvrent un ensemble $A \subset \mathbb{R}^N$.

Théorème 6.1 (Recouvrement de Vitali). *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble Borélien et $\mathcal{F}$ un recouvrement de A. Pour tout $\alpha < \mathcal{L}^N(A)$, il existe des boules $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que*

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\alpha.$$

Démonstration. D'après la Proposition 1.4, il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mathcal{L}^N(K) > \alpha$. Puisque $\mathcal{F}$ est un recouvrement ouvert du compact K, il existe un sous-recouvrement fini, i.e., des boules $\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n \in \mathcal{F}$ telles que $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_i$. Soit $B_1 \in \{\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon, $B_2 \in \{\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon disjointe de B_1, $B_3 \in \{\widetilde{B}_1, \dots, \widetilde{B}_n\}$ la boule de plus grand rayon disjointe de $B_1 \cup B_2$. On continue cette procédure un nombre fini m de fois avec $m \leq n$. Si $\widetilde{B}_i \notin \{B_1, \dots, B_m\}$, alors par construction, il existe $1 \leq j \leq m$ tel que $\widetilde{B}_i \cap B_j \neq \emptyset$. Par ailleurs, si j est le plus petit tel indice, on a forcément que $\mathrm{diam}(\widetilde{B}_i) \leq \mathrm{diam}(B_j)$ et donc, en notant $B_j = B(x_j, r_j)$, on a $\widetilde{B}_i \subset B(x_j, 3r_j)$. Par conséquent, $K \subset \bigcup_{j=1}^m B(x_j, 3r_j)$ et

$$\alpha < \mathcal{L}^N(K) \leq \sum_{j=1}^{m} \mathcal{L}^N(B(x_j, 3r_j)) = 3^N \sum_{j=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_j),$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Corollaire 6.2 ("Presque-recouvrement" de Vitali). *Soit U un ensemble ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{L}^N(U) < \infty$. Pour tout $\delta > 0$, il existe une famille dénombrable $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de boules ouvertes deux à deux disjointes telles que $B_i \subset U$ et $\mathrm{diam}(B_i) \leq \delta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, et*

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i\right) = 0.$$

Démonstration. On pose

$$\mathcal{F}_1 := \{\text{boules ouvertes } B \subset U,\ \mathrm{diam}(B) \leq \delta\}$$

ce qui définit un recouvrement de U. D'après le Théorème de Recouvrement de Vitali, il existe $B_1, \dots, B_{m_1} \in \mathcal{F}_1$ deux à deux disjointes telles que

$$\sum_{i=1}^{m_1} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\mathcal{L}^N(U)(1-\delta).$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} B_i\right) = \mathcal{L}^N(U) - \sum_{i=1}^{m_1} \mathcal{L}^N(B_i) \leq [1 - 3^{-N}(1-\delta)]\mathcal{L}^N(U) = \theta\mathcal{L}^N(U),$$

où l'on a posé $\theta := 1 - 3^{-N}(1-\delta) \in]0,1[$. On définit l'ouvert $U_2 := U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_1} \overline{B}_i$ et

$$\mathcal{F}_2 := \{B \in \mathcal{F}_1 :\ B \subset U_2,\ \mathrm{diam}(B) \leq \delta\}.$$

Le même argument que précédemment montre l'existence de boules $B_{m_1+1}, \dots, B_{m_2} \in \mathcal{F}_2$ deux à deux disjointes telles que

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_2} \overline{B}_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_2} B_i\right) = \mathcal{L}^N\left(U_2 \setminus \bigcup_{i=m_1+1}^{m_2} B_i\right) \leq \theta \mathcal{L}^N(U_2) \leq \theta^2 \mathcal{L}^N(U).$$

Notons que les boules $B_1, \dots, B_{m_1}, B_{m_1+1}, \dots, B_{m_2}$ sont deux à deux disjointes. On montre ainsi par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des boules ouvertes $B_1, \dots, B_{m_k} \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que

$$\mathcal{L}^N\left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{m_k} B_i\right) \leq \theta^k \mathcal{L}^N(U).$$

Le résultat suit par passage à la limite quand $k \to \infty$ puisque $\theta \in]0,1[$ et $\mathcal{L}^N(U) < \infty$. $\square$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, on définit la *fonction maximale de Hardy-Littlewood* par

$$Mf(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy.$$

Lemme 6.3. *La fonction Mf est Borélienne sur $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration. On constate tout d'abord que la fonction

$$(x,r) \mapsto \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy$$

est continue sur $\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$. En effet, on a d'abord que $(x,r) \mapsto \mathcal{L}^N(B_r(x)) = \omega_N r^N$ est bien continue sur $\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$. Par ailleurs, si $(x_j, r_j) \to (x,r)$, on a que $\mathbf{1}_{B_{r_j}(x_j)}(y) \to \mathbf{1}_{B_r(x)}(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N \setminus \partial B_r(x)$ avec $\mathcal{L}^N(\partial B_r(x)) = 0$. Par convergence dominée, on en déduit alors que

$$\int_{B_{r_j}(x_j)} |f(y)|\, dy \to \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy.$$

On peut alors écrire que

$$Mf(x) = \sup_{r \in \mathbb{Q}^+} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y)|\, dy,$$

ce qui permet de montrer que Mf est un supremum dénombrable de fonctions continues. C'est en particulier une fonction Borélienne. $\square$

Proposition 6.4. *Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et tout $t > 0$*

$$\mathcal{L}^N(\{Mf > t\}) \leq \frac{3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dy.$$

Démonstration. On considère l'ensemble Borélien $A = \{Mf > t\}$. Par définition de la fonction maximale, pour tout $x \in A$, il existe un $r_x > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mathcal{L}^N(B_{r_x}(x))} \int_{B_{r_x}(x)} |f(y)|\, dy > t.$$

La famille $\mathcal{F} = \{B_{r_x}(x),\, x \in A\}$ forme un recouvrement A par des boules ouvertes. Le Théorème de recouvrement de Vitali montre alors que pour tout $\alpha < \mathcal{L}^N(A)$, il existe un nombre fini de boules $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{F}$ deux à deux disjointes telles que

$$\sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_i) > 3^{-N}\alpha.$$

Par conséquent,

$$\alpha < 3^N \sum_{i=1}^{m} \mathcal{L}^N(B_i) \leq \frac{3^N}{t} \sum_{i=1}^{m} \int_{B_i} |f(y)|\, dx \leq \frac{3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)|\, dx,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Théorème 6.5 (Différentiation de Lebesgue). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors pour $\mathcal{L}^N$-presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

En particulier,

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} f(y)\, dy.$$

Démonstration. Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ dans $L^1(\mathbb{R}^N)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f - g|\, dy \leq \varepsilon.$$

Comme g est uniformément continue, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |g(y) - g(x)|\, dy = 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \\
&\leq \limsup_{r \to 0} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - g(y)|\, dy + \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |g(y) - g(x)|\, dy + |g(x) - f(x)| \right) \\
&\qquad \leq M(f - g)(x) + |g(x) - f(x)|.
\end{aligned}$$

Il vient alors par la Proposition 6.4 et l'inégalité de Markov,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}^N \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^N : \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy > t \right\} \right) \\
&\qquad \leq \mathcal{L}^N(\{M(f - g) > t/2\}) + \mathcal{L}^N(\{|f - g| \geq t/2\}) \\
&\qquad\qquad \leq \frac{2 \cdot 3^N}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f - g|\, dy + \frac{2}{t} \int_{\mathbb{R}^N} |f - g|\, dy \leq \frac{2\varepsilon(3^N + 1)}{t}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre $\varepsilon \to 0$, on obtient que pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}^N \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, dy > t \right\} \right) = 0,$$

puis, par passage à la limite quand $t \to 0$,

$$\mathcal{L}^N \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^N \,:\, \limsup_{r \to 0} \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| \, dy > 0 \right\} \right) = 0,$$

ce qui montre effectivement le résultat voulu. $\square$