Université Pierre et Marie Curie — M1 - MM025

Année 2011-2012 — Calcul des variations : outils et méthodes

Examen du 10 mai 2012

- Le sujet comporte deux parties indépendantes (A et B), à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées. En particulier, les calculettes ne sont pas autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercise 1

1. Soit H un espace de Hilbert et $u \in H$. Montrer qu'il existe une *unique* forme linéaire continue $L \in H^*$ vérifiant:

$$\|L\|_{H^*} = \|u\|_H \qquad \text{et} \qquad \langle L, u\rangle_{H^*,H} = \|u\|_H^2$$

On considère désormais un espace de Banach $(E, \|.\|_E)$ de dual topologique E^*.

2. A $u \in E$ on associe le sous ensemble $F(u)$ de E^* défiini par:

$$F(u) = \{L \in E^*; \|L\|_{E^*} = \|u\|_E, \langle L, u\rangle_{E^*,E} = \|u\|_E^2\}.$$

2.1 Montrer en utilisant le théorème de prolongement de Hahn-Banach, que $F(u)$ est non vide.
2.2 Montrer que $F(u)$ est convexe et fermé.

3. Un espace de Banach $(E, \|.\|_E)$ est *strictement convexe* si : $\forall u, v \in E \times E$, avec $u \neq v$, $\|u\|_E = \|v\|_E = 1$ et $\forall t \in]0, 1[$, on a:

$$\|tu + (1-t)v\| < 1.$$

3.1 Montrer que si E^* est strictement convexe, $F(u)$ est réduit à un point , $\forall u \in E$.
3.2 Etablir qu'un espace de Hilbert est strictement convexe.
3.3 On considère ici $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$ pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Identifier E^* et sa norme. Calculer $F((1,0)), E^*$ est-il strictement convexe?

4. A $L \in E^*$ on associe le sous ensemble de E défini par

$$G(L) = \{u \in E; \|u\|_E = \|L\|_{E^*}, \langle L, u\rangle_{E^*,E} = \|L\|_{E^*}^2\}.$$

4.1 Montrer que si E est réflexif, $G(L)$ est non vide, $\forall L \in E^*$.
4.2 Etablir que si de plus E est strictement convexe, $G(L)$ est réduit à un point, $\forall L \in E^*$.

Exercise 2

Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé, borné de H.

1. Soit $F : H \mapsto H$ une application continue et *monotone*:

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in H \times H.$$

Soit $\{x_n\}$ une suite de H qui converge faiblement vers x et telle que $F(x_n)$ converge fortement vers $\ell \in H$.

1.1 Montrer que pour tout $y \in H$:

$$\langle \ell - F(y), x - y \rangle \geq 0.$$

puis que pour tout $h \in H$, $h \neq 0$:

$$\langle \ell - F(x + h), h \rangle \leq 0.$$

et en déduire que $\ell = F(x)$.

1.2 Etablir que $F(K)$ est fermé.

2. Soit $f : K \mapsto K$ une application 1-Lipschitz, k un point de K et Π la projection sur K.

2.1 En utilisant $F = Id - f \circ \Pi$, prouver que l'ensemble $C = \{x - f(x); x \in K\}$ est fermé.

2.2 Montrer que 0 appartient à l'adhérence de C.

(On pourra pour $0 < \varepsilon < 1$ considérer l'application $f_\varepsilon : x \mapsto \varepsilon k + (1 - \varepsilon) f(x)$ de K dans lui même et montrer qu'elle a un point fixe.)

2.3 En déduire que f a un point fixe.

Partie B

Exercice 1. Soit $u \in W^{1,1}(]0, 1[)$.

1. Montrer que si

(1) $$u(0) = 0,$$

alors

(2) $$\forall \varepsilon \in]0, 1], \ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon |u(x)| dx \leqslant \int_0^\varepsilon |u'(x)| dx.$$

2. Montrer que, réciproquement, (2) implique (1).

Exercice 2. Soit α un réel dans $]0, 1[$ et soit $f \in L^2(]0, 1[)$. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $J_\varepsilon : H_0^1(]0, 1[) \to \mathbb{R}$ par

(3) $$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\varepsilon + x^\alpha) u'^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 u^4 dx - \int_0^1 u f dx.$$

1. Montrer que J_ε est strictement convexe, continue et coercive. On sait qu'il existe alors un $u_\varepsilon \in H_0^1(]0, 1[)$ et un seul tel que

(4) $$\forall u \in H_0^1(]0, 1[), \ J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leqslant J_\varepsilon(u).$$

2. Montrer que u_ε défini dans la question **2.1** satisfait

$$\left\{\begin{array}{l}(\varepsilon + x^\alpha)u'_\varepsilon \in H^1(]0,1[),\\ -((\varepsilon + x^\alpha)u'_\varepsilon)' + u_\varepsilon^3 = f \text{ dans } L^2(]0,1[).\end{array}\right. \tag{5}$$

3. Réciproquement, montrer que si $u_\varepsilon \in H_0^1(]0,1[)$ satisfait (5), alors on a (4).
4. On s'intéresse maintenant au comportement de u_ε (tel que défini dans la question **2.1**) quand $\varepsilon \to 0^+$.
   (a) Montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

   $$\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ \|u_\varepsilon\|_{L^4(]0,1[)} \leqslant C_1. \tag{6}$$

   (b) Montrer qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

   $$\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ \|x^{\alpha/2}u'_\varepsilon\|_{L^2(]0,1[)} \leqslant C_2. \tag{7}$$

   (c) Montrer qu'il existe $p \in]1,2[$ tel que

   $$\frac{\alpha p}{2-p} < 1. \tag{8}$$

   (d) Soit $p \in]1,2[$ tel que (8) soit satisfait. Montrer qu'il existe $C_3 > 0$ tel que

   $$\forall \varepsilon \in]0,+\infty[,\ \|u'_\varepsilon\|_{L^p(]0,1[)} \leqslant C_3. \tag{9}$$

   (Indication : on pourra utiliser (7), (8) et une inégalité de Hölder.) Déduire de ce qui précède l'existence de $u \in W_0^{1,p}$ tel que

   $$\left\{\begin{array}{l}x^\alpha u' \in W^{1,1}(]0,1[),\\ -(x^\alpha u')' + u^3 = f \text{ dans } L^1(]0,1[).\end{array}\right. \tag{10}$$

   (e) Montrer qu'il existe un seul $u \in W_0^{1,1}$ tel que (10) soit satisfait.