Examen du 7 mai 2015

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. (Application surjective) Soient E et F deux espaces de Banach. On désigne par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F et par $\mathcal{S}(E,F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E,F)$ des applications surjectives.

1. On rappelle que le théorème de l'application ouverte montre que si $T \in \mathcal{S}(E,F)$, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$c\mathcal{B}_F \subset T(\mathcal{B}_E), \tag{1}$$

où $\mathcal{B}$ dénote la boule unité ouverte. En déduire que si $T \in \mathcal{S}(E,F)$, alors

$$\|T^* y^*\| \geq c\|y^*\|, \qquad \forall y^* \in F'. \tag{2}$$

2. Réciproquement, si (2) est satisfait, montrer que $c\mathcal{B}_F \subset \overline{T(\mathcal{B}_E)}$. (On pourra séparer $y \notin \overline{T(\mathcal{B}_E)}$ et $\overline{T(\mathcal{B}_E)}$ et en déduire que $\|y\| \geq c$). Construire alors par récurrence une suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ vérifiant :

$$\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\| \leq \frac{c}{2^n},$$

puis conclure que (1) a lieu.

3. Montrer que $\mathcal{S}(E,F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E,F)$.

Exercice 2. (Projection) Soient $1 < p < \infty$ et q l'exposant conjugué de p. On considère un élément $h \in L^p([0,1])$, une famille libre $\{g_i\}_{1\leq i\leq n}$ de $L^q([0,1])$ et on pose

$$V_i = \left\{ f \in L^p([0,1]) : \int_0^1 f(t)g_i(t)\,dt = 0 \right\}, \quad V = \bigcap_{i=1}^n V_i.$$

1. Montrer que le problème suivant :

$$\min_{f\in V} \|h - f\|_p$$

a une solution unique.

2. Ecrire les conditions d'optimalité correspondantes.

3. On considère le cas $p = 2$, $g_1(t) = 1$, $g_2(t) = t^2$. Résoudre explicitement le problème de minimisation pour $h(t) = t$.

Exercice 3. (Convergence faible de suites) Soient X un espace de Hilbert et F un convexe fermé non vide de X. Etant données une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X et une suite $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \qquad \overline{x}_n = \frac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n}{\sigma_n}.$$

On désigne par $\Omega[x_n]$ (resp. $\Omega[\overline{x}_n]$) l'ensemble des points d'accumulation faible de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $\{\overline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$).

1. On suppose que la suite $\{\|x_n - f\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour tout $f \in F$. Montrer que $\Omega[x_n] \cap F$ et $\Omega[\overline{x}_n] \cap F$ contiennent au plus un point.

2. On note P_F l'opérateur de projection sur F. On suppose que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que $P_F(x_n)$ converge fortement vers ζ. Montrer que $\Omega[x_n] \cap F$ et $\Omega[\overline{x}_n] \cap F$ se réduisent à $\{\zeta\}$.

3. On suppose qu'il existe une suite $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ telle que $\|x_{n+1} - f\| \leq \|x_n - f\| + \epsilon_n$ pour tout $f \in F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $\{\|x_n - P_F(x_n)\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et en déduire, en utilisant l'inégalité du parallélogramme, que $\{P_F(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy (donc **2.** s'applique).

Partie B

Exercice 4. Soit $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a : H_0^1(]0,1[) \times H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (u,v) \in H_0^1(]0,1[)^2,\ a(u,v) = \int_0^1 \big(u'(x)v'(x) + c(x)u(x)v(x)\big)dx. \tag{3}$$

On suppose que

$$\text{il existe } \varphi \in H_0^1(]0,1[) \text{ tel que } a(\varphi,\varphi) < 0. \tag{4}$$

Soit $J : H_0^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[),\ J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{4}\int_0^1 u(x)^4 dx. \tag{5}$$

1. Vérifier que J est de classe C^1 et, pour $u \in H_0^1(]0,1[)$ et $v \in H_0^1(]0,1[)$, donner $J'(u)v$.

2. Montrer que

$$\operatorname{Inf}\{J(u);\ u \in H_0^1(]0,1[)\} < 0. \tag{6}$$

(Indication : on pourra considérer $J(t\varphi)$ pour $t \in [0,+\infty[$.)

3. Montrer l'existence de $\bar{u} \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(]0,1[),\ J(\bar{u}) \leqslant J(v). \tag{7}$$

4. Montrer que $\bar{u} \in C^2([0,1])$ et est solution de l'équation différentielle

$$\forall x \in [0,1],\ -u''(x) + c(x)u(x) + u^3(x) = 0. \tag{8}$$

Est-ce que ces deux propriétés avec la propriété $\bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0$ caractérisent $\bar{u}$?

Exercice 5. Soit

$$C_1 := \left\{v \in H_0^1(]-1,1[);\ v(0) = -1\right\} \tag{9}$$

et soit

$$C_2 := \left\{v \in C^1([-1,1]); v(0) = -1, v(-1) = v(1) = 0\right\}. \tag{10}$$

Soit $J : H_0^1(]-1,1[) \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall v \in C_1,\ J(v) = \int_{-1}^{1} v'^2 dx. \tag{11}$$

1. Montrer que C_1 est un convexe fermé de $H_0^1(]-1,1[)$ et que C_2 est un convexe fermé de $C^1([-1,1])$.

2. Montrer qu'il existe un et un seul $u \in C_1$ tel que

$$\forall v \in C_1,\ J(u) \leqslant J(v). \tag{12}$$

Donner l'équation différentielle satisfaite par u sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$. Donner u et vérifier que $J(u) = 2$.

3. En utilisant la question précédente et la famille de fonctions

$$u_\varepsilon(x) = \left(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon+1}\right)\left(\sqrt{\varepsilon + x^2} - \sqrt{\varepsilon+1}\right), \tag{13}$$

où $\varepsilon > 0$, déterminer

$$K_2 = \mathrm{Inf}\ \{J(v);\ v \in C_2\}. \tag{14}$$

4. Existe-t-il un u dans C_2 tel que

$$\forall v \in C_2,\ J(u) \leqslant J(v)\,? \tag{15}$$