Université Pierre et Marie Curie — Année 2016-2017

Examen du 11 mai 2017

Analyse fonctionnelle approfondie, calcul des variations

4M025

Avertissements importants :

- Durée : 3 heures.
- Les appareils électroniques (téléphones compris) et les documents sont interdits.
- Les exercices sont indépendants, le barême est indicatif.
- Les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière rigoureuse.
- Si un résultat du cours est utilisé, il doit être clairement énoncé.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Exercice 1. (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)

1. Rappeler l'inégalité de Poincaré vue en cours. Pourquoi cette inégalité est-elle fausse pour des fonctions non nulles sur le bord ?

2. Nous considérons un intervalle ouvert borné $I =]a, b[$ et un exposant $p \in]1, \infty[$. Si $u \in W^{1,p}(I)$, on note $m_u = \frac{1}{b-a}\int_a^b u(y)\,dy$ la moyenne de u sur I. On se propose de montrer l'*inégalité de Poincaré-Wirtinger* : il existe une constant $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(I)$, on a

$$\|u - m_u\|_{L^p(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}. \tag{1}$$

(a) Montrer que si l'inégalité (1) est fausse, alors on peut trouver une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $W^{1,p}(I)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|u_k - m_{u_k}\|_{L^p(I)} > k\|u_k'\|_{L^p(I)}.$$

(b) On définit $v_k = \frac{u_k - m_{u_k}}{\|u_k - m_{u_k}\|_{L^p(I)}}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|v_k\|_{L^p(I)} = 1, \quad \|v_k'\|_{L^p(I)} < \frac{1}{k}, \quad \int_a^b v_k(y)\,dy = 0.$$

(c) En déduire qu'il existe une sous-suite $(v_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction $v \in W^{1,p}(I)$ telles que $v_{\varphi(k)} \rightharpoonup v$ faiblement dans $W^{1,p}(I)$.

(d) Montrer que $\|v\|_{L^p(I)} = 1$, $v' = 0$ p.p. dans I et $\int_a^b v(y)\,dy = 0$.

(e) Conclure.

Exercice 2. (Problème) Soient $f \in L^2(]0, 1[)$ telle que $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^\infty(]0, 1[)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $x \in]0, 1[$,

$$\alpha \leq a_n(x) \leq \beta,$$

où $0 < \alpha < \beta < +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonctionnelle $J_n : H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ par

$$J_n(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 a_n(x)|v'(x)|^2\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

On considère le sous ensemble $V = \{v \in H^1(]0,1[) : \int_0^1 v(x)\,dx = 0\}$ de $H^1(]0,1[)$ et on s'intéresse au problème de minimisation

$$\inf_{v \in V} J_n(v) \tag{2}$$

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel fermé de $H^1(]0,1[)$.
2. Expliquer pourquoi J_n est bien définie sur $H^1(]0,1[)$ et montrer que si $v \in H^1(]0,1[)$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $J_n(v + c) = J_n(v)$.
3. Montrer que J_n est
   (a) continue sur $H^1(]0,1[)$;
   (b) strictement convexe sur V ;
   (c) coercive sur V (*Indication : on pourra utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger* (1)).
4. En déduire que le problème de minimisation (2) admet une unique solution que l'on notera u_n.
5. Montrer que le minimum u_n est caractérisé par

$$u_n \in V, \qquad \int_0^1 a_n(x)u_n'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{3}$$

6. Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Expliquer pourquoi $F \in H^1(]0,1[)$, $F(0) = F(1) = 0$ et montrer que

$$\int_0^1 f(x)v(x)\,dx = -\int_0^1 F(x)v'(x)\,dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(]0,1[). \tag{4}$$

7. Déduire de (3) et (4) l'existence d'une constante $c_n \in \mathbb{R}$ telle que $a_n u_n' + F = c_n$ p.p. sur $]0,1[$. Montrer ensuite que $c_n = 0$.
8. En utilisant le fait que $J_n(u_n) \leq J_n(0)$, montrer que la suite $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0,1[)$ puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(]0,1[)$ (*Indication : on pourra de nouveau utiliser l'inégalité de Poincaré-Wirtinger* (1)). En déduire l'existence d'une sous-suite, notée $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, ainsi que d'une fonction $u \in V$ telle que $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(]0,1[)$.
9. On suppose désormais que $1/a_n \rightharpoonup 1/a$ faible* dans $L^\infty(]0,1[)$ où $a \in L^\infty(]0,1[)$ est une fonction telle que $\alpha \leq a(x) \leq \beta$ presque pour tout $x \in]0,1[$. Qu'est-ce que cela signifie ?
10. Montrer que $F/a_n \rightharpoonup F/a$ faiblement dans $L^2(]0,1[)$.
11. En déduire que $au' + F = 0$ p.p. sur $]0,1[$ et que u est l'unique solution de la formulation variationnelle

$$u \in V, \quad \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad \text{pour tout } v \in V.$$

12. Montrer que toute la suite u_n converge faiblement vers u dans $H^1(]0,1[)$.
13. Montrer que u est l'unique solution du problème de minimisation

$$\inf_{v\in V} J(v),$$

où

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 a(x)|v'(x)|^2\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx \quad \text{pour tout } v \in H^1(]0,1[).$$