Partiel du 6 mars 2013

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées. Les notes de TD ne sont pas autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. 1.1 Soit X un espace de Banach réflexif et $C \subset X$ un ensemble convexe fermé non vide. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe un point de C le plus proche de x , soit $y \in C$ avec:

$$d(x, C) = \|x - y\|.$$

1.2 Soit $X = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ muni de la norme uniforme. Soit $C \subset X$ l'ensemble des $f \in X$ avec $\|f\| \leq 2$ et satisfaisant:

$$\int_0^{1/2} f(t)dt - \int_{1/2}^1 f(t)dt = 1.$$

Montrer qu'il n'existe pas d'élément de C de norme minimale.
En déduire que X n'est pas réflexif.

Exercice 2. Soit X un espace de Banach réflexif et $T \in \mathcal{L}(X, X)$ avec $\|T\| \leq 1$.
Pour tout $n \geq 1$ on pose:

$$S_n = \frac{Id + T + ... + T^{n-1}}{n}.$$

2.1 Soit $\{u_n\}$ une suite dans X qui converge faiblement vers u. Montrer que u appartient à l'enveloppe convexe fermée de $U_n = \{u_k, k \geq n\}$ donc il existe une suite $\{v_n\}$ avec $v_n \in coU_n$ (enveloppe convexe de U_n) qui converge (en norme) vers u.

2.2 Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe une sous-suite $S_{n_k}x$ qui converge faiblement vers une limite notée y puis que $TS_{n_k}x$ converge faiblement vers Ty.
Vérifier que pour tout $m, n \geq 1$:

$$(*) \qquad \|S_n T^m x - S_n x\| \leq \frac{2m}{n}\|x\|.$$

Etablir que $\lim_{k\to\infty} (TS_{n_k}x - S_{n_k}x) = 0$.
En déduire que y est un point fixe de T.

2.3 Déduire de $(*)$ que $\lim_{n\to\infty} (S_n Ax - S_n x) = 0$, pour tout $A \in \mathcal{A} = co\{Id, T, ..., T^m, ...\}$.

2.4 Utiliser 2.1 pour la sous-suite $S_{n_k}x$ pour en déduire qu'il existe une suite $\{y_k\}$ de la forme $y_k = A_k x$ avec $A_k \in \mathcal{A}$ qui converge en norme vers y.

2.5 En déduire que $S_n x$ converge en norme vers y.

Partie B

Exercice 3. Soit $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $W^{1,1}(]0,1[)$. On suppose qu'il existe une fonction u de $W^{1,1}(]0,1[)$ telle que

$$\text{(1)} \qquad u_i \text{ tend faiblement vers } u \text{ dans } W^{1,1}(]0,1[) \text{ quand } i \text{ tend vers } +\infty.$$

On veut montrer que

$$\text{(2)} \qquad u_i(0) \text{ tend vers } u(0) \text{ quand } i \text{ vers } +\infty.$$

1. Montrer que

$$\text{(3)} \qquad \text{pour tout } i \in \mathbb{N}, \int_0^1 u_i(x)dx = u_i(0) + \int_0^1 \left(\int_0^x u_i'(s)ds\right) dx.$$

2. En déduire (2).

Exercice 4. Pour tout entier n strictement positif, on définit $e_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ par

$$\text{(4)} \qquad \text{pour tout } x \text{ dans } [0,\pi], e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

On rappelle que

$$\text{(5)} \qquad (e_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \text{ est une base hilbertienne de } L^2(]0,\pi[).$$

Soit $f \in L^2(]0,\pi[)$. On définit la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ de nombres réels par

$$\text{(6)} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \alpha_k = \int_0^\pi f(x)e_k(x)dx.$$

Puis on définit, pour tout entier n strictement positif, $f_n \in C^\infty([0,\pi])$ par

$$\text{(7)} \qquad \forall x \in [0,\pi],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k(x).$$

On rappelle que (5) implique que

$$\text{(8)} \qquad f_n \text{ converge vers } f \text{ dans } L^2(]0,\pi[) \text{ quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Dans tout cet exercice, on suppose que $f \in H_0^1(]0,\pi[)$.

1. Montrer que

$$\text{(9)} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ k\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f'(x)\cos(kx)dx.$$

2. Vérifier que

$$\text{(10)} \qquad \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx);\ k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}\right\} \text{ est un système orthonormal de } L^2(]0,\pi[).$$

3. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \alpha_k^2 \leqslant \|f'\|^2_{L^2(]0,\pi[)}. \tag{11}$$

4. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ est une suite de Cauchy dans $H^1_0(]0,\pi[)$.
5. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge uniformément vers f sur $[0,\pi]$.
6. On suppose maintenant que $f \in H^2(]0,\pi[)$.

6.1. Montrer que

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ k^2\alpha_k = -\int_0^\pi f''(x)e_k(x)dx. \tag{12}$$

6.2. Montrer que, pour tout entier m strictement positif et pour tout entier $n \geqslant m$,

$$\|f'_n - f'_m\|^2_{L^2(]0,\pi[)} \leqslant \frac{1}{(m+1)^2}\|f''\|^2_{L^2(]0,\pi[)}. \tag{13}$$

6.3. Montrer l'existence de $C > 0$ tel que

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \|f - f_m\|_{H^1(]0,\pi[)} \leqslant \frac{C}{m+1}\|f\|_{H^2(]0,\pi[)}. \tag{14}$$