Université Pierre et Marie Curie Année 2016-2017

Éléments de correction du partiel du 22 février 2017

Analyse fonctionnelle approfondie, calcul des variations

4M025

Exercice 1. (Questions de cours, 3 points)

1. Enoncer le théorème d'Ascoli.

2. Enoncer le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov.

Exercice 2. (Projection orthogonale dans $L^2(\mathbb{R})$, 4 points) Soit $g \in L^2(\mathbb{R})$ et $C = \{h \in L^2(\mathbb{R}) : h(x) \leq g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}\}$.

1. Rappeler le théorème de la projection orthogonale dans un espace de Hilbert général.

2. Montrer C est convexe, fermé et non vide.

- *$C \neq \emptyset$ car $g \in C$.*
- *C est convexe car si f_1 et $f_2 \in C$ et $t \in [0,1]$, alors $f_1 \leq g$ et $f_2 \leq g$ p.p. et donc $tf_1 + (1-t)f_2 \leq tg + (1-t)g = g$ p.p., soit $tf_1 + (1-t)f_2 \in C$.*
- *Enfin si (f_n) est une suite d'éléments de C qui converge dans $L^2(\mathbb{R})$ vers f, alors on peut extraire une sous-suite $(f_{\sigma(n)})$ qui converge presque partout vers f. Comme $f_{\sigma(n)} \leq g$ p.p., il vient par passage à la limite que $f \leq g$ p.p. et donc $f \in C$.*

3. Montrer que la projection orthogonale de $f \in L^2(\mathbb{R})$ est donnée par la fonction

$$P_C f = \min(f, g).$$

Notons $\bar{f} = \min(f,g)$. Clairement $\bar{f} \in C$ car $\bar{f} \leq g$ p.p.. Soit $h \in C$, calculons

$$\int_{\mathbb{R}} (h-\bar{f})(f-\bar{f})\,dx = \int_{\{f \geq g\}} (h-g)(f-g)\,dx + \int_{\{f<g\}} (h-f)(f-f)\,dx = \int_{\{f \geq g\}} (h-g)(f-g)\,dx \leq 0$$

car $h \leq g$ et $f \geq g$ presque partout sur $\{f \geq g\}$. D'après la caractérisation de la projection orthogonale, on en déduit que $\bar{f} = P_C f$.

Exercice 3. (Séparabilité de $\mathcal{C}([0,1])$, 8 points) On se propose de donner une démonstration alternative de la séparabilité de l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$.

1. Rappeler la définition d'un espace métrique séparable.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, expliquer pourquoi on peut trouver un entier $m^k \geq 1$ et des réels $a_j^k \in [0,1]$, pour $1 \leq j \leq m^k$, tels que

$$[0,1] \subset \bigcup_{j=1}^{m^k} \left] a_j^k - \frac{1}{2k}, a_j^k + \frac{1}{2k} \right[.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le compact $[0,1]$ peut être recouvert par la famille d'ouverts

$$\{]a - 1/(2k), a + 1/(2k)[\}_{a \in [0,1]}.$$

Par la propriété de Borel-Lebesgue, on peut en extraire un sous-recouvrement fini.

3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq j \leq m^k$, on définit les fonctions $q_j^k : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $q^k : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant,

$$q_j^k(x) := \max\left\{0, \frac{1}{k} - |x - a_j^k|\right\}, \quad q^k(x) = \sum_{j=1}^{m^k} q_j^k(x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Montrer que les fonctions q_j^k et q^k sont continues sur $[0,1]$ et que

$$q_j^k(x) \geq 0, \quad q^k(x) \geq \frac{1}{2k} \quad \forall x \in [0,1].$$

La fonction q_j^k est continue comme composée de fonctions fonctions continues (le max et la valeur absolue sont 1-Lipschitz), et q^k est continue comme somme finie de fonctions continues. Par ailleurs $q_j^k \geq 0$ par définition. Si $x \in [0,1]$, il existe un $j \in \{1, \ldots, m^k\}$ tel que $x \in]a_j^k - 1/(2k), a_j^k + 1/(2k)[$. Par conséquent,

$$q^k(x) \geq q_j^k(x) = \frac{1}{k} - |x - a_j^k| = \frac{1}{2k}.$$

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $1 \leq j \leq m^k$, on définit les fonctions $\theta_j^k : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\theta_j^k(x) = \frac{q_j^k(x)}{q^k(x)} \quad \forall x \in [0,1].$$

Montrer que $\theta_j^k \in \mathcal{C}([0,1])$, que $\mathrm{Supp}(\theta_j^k) \subset [a_j^k - 1/k, a_j^k + 1/k]$ et que $\sum_{j=1}^{m^k} \theta_j^k = 1$ sur $[0,1]$.
La fonction θ_j^k est bien définie car le dénominateur ne s'annule jamais d'après la question précédente. Elle est continue comme somme finie de fonctions continues et on a $\sum_j \theta_j^k = 1$. On remarque que $\mathrm{Supp}(\theta_j^k) = \mathrm{Supp}(q_j^k)$. De plus $q_j^k(x) \neq 0$ implique que $1/k - |x - a_j^k| > 0$ i.e. $x \notin]a_j^k - 1/k, a_j^k + 1/k[$ et donc $\mathrm{Supp}(\theta_j^k) \subset [a_j^k - 1/k, a_j^k + 1/k]$.

5. Pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, montrer que la fonction $f_k := \sum_{j=1}^{m^k} f(a_j^k)\theta_j^k \in \mathcal{C}([0,1])$ et que $f_k \to f$ uniformément sur $[0,1]$ quand $k \to +\infty$.
La fonction f_k est continue comme somme finie de fonctions continues. Comme f est continue sur $[0,1]$ qui est compact, elle est uniformément continue sur $[0,1]$. Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que si $x, y \in [0,1]$ avec $|x - y| \leq \delta$, alors $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $1/k_0 \leq \delta$ et $k \geq k_0$ arbitraire. Pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$|f_k(x) - f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{m^k} [f(a_j^k) - f(x)]\theta_j^k(x)\right| \leq \sum_{j=1}^{m^k} |f(a_j^k) - f(x)|\theta_j^k(x).$$

Si $|x - a_j^k| \leq 1/k \leq \delta$, alors $|f(x) - f(a_j^k)| \leq \epsilon$ et si $|x - a_j^k| > 1/k$, alors $\theta_j^k(x) = 0$. Par conséquent,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \sum_{j=1}^{m^k} \epsilon \theta_j^k(x) = \epsilon.$$

Ceci est vrai pour tout $k \geq k_0$ (qui ne dépend que de ϵ) et pour tout $x \in [0,1]$. On peut donc passer au sup en x et on obtient que pour tout $k \geq k_0$,

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_k(x) - f(x)| \leq \epsilon,$$

ce qui montre que $f_k \to f$ uniformément sur $[0,1]$.

6. On note E_k l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ engendré par les fonctions $(\theta_j^k)_{1\le j\le m^k}$. Montrer que $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$. En déduire que $\mathcal{C}([0,1])$ est séparable.
Comme la suite (f_k) définie à la question précédente appartient à E, on en déduit que E est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$. Comme E_k est un espace vectoriel de dimension finie, alors E_k est séparable. Il contient donc une partie D_k dénombrable et dense dans E_k. Notons $D = \bigcup_k D_k$ qui est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables. Par ailleurs D est dense dans E car si $f \in E$ et $\epsilon > 0$, alors il existe un k tel que $f \in E_k$. Du fait que D_k est dense dans E_k, il existe un $g \in D_k \subset D$ tel que $\|f - g\|_\infty \le \epsilon$.

Exercice 4. (Convolution, 5 points) Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables. Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on définit le produit de convolution entre f et g par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

quand l'intégrale précédente a un sens. On suppose tout d'abord (dans les questions **1.** et **2.** ci-dessous) que $f \ge 0$ et $g \ge 0$, auquel cas le produit de convolution $(f*g)(x)$ est bien défini car $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est une fonction mesurable positive.

1. Montrer alors que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ et

$$\|f*g\|_{L^1(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}\|g\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

D'après le théorème de Fubini appliqué à la fonction mesurable et positive $(x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy\right)dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\,dx\right)g(y)\,dy$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz\right)g(y)\,dy = \left(\int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy\right),$$

ce qui montre que $\|f*g\|_1 = \|f\|_1\|g\|_1 < +\infty$.

2. Soient $1 < p, q, r < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ et supposons que $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$. Montrer alors que $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ et

$$\|f*g\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}\|g\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Indication : on pourra écrire $f(x-y)g(y) = f(x-y)^{p/r}g(y)^{q/r}f(x-y)^{1-p/r}g(y)^{1-q/r}$ et appliquer deux fois l'inégalité de Hölder avec des exposants opportuns.
On applique une première fois l'inégalité de Hölder avec $u(y) = f(x-y)^{p/r}g(y)^{q/r}$ muni de l'exposant r et $v(y) = f(x-y)^{1-p/r}g(y)^{1-q/r}$ muni de l'exposant $r' = r/(r-1)$. On obtient alors

$$(f*g)(x)^r \le \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)^p g(y)^q\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)^{\frac{r-p}{r-1}}g(y)^{\frac{r-q}{r-1}}\,dy\right)^{r-1}.$$

On applique une deuxième fois l'inégalité de Hölder dans la deuxième intégrale avec $u(y) = f(x-y)^{\frac{r-p}{r-1}}$ muni de l'exposant $\frac{p(r-1)}{r-p}$ et $v(y) = g(y)^{\frac{r-q}{r-1}}$ muni de l'exposant $\left(\frac{p(r-1)}{r-p}\right)' = \frac{q(r-1)}{r-q}$. Il vient en utilisant un changement de variables

$$(f*g)(x)^r \le \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)^p g(y)^q\,dy\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)^p\,dy\right)^{\frac{r-p}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)^q\,dy\right)^{\frac{r-q}{q}}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)^p g(y)^q\,dy\right)\|f\|_p^{r-p}\|g\|_q^{r-q}.$$

On intègre à présent par rapport à x et on utilise le théorème de Fubini et la formule de changement de variables

$$\|f * g\|_r^r \leq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, dx \right) g(y)\, dy \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} = \|f\|_p^p \|g\|_q^q \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-q} = (\|f\|_p \|g\|_q)^r,$$

ce qui montre le résultat.

3. On suppose maintenant que les fonctions f et g de la question précédente peuvent changer de signe. Montrer que le produit de convolution entre f et g est toujours bien défini et que la conclusion de la question précédente reste valide.
On utilise la question avec $|f|$ et $|g|$, il vient alors que

$$\| |f| * |g| \|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

On utlise ensuite le fait que, d'après l'inégalité triangulaire $|(f * g)(x)| \leq (|f| * |g|)(x)$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement, on obtient que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.