Université Pierre et Marie Curie — M1 - MM025

Année 2012-2013 — Calcul des variations : outils et méthodes

Examen du 5 juin 2013
(2ème session)

- Le sujet comporte deux parties indépendantes (A et B), à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées. En particulier, les notes de TD, les calculettes et les téléphones portables ne sont pas autorisés.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. Soient H un espace de Hilbert, $\{a_i\}_{i\in I}$ une famille finie dans H et

$$C = \left\{ \sum_{i\in I} \lambda_i a_i,\ \lambda \in \mathbb{R}^I_+ \right\}$$

le cône qu'elle engendre.

1.1. Montrer que C est fermé et qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que tout point y de C a une représentation:

$$y = \sum_{i\in I} \lambda_i a_i,\ \lambda \in \mathbb{R}^I_+,$$

avec

$$\|\lambda\|_{\mathbb{R}^I} \leq M\|y\|_H.$$

1.2. Soient $b \in \mathbb{R}^I$ et $L(b) = \{x \in H :\ \langle x, a_i\rangle \leq b_i,\ \forall\, i \in I\}$. Considérer le problème

$$(P) \qquad \min_{y\in L(b)} \|x - y\|^2$$

pour en déduire l'existence d'une constante $\overline{M}$ (ne dépendant que des a_i) et vérifiant, pour tout b tel que l'intérieur de $L(b)$ est non vide:

$$d(x, L(b)) \leq \overline{M} \left[\sum_{i\in I} \langle x, a_i\rangle - b_i \right]^+.$$

Exercice 2 (**Théorème de Stampacchia**)**.** Soient E un espace de Hilbert, $\phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue et $\Psi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire:

- *continue*: il existe une constante $C \geq 0$ telle que $|\Psi(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ pour tout x, $y \in E$;
- *coercive*: il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\Psi(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$ pour tout $x \in E$.

2.1. Montrer qu'il existe $f \in E$ telle que $\phi(y) = \langle f, y \rangle$. Montrer de même, en considérant l'application $y \mapsto \Psi(x, y)$, qu'il existe un opérateur linéaire $A : E \to E$ vérifiant

$$\Psi(x, y) = \langle Ax, y \rangle, \quad \|Ax\| \leq C\|x\|, \quad \langle Ax, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2.$$

2.2. Soit K un convexe fermé non vide de E et Π_K l'opérateur de projection sur K. Pour $\rho > 0$, on introduit

$$Tx := \Pi_K(\rho f - \rho Ax + x).$$

Etablir que

$$\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2),$$

et montrer qu'il existe une valeur ρ^* telle que l'application T associée soit contractante de rapport strictement inférieur à 1. En déduire alors l'existence de $x \in K$ tel que $x = Tx$, puis que x vérifie

$$\langle f - Ax, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in K,$$

soit

$$\Psi(x, y - x) \geq \phi(y - x), \quad \forall y \in K.$$

Montrer qu'un tel x est unique.

2.3. On suppose maintenant Ψ symétrique et donc, $\Psi(x, y)$ définit un produit scalaire sur E. Vérifier que la norme associée $(\Psi(x, x)^{1/2}$) est équivalente à la norme initiale et donc que (E, Ψ) est aussi un espace de Hilbert. En déduire qu'il existe $g \in E$ tel que $\phi(y) = \Psi(g, y)$ pour tout $y \in E$ et que x, défini à la question 2.2, vérifie

$$\Psi(g - x, y - x) \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

Etablir que x est la projection de g sur K pour le nouveau produit scalaire et donc, qu'il réalise le minimum de $y \mapsto \Psi(g - y, g - y)$ sur K. Montrer enfin que x est caractérisé comme le point de K réalisant le minimum de

$$y \mapsto \frac{1}{2}\Psi(y, y) - \phi(y)$$

sur K.

Partie B

Exercice 3. Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $L^2(]0, 1[)$. Dans cet exercice, on s'intéresse aux fonctions u_1 et u_2 dans $H^2(]0, 1[)$ telles que

(1) $$-u_1'' + u_2 = f_1,$$

(2) $$-u_2'' - u_1 = f_2.$$

Soit $H = H_0^1(]0, 1[) \times H_0^1(]0, 1[)$. L'espace H, muni du produit scalaire

(3) $$\forall (u_1, u_2) \in H, \forall (v_1, v_2) \in H, \ ((u_1, u_2), (v_1, v_2))_H = \int_0^1 (u_1' v_1' + u_2' v_2') dx,$$

est un espace de Hilbert. On définit deux applications $a : H \times H \to \mathbb{R}$ et $L : H \to \mathbb{R}$ par

(4) $$\forall u = (u_1, u_2) \in H, \forall v = (v_1, v_2) \in H, \ a(u, v) = \int_0^1 (u_1' v_1' + u_2' v_2') dx + \int_0^1 (u_2 v_1 - u_1 v_2) dx,$$

(5) $$\forall v = (v_1, v_2) \in H, \ L(v) = \int_0^1 (f_1 v_1 + f_2 v_2) dx.$$

3.1. Montrer que a est une forme bilinéaire, continue et coercive.

3.2. Montrer que L est une application linéaire continue.

3.3. Montrer qu'il existe un et un seul $u = (u_1, u_2) \in H$ tel que

$$\forall v \in H,\ a(u,v) = L(v). \tag{6}$$

3.4. Montrer qu'il existe un et un seul $u = (u_1, u_2) \in H^2(]0,1[)^2 \cap H$ tel que (1) et (2) soient des égalités dans $L^2(]0,1[)$. Montrer que ce u est dans $C^2([0,1])^2$ si f_1 et f_2 sont continues.

3.5. Dans cette question, on s'intéresse aux (u_1, u_2) solutions de (1) et (2) qui satisfont les conditions

$$u_1'(0) = u_1'(1) = u_2'(0) = u_2'(1) = 0. \tag{7}$$

Montrer qu'il existe au plus une solution $(u_1, u_2) \in H^2(]0,1[) \times H^2(]0,1[)$ de (1) et (2) qui satisfasse les conditions (7). (Remarque : on peut démontrer aussi l'existence d'un tel u mais ce n'est pas demandé.)

Exercice 4. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que, pour une constante $C > 0$,

$$\forall s \in \mathbb{R},\ |F(s)| \leqslant C\sqrt{1+|s|}. \tag{8}$$

4.1. Pour $u \in H_0^1(]0,1[)$, on note par $F(u') : [0,1] \to \mathbb{R}$ l'application qui à $x \in [0,1]$ associe $F(u'(x))$. Montrer

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[),\ F(u') \in L^2(]0,1[) \tag{9}$$

et que

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[),\ \|F(u')\|_{L^2(]0,1[)} \leqslant C\left(1 + \sqrt{\|u\|_{H_0^1(]0,1[)}}\right). \tag{10}$$

Soit $u \in H_0^1(]0,1[)$. Déduire de (9) qu'il existe un $\overline{u}$ et un seul dans $H_0^1(]0,1[) \cap H^2(]0,1[)$ tel que

$$-\overline{u}''(x) = F(u') \text{ dans } L^2(]0,1[). \tag{11}$$

Dans la suite on note par T l'application de $H_0^1(]0,1[)$ dans lui-même qui à u associe $\overline{u}$.

4.2. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall u \in H_0^1(]0,1[),\ \|T(u)\|_{H_0^1(]0,1[)} \leqslant K\left(1 + \sqrt{\|u\|_{H_0^1(]0,1[)}}\right). \tag{12}$$

En déduire que, si $R > 0$ est assez grand, alors

$$\left(u \in H_0^1(]0,1[) \text{ et } \|u\|_{H_0^1(]0,1[)} \leqslant R\right) \Rightarrow \left((\|T(u)\|_{H_0^1(]0,1[)} \leqslant R\right). \tag{13}$$

4.3. (Continuité de T.) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H_0^1(]0,1[)$ qui, quand n tend vers $+\infty$, converge vers une fonction u dans $H_0^1(]0,1[)$. Montrer que

$$F(u_n') \to F(u') \text{ dans } L^2(]0,1[) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{14}$$

Montrer que

$$T(u_n) \to T(u) \text{ dans } H_0^1(]0,1[) \text{ quand } n \to +\infty. \tag{15}$$

4.4. Soit $R > 0$. En utilisant (10) et (11) avec $\overline{u} = T(u)$, montrer que l'ensemble $\{T(u);\ u \in H_0^1(]0,1[) \text{ et } \|u\|_{H_0^1(]0,1[)} \leqslant R\}$ est inclus dans un compact de $H_0^1(]0,1[)$.

Remarque : on peut déduire des résultats de cet exercice et d'un théorème dû à Leray et Schauder qu'il existe $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que $T(u) = u$.