Examen du mercredi 11 juin 2014

- Le sujet comporte deux parties indépendantes (A et B), à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées. En particulier, les notes de TD et les calculettes ne sont pas autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1.

1.1. Banach-Saks

Soit X un espace de Hilbert et $\{x_n\}$ une suite dans X faiblement convergente vers 0. Construire par induction une suite extraite $\{y_n\}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{k-1} |\langle y_j, y_k\rangle| \leq 1, \quad \forall k \geq 1.$$

En déduire que

$$\left\| \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \right\|^2 \to 0.$$

Montrer que si $\{z_n\}$ converge faiblement dans X vers z, il existe une suite extraite $\{u_n\}$ dont la moyenne de Cesaro converge fortement vers z.

1.2. Mazur

Soit X un espace de Banach et $\{x_n\}$ une suite dans X faiblement convergente vers x.

(a) Montrer qu'il existe une suite $\{y_n\}$ de combinaisons convexes des $\{x_n\}$ qui converge fortement vers x.

(b) Montrer qu'il existe une suite $\{z_n\}$ avec $z_n \in co(\cup_{m\geq n}\{x_m\})$ (co désigne l'enveloppe convexe) qui converge fortement vers x.

(c) Montrer qu'il existe une suite $\{u_n\}$ avec $u_n \in co(\cup_{m\leq n}\{x_m\})$ qui converge fortement vers x.

Exercice 2. Fonctionnelle différentiable

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory: pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f(.,s)$ est mesurable sur Ω et p.p. en $\omega \in \Omega$, $f(\omega, .)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soient $1 \leq p, q < \infty$.

2.1. On suppose qu'il existe $b \geq 0$ et $a \in L^q(\Omega)$ avec

$$|f(.,s)| \leq a(.) + b|s|^{p/q}, \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

On introduit l'opérateur B qui à toute fonction mesurable u de Ω dans $\mathbb{R}$ associe la fonction Bu définie par $Bu(\omega) = f(\omega, u(\omega))$.
Montrer que B est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ (*Utiliser le fait que si u_n converge vers u dans $L^p(\Omega)$ il existe $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite $\{u_{n_k}\}$ telle que p.p., u_{n_k} converge vers u et $|u_{n_k}| \leq g$. En déduire que Bu_{n_k} converge vers Bu dans $L^q(\Omega)$ puis qu'il en est de même de toute la suite Bu_n*).

2.2. On introduit $F(\omega, s) = \int_0^s f(\omega, r)dr$ et la fonctionnelle V définie par $V(u) = \int_\Omega F(\omega, u(\omega))d\omega$.
Montrer que si F est une fonction de Carathéodory et qu'il existe $\beta \geq 0$, $\alpha \in L^1(\Omega)$ et $1 \leq p < \infty$ avec

$$(*) \qquad |F(.,s)| \leq \alpha(.) + \beta|s|^p, \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \quad p.p. \text{ sur } \Omega$$

alors V est continue sur $L^p(\Omega)$.

2.3. On suppose dans la suite que f est une fonction de Carathéodory, que F est définie comme en 2.2 et qu'il existe $b_0 \geq 0$ et $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et $p' = p/(p-1)$ vérifiant

$$(**) \qquad |f(.,s)| \leq a_0(.) + b_0|s|^{p-1}, \qquad \forall s \in \mathbb{R}, \quad p.p. \text{ sur } \Omega.$$

Montrer en utilisant l'inégalité de Young ($uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{p'}v^{p'}$) que F satisfait $(*)$.

2.4. Vérifier que l'on a pour $t > 0$ et $v \in L^p(\Omega)$

$$\frac{V(u+tv) - V(u)}{t} - \int_\Omega f(\omega, u(\omega)v(\omega)d\omega = \int_\Omega \varphi_t(\omega)d\omega$$

où $\varphi_t(\omega) \to 0$ quand $t \to 0$, p.p. en $\omega \in \Omega$ et $|\varphi_t(\omega)| \leq g(\omega)$ avec $g \in L^1(\Omega)$. En déduire que la Gâteaux-différentielle $D_G V$ de V existe avec $\langle D_G V(u), v\rangle = \int_\Omega f(\omega, u(\omega))v(\omega)\, d\omega$ pour tout $v \in L^p(\Omega)$.

2.5. Montrer que $D_G V$ est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. (Utiliser 2.1.)

2.6. En déduire que V est $\mathcal{C}^1$ sur $L^p(\Omega)$ avec $V'(u) = f(., u(.))$.

Partie B

Exercice 3. Soit I l'intervalle ouvert $]0,1[$. Soit $p \in [1, +\infty)$. On veut montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall u \in H^1(I),\ \|u\|_{L^\infty(I)} \leqslant C\|u\|_{L^p(I)}^{p/(p+2)}\|u\|_{H^1(I)}^{2/(p+2)}. \tag{1}$$

3.1. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F(t) = |t|^{p/2}t. \tag{2}$$

Soit $u \in C^1([0,1])$ tel que

$$u(0) = 0. \tag{3}$$

En remarquant que

$$\forall x \in [0,1],\ F(u(x)) = \int_0^x F'(u(t))u'(t)dt, \tag{4}$$

montrer l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout $u \in C^1([0,1])$ satisfaisant (3), on ait (1).

3.2. Montrer que l'ensemble des $u \in C^1([0,1])$ satisfaisant (3) est, pour la norme $H^1(I)$, dense dans dans l'ensemble des $u \in H^1(I)$ satisfaisant (3).

3.3. Montrer l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout $u \in H^1(I)$ satisfaisant (3), on ait (1).

3.4. Soit $\theta \in C^1([0,1])$ tel que

$$\theta = 0 \text{ sur } [0, 1/3], \tag{5}$$

$$\theta = 1 \text{ sur } [2/3, 1]. \tag{6}$$

Soit $u \in H^1(I)$. En remarquant que $u = \theta u + (1-\theta)u$, montrer l'existence de $C > 0$ tel que, pour tout $u \in H^1(I)$, on ait (1).

Exercice 4. Soit $I =]0,1[$ et soit $f \in L^1(I)$. Soit $J : H^1(I) \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall u \in H^1(I),\ J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx + \frac{1}{4}u(0)^4. \tag{7}$$

4.1. Montrer que J est de classe C^1. Donner $J'(u)v$ pour u et v dans $H^1(I)$.

4.2. Montrer que J est strictement convexe.

4.3. Montrer que

$$\lim_{\|u\|_{H^1(I)} \to +\infty} J(u) = +\infty. \tag{8}$$

4.4. Montrer qu'il existe un et seul u dans $W^{2,1}(I)$ tel que

$$-u'' = f \text{ dans } L^1(I), \tag{9}$$

$$u'(0) = u(0)^3,\ u'(1) = 0. \tag{10}$$