Examen du 12 juin 2015 (2ème session)

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seulement les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. (Opérateur maximal monotone) Soit X un espace de Hilbert et A une correspondance de X dans lui même, de graphe $G(A) = \{(x,p) \in X^2 : \ p \in A(x)\}$. On dit que A est *monotone* si pour tout couple $(x,p), (y,q)$ de $G(A)$, on a :

$$\langle p-q, x-y\rangle \geq 0.$$

1. On suppose que A est non dilatante au sens où pour tout couple $(x,p), (y,q) \in G(A)$:
$$\|p-q\| \leq \|x-y\|.$$
Montrer que $B = \mathrm{Id} - A$ est monotone.
2. Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. Montrer que $A = \partial f$ est monotone.
3. Etablir que A est monotone si et seulement si pour tout couple (x,p), $(y,q) \in G(A)$ et pour tout $t > 0$,
$$\|x-y\| \leq \|x-y+t(p-q)\|.$$
4. Soit $t > 0$ et $J_t^A = (\mathrm{Id} + tA)^{-1}$ la *résolvante* associée à A. Etablir que A est monotone si et seulement si J_t^A est non dilatante.
5. On dit que A est un opérateur *maximal monotone* si son graphe est maximal pour l'inclusion, parmi ceux des opérateurs monotones. Soit A maximal monotone, établir que
$$[\langle p-q, x-y\rangle \geq 0, \quad \forall (y,q) \in G(A)] \Longleftrightarrow p \in A(x). \tag{1}$$
6. Soit A maximal monotone. Montrer alors que
   (a) $A(x)$ est convexe fermé ;
   (b) $G(A)$ est séquentiellement fermé (fort/faible et faible/fort).
7. Montrer que si A est monotone et $\mathrm{Id}+A$ surjective, alors A est maximal monotone. (*Indication : partant de* (1) *prendre* y' *avec* $p + x \in (\mathrm{Id} + A)(y')$).
8. La fonction de Fitzpatrick $\Psi_A : X \times X \to \mathbb{R}$ associée à un opérateur maximal monotone A est définie par :
$$\Psi_A(x,p) = \langle x,p\rangle + \sup_{(y,q)\in G(A)} \langle x-y, q-p\rangle$$
Etablir que Ψ_A est convexe, s.c.i. et
$$\begin{aligned} \Psi_A(x,p) &\geq \langle x,p,\rangle \\ \Psi_A(x,p) = \langle x,p\rangle &\Longleftrightarrow (x,p) \in G(A). \end{aligned} \tag{2}$$

9. Le but de cette section est de montrer que si A est maximal monotone alors $\mathrm{Id}+A$ est surjective. On pose $g(y,q) = \frac{1}{2}(\|y\|^2 + \|q\|^2)$.
   (a) Utiliser (2) pour obtenir
   $$\Psi_A(x,p) + g(x,p) \geq 0, \qquad \forall x, p \in X,$$
   et invoquer le Théorème de Fenchel-Rockafellar pour en déduire l'existence de $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in X \times X$ avec
   $$\langle x, \theta_1\rangle + \langle p, \theta_2\rangle - \langle y, \theta_1\rangle - \langle q, \theta_2\rangle \leq \Psi_A(x,p) + g(y,q), \qquad \forall x, y, p, q \in X.$$
   (b) Prendre $(y,q) = -\theta$ et $(x,p) \in G(A)$ pour obtenir $\theta \in G(A)$.
   (c) Considérer alors $(x,p) = \theta$ pour déduire $0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} + A)$.
   (d) Conclure en introduisant, pour tout $y \in X$, l'opérateur B défini par $Bx = Ax - y$.

Partie B

Exercice 2. Soit $a : [0,1] \to]0, +\infty[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $F : H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

(3) $$\forall v \in H^2(]0,1[),\ F(v) = \int_0^1 \frac{v'(x)^2}{1 + a(x)v(x)^2} dx.$$

On admet que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

(4) $$\forall u, v \in H^1(]0,1[),\ F'(u)v = 2\int_0^1 \left(\frac{u'(x)v'(x)}{1 + a(x)u(x)^2} - a(x)\frac{u'(x)^2 u(x) v(x)}{(1 + a(x)u(x)^2)^2}\right) dx.$$

1. Soit $u \in H^1(]0,1[)$ une solution de $J'(u) = 0$. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$, donner l'équation différentielle satisfaite par u ainsi que les conditions au bord satisfaites par u. Montrer que u est une fonction constante (on pourra remarquer que $u''(x) = K(x, u'(x))$ pour une fonction K telle que $K(x,0) = 0$).

2. Montrer que, pour toute fonction $u \in H^1(]0,1[)$, la fonctionnelle $F_u : H^1(]0,1[) \to \mathbb{R}$ définie par

(5) $$\forall v \in H^1(]0,1[),\ F_u(v) = \int_0^1 \frac{v'(x)^2}{1 + a(x)u(x)^2} dx$$

est semi-continue inférieurement pour la topologie faible de $H^1(]0,1[)$. En déduire qu'il en est de même pour la fonctionnelle F.

3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit C l'ensemble des $u \in H^1(]0,1[)$ tels que

(6) $$u(0) = 0 \text{ et } u(1) = \alpha.$$

Est-ce que l'on a

(7) $$\lim_{u \in C,\ \|u\|_{H^1(]0,1[)} \to +\infty} F(u) = +\infty\ ?$$

(Indication : on pourra commencer par traiter le cas où $a = 1$ et remarquer que dans ce cas, si $v(x) = \sqrt{1 + u(x)^2}$, alors $F(u) = \int_0^1 v'(x)^2 dx$.)

On suppose que $u \in C$ vérifie

(8) $$\forall v \in C,\ J(u) \leqslant J(v).$$

Montrer que u est toujours de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et donner l'équation différentielle satisfaite par u. Donner u si la fonction a est identiquement égale à 1 sur $[0,1]$.