Rattrapage du 13 juin 2016

- Le sujet comporte deux parties indépendantes, à rédiger sur des feuilles différentes.
- Seules les notes de cours sont autorisées.
- Durée : 3 heures.
- Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Partie A

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on définit la suite de fonctions

$$u_n(x) = n\mathbf{1}_{[0,1/n]}(x).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^1(0,1)$.
2. Etablir que

$$\int_0^1 u_n \varphi \, dx \to 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c(]0,1[).$$

3. En déduire que si une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^1(0,1)$ vers une fonction $u \in L^1(0,1)$, alors nécessairement $u = 0$ presque partout sur $[0,1]$.
4. Montrer qu'aucune sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^1(0,1)$.
5. Quelle propriété n'est pas satisfaite par l'espace $L^1(0,1)$ pour que toute suite bornée admette une sous-suite faiblement convergente ?

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement. On suppose qu'il existe $c > 0$ et $1 < p < \infty$ tels que

$$0 \le f(s) \le c(1 + |s|^p) \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

On définit la fonctionnelle $J : L^p(0,1) \to \mathbb{R}$ par

$$J(u) = \int_0^1 f(u(x))\, dx \quad \text{pour tout } u \in L^p(0,1).$$

1. Montrer que J est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement dans $L^p(0,1)$.
2. Montrer que $C := \{u \in L^p(0,1) : \int_0^1 u\, dx = 1\}$ est un sous-ensemble convexe et fermé de $L^p(0,1)$.
3. En déduire que le problème de minimisation $\inf\{J(v) : v \in C\}$ admet une solution notée $\bar{u}$.
4. On suppose désormais que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec dérivée bornée. Montrer que J est Fréchet-différentiable et que

$$\langle dJ(u), v\rangle = \int_0^1 f'(u(x))v(x)\, dx \quad \text{pour tout } u, v \in L^p(0,1).$$

5. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_0^1 f'(\bar{u}(x))v(x)\,dx = \lambda \int_0^1 v(x)\,dx \quad \text{pour tout } v \in L^p(0,1).$$

6. En déduire que

$$f'(\bar{u}(x)) = \int_0^1 f'(\bar{u}(y))\bar{u}(y)\,dy \quad \text{presque pour tout } x \in [0,1].$$

Partie B

Exercice 3. Soient $T > 0$, $a > 0$, $I =]0,T[$ et $f \in L^2(I)$. Soit H le sous-espace vectoriel de $H^1(I)$ défini par

$$H = \{u \in H^1(I);\, u(0) = u(T)\}.$$

On rappelle que H est un fermé de $H^1(I)$ et, donc, muni du produit scalaire de $H^1(I)$, H est un espace de Hilbert. Dans la suite H est muni de ce produit scalaire. Pour $v \in H$, on pose

$$J_0(v) = a\int_0^T \cos(v(x))dx + \int_0^T f(x)v(x)dx,$$
$$J(v) = \frac{1}{2}\int_0^T |v'(x)|^2 dx + J_0(v).$$

Pour $v \in L^2(I)$, on pose

$$M(v) = \frac{1}{T}\int_0^T v(x)dx.$$

3.1. On rappelle que J_0 et J_1 sont de classe C^1 sur H. Expliciter J_0' (aussi noté dJ_0). En déduire que (avec $J'(u) = dJ(u)$)

$$(1) \qquad J'(u)v = \int_0^T [u'(x)v'(x) + (f(x) - a\sin(u(x)))v(x)]dx \text{ pour tout } u, v \text{ dans } H.$$

3.2. Soit $u \in H$. Montrer que $J'(u) = 0$ si et seulement si

$$(2) \qquad \begin{cases} u \in H^2(I) \cap H, \\ u'(0) = u'(T), \\ -u'' = a\sin(u) - f \text{ dans } L^2(I). \end{cases}$$

3.3. Montrer que (2) n'a pas de solution si $|M(f)| > a$.

Dans toute la suite de cet exercice on suppose que $M(f) = 0$.

3.4. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $v \in H$ et pour tout $x \in I$,

$$(3) \qquad |v(x) - M(v)| \leqslant C\|v'\|_{L^2(I)}.$$

3.5. Montrer que J est bornée inférieurement sur H.

3.6. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H convergeant faiblement vers v quand $n \to +\infty$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers v dans $C([0,T])$ et que $J_0(v_n) \to J_0(v)$. En déduire que

$$J(v) \leqslant \liminf_{n\to+\infty} J(v_n).$$

3.7. Montrer que J atteint son minimum en au moins un point $u_0 \in H$ tel que $M(u_0) \in [0, 2\pi[$. (On pourra utiliser (3) et noter que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $J(v + 2k\pi) = J(v)$.)

3.8. Soit u_0 comme dans la question **3.7** et soit

$$\alpha = J(u_0) = \min\{J(v);\ v \in H\}.$$

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ une suite d'éléments de H telle que

$$J(u_k) \to \alpha \text{ quand } k \to +\infty$$

et, pour un $u_* \in H$,

$$u_k \rightharpoonup u_* \text{ faiblement dans } H \text{ quand } k \to +\infty.$$

Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u_*\|_H = 0.$$

3.9. Soit $R > 0$. On définit

$$\Sigma(u_0, R) = \{u \in H; \|u - u_0\|_H = R\}.$$

Montrer que s'il n'existe pas de u dans $\Sigma(u_0, R)$ tel que $J'(u) = 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$J(v) \geqslant \delta + \alpha,\ \forall v \in \Sigma(u_0, R).$$

3.10. On suppose que (2) n'a qu'un nombre fini de solutions u telles que $M(u) \in [0, 2\pi[$. Montrer l'existence de $\nu > 0$ tel que, pour tout $\gamma \in C^0([0,1]; H)$ tel que $\gamma(0) = u_0$ et $\gamma(1) = u_0 + 2\pi$, on a

$$\max\{J(\gamma(x));\ t \in [0,1]\} \geqslant \nu + \alpha.$$

(La fonction u_0 est définie à la question **3.7**.)