Université Pierre et Marie Curie Année 2016-2017

Rattrapage du 14 juin 2017

Analyse fonctionnelle approfondie, calcul des variations

4M025

Avertissements importants :

– Durée : 3 heures.

– Les appareils électroniques (téléphones compris) et les documents sont interdits.

– Les exercices sont indépendants, le barème est indicatif.

– Les réponses doivent être justifiées et rédigées de manière rigoureuse.

– Si un résultat du cours est utilisé, il doit être clairement énoncé.

– Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés.

Exercice 1. (Questions de cours, 3 points)

1. Enoncer l'une des versions du théorème de Hahn-Banach.

2. Donner la définition de la différentiabilité au sens de Gâteaux.

3. Enoncer un résultat du cours de votre choix concernant une condition nécessaire d'optimalité.

Exercice 2. (Espaces de Sobolev, 3 points)

1. Trouver une fonction $u \in L^2(]0,1[)$ telle que u soit dérivable presque partout, telle que la fonction g, définie presque partout par

$$g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h},$$

appartienne à $L^2(]0,1[)$ et telle que $u \notin H^1(]0,1[)$.

2. Montrer que la fonction

$$u(x) = (x + |x|)/2$$

appartient à $H^1(]-1,1[)$ et déterminer sa dérivée faible.

3. Soit I un intervalle ouvert quelconque de $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions de $H^1(I)$ sont Höldériennes d'exposant $1/2$, c'est-à-dire que pour tout $u \in H^1(I)$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x, $y \in I$,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^{1/2}.$$

On rappelle que $u \in H^1(I)$ est identifiée à son représentant continu.

Exercice 3. (Règle de la chaîne, 4 points) Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ $(1 \leq p < \infty)$. On se propose de montrer que la fonction composée $v := f(u) \in W^{1,p}(]0,1[)$ et que sa dérivée faible est donnée par $v' = f'(u)u'$ presque partout dans $]0,1[$.

1. On suppose d'abord que $u \in \mathcal{C}^1([0,1])$. Rappeler pourquoi $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$ et $v' = f'(u)u'$ sur $[0,1]$.

2. Soit $u \in W^{1,p}(]0,1[)$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty([0,1])$ telle que $u_k \to u$ dans $W^{1,p}(]0,1[)$.

(a) Montrer que $v_k := f(u_k)$ converge simplement ainsi que dans $L^p(]0,1[)$ vers $v = f(u)$.

(b) Montrer que $v_k' = f'(u_k)u_k'$ converge vers $f'(u)u'$ dans $L^p(]0,1[)$.

(c) Conclure.

Exercice 4. (Flot gradient, 10 points) Soient $F : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et $u_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\delta_k := 1/k$. On pose $u_0^k := u_0$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, on considère le problème de minimisation suivant

$$\inf_{v\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{|v - u_{i-1}^k|^2}{2\delta_k} + F(v) \right\}. \tag{1}$$

1. Montrer l'existence d'une unique solution au problème (1) notée $u_i^k \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$-\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{\delta_k} = F'(u_i^k).$$

3. Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$,

$$F(u_i^k) + \frac{|u_i^k - u_{i-1}^k|^2}{2\delta_k} \le F(u_{i-1}^k),$$

puis que

$$F(u_i^k) + \sum_{j=1}^{i} \frac{|u_j^k - u_{j-1}^k|^2}{2\delta_k} \le F(u_0).$$

4. On définit les interpolations constantes et affines par morceaux : pour tout $t \in [0, 1]$, on pose

$$\begin{cases} u_k(t) := u_i^k, \\ v_k(t) := \frac{t-(i-1)\delta_k}{\delta_k}(u_i^k - u_{i-1}^k) + u_{i-1}^k \end{cases} \qquad \text{si } t \in [(i-1)\delta_k, i\delta_k[\text{ et } i \in \{1, \ldots, k\},$$

et $u_k(1) = v_k(1) = u_k^k$.

(a) Montrer que la suite $(v_k')_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(]0, 1[)$ et en déduire que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1(]0, 1[)$.

(b) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(]0, 1[)$.

(c) En déduire l'existence de sous-suites $(u_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ ainsi que de fonctions $u \in H^1(]0, 1[)$ et $v \in L^\infty(]0, 1[)$ telles que $u_{\varphi(k)} \rightharpoonup u$ faible* dans $L^\infty(]0, 1[)$ et $v_{\varphi(k)} \rightharpoonup u$ faiblement dans $H^1(]0, 1[)$.

(d) Montrer que $u_k - v_k \to 0$ fortement dans $L^2(]0, 1[)$. En déduire que $u = v$ et que $u_{\varphi(k)} \to u$ fortement dans $L^2(]0, 1[)$.

5. (a) Montrer que u est une solution de

$$\begin{cases} -u'(t) = F'(u(t)) \quad \text{pour presque tout } t \in]0, 1[, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

(b) Montrer que $u \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ et que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$u'(t) = -F'(u(t)).$$

(c) En utilisant la convexité de F, montrer que cette solution est unique. En déduire qu'il n'est pas nécessaire d'extraire des sous-suites pour avoir les convergences des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

6. Etablir l'identité : pour tout $0 \le t_1 \le t_2 \le 1$,

$$F(u(t_2)) + \int_{t_1}^{t_2} |u'(s)|^2 \, ds = F(u(t_1)).$$