Université Paris-Sud
Master de Mathématiques et Applications

Calcul des Variations

Jean-François Babadjian

Table des matières

Introduction

Dans ce cours, nous allons nous intéresser à un problème classique du calcul des variations qui consiste à minimiser une fonctionnelle intégrale (ou énergie) de la forme

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx$$

parmi toutes les fonctions $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ telles que $u = u_0$ sur $\partial\Omega$, où $u_0 : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$ est une fonction (continue) donnée. Ici, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ est une donnée du problème appelée intégrande ou densité. Rappelons que si $u = (u_1, \dots, u_d) : \Omega \to \mathbb{R}^d$ est un champ de vecteurs, le gradient de u au point x, noté $\nabla u(x) \in \mathbb{R}^{d\times N}$ est une matrice à d lignes et N colonnes dont les coefficients sont donnés par

$$[\nabla u(x)]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) \quad \text{pour tout } 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq N.$$

Problème de la membrane élastique. Le graphe de la fonction $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ modélise le déplacement vertical d'une membrane qui occupe l'ouvert Ω au repos (penser à la peau d'un tambour). En première approximation, l'énergie élastique associée au déplacement u est égale à

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Cette fonctionnelle s'appelle énergie de Dirichlet et le problème consiste à minimiser cette énergie parmi tous les déplacements $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ qui coïncident avec u_0 sur $\partial\Omega$ (la position de la membrane est prescrite sur le bord).

Surfaces minimales. Si $u : \Omega \subset \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, l'aire du graphe $G_u := \{(x, u(x)) \in \mathbb{R}^N,\ x \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^N$ de u est donnée par l'expression

$$\int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx.$$

Le problème consiste à rechercher une surface représentable par le graphe d'une fonction, qui s'appuie sur le graphe de u_0 sur le bord et dont l'aire est minimale.

Variations et équation d'Euler-Lagrange

Comme dans le cas de la dimension finie, on peut s'intéresser dans un premier temps aux points critiques de la fonctionnelle F, i.e., les points u qui "annulent" la différentielle de F. Sous l'hypothèse que F est Gâteaux-différentiable (ce qui peut être assuré en supposant que f est différentiable par rapport à (s, ξ)), on peut faire des variations de la forme $u + t\varphi$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$. On montre alors que si u est un point de minimum de F, alors nécessairement

$$\frac{d}{dt} F(u + t\varphi)|_{t=0} = 0,$$

ce qui donne, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$,

$$\int_\Omega (\partial_s f(x, u, \nabla u) \cdot \varphi + \partial_\xi f(x, u, \nabla u) \cdot \nabla\varphi)\, dx = 0.$$

Autrement dit, si la fonction u est assez régulière, la formule de la divergence montre qu'elle est solution du système d'EDP quasi-linéaires

$$-\mathrm{div}[\partial_\xi f(x, u, \nabla u)] + \partial_s f(x, u, \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Si u n'est pas suffisamment régulière, il est possible d'interpréter cette équation au sens des distributions dans Ω. Cette condition d'optimalité d'ordre 1 s'appelle équation d'Euler-Lagrange. Son étude peut être menée à l'aide de techniques d'EDP.

Dans le cas de la membrane élastique, l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit

$$-\Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et se ramène à la détermination des fonctions harmoniques sur Ω dont la valeur sur le bord est prescrite.

Dans le cas des surfaces minimales, l'équation d'Euler-Lagrange prend la forme

$$\mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

où le membre de gauche n'est autre que la courbure moyenne de l'hypersurface G_u.

Malheureusement, en général (et c'est déjà le cas en dimension finie), un point critique n'est pas forcément un point de minimum global (il peut s'agir d'un extremum local ou même d'un point selle). Cette classification peut être clarifiée par l'étude de la stabilité des points critiques en déterminant le signe de la différentielle seconde. Dans tous les cas, cette approche nécessite beaucoup de régularité, ce qui n'est pas toujours souhaitable.

La méthode directe

La méthode directe en calcul des variations consiste à travailler directement sur la fonctionnelle F à minimiser. Un moyen de montrer l'existence de minima consiste à trouver des suites minimisantes compactes (pour une certaine topologie) et dont on peut extraire une sous-suite qui converge vers un minimum.

En dimension finie, le théorème de Bolzano-Weierstrass assure qu'une suite est compacte si et seulement si elle est bornée. Il est bien connu que ceci est en général faux en dimension infinie (le théorème de Riesz montre que la boule unité fermée d'un espace de Banach n'est jamais compacte). Par contre, il est possible d'affaiblir la topologie pour assurer la (séquentielle) compacité des suites bornées, par exemple dans les espaces de Hilbert ou, plus généralement, dans les espaces de Banach réflexifs. Ceci justifie partiellement pourquoi il est préférable, dans un premier temps, d'abandonner les espaces de fonctions continûment différentiables au profit des espaces Sobolev qui jouissent de bonnes propriétés topologiques, notamment celles liées à la topologie faible.

Pour montrer qu'un point d'accumulation d'une suite minimisante est un minimum, une condition naturelle sur la fonctionnelle à minimiser est la semi-continuité inférieure. Cette propriété se traduit par des conditions de type convexité sur la densité f par rapport à la variable ∇u. L'un des objets de ce cours sera d'introduire diverses notions généralisées de convexité sur f qui assurent la semi-continuité inférieure (dans une topologie adéquate) de F.

En l'absence de semi-continuité inférieure de la fonctionnelle à minimiser on ne peut pas s'attendre à l'existence de minimiseurs, du moins à l'aide de la méthode directe. Il est alors naturel de considérer l'enveloppe semi-continue inférieurement de F, i.e., la plus grande fonctionnelle semi-continue inférieurement plus petite que F. En notant cette nouvelle fonctionnelle $\overline{F}$, on aura alors par construction que les suites minimisantes de F convergeront vers un minimum de $\overline{F}$ et

$$\inf F = \min \overline{F}.$$

Une question importante consiste alors à déterminer cette fonctionnelle $\overline{F}$, également appelée relaxée de F.

Ce problème est un cas particulier de la Γ-convergence, dont l'objet concerne l'étude et la stabilité de suites de problèmes de minimisation. Si $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une famille de fonctionnelles et u_ε un minimiseur de F_ε à $\varepsilon > 0$ fixé, on cherche alors à introduire un mode de convergence des fonctionnelles F_ε qui assure la convergence des minimiseurs de F_ε ainsi que de la valeur minimale. Autrement dit, on définira la Γ-limite de F_ε (lorsqu'elle existe) comme étant une fonctionnelle $\overline{F}$ telle que

$$u_\varepsilon \in \arg\min F_\varepsilon \to u \in \arg\min \overline{F}, \quad \min F_\varepsilon = F_\varepsilon(u_\varepsilon) \to \overline{F}(u) = \min \overline{F}.$$

Nous démontrerons que, sous certaines, hypothèses, la classe des fonctionnelles intégrales est stable par Γ-convergence.

Nous étudierons en détails trois applications de cette propriété de stabilité. La première concerne la relaxation, i.e., la détermination de l'enveloppe semi-continue inférieurement de fonctionnelles intégrales. Ensuite, nous étudierons un problème classique d'homogénéisation périodique. Enfin nous verrons une application à la réduction de dimension en théorie des plaques élastiques.

Dans une dernière partie, nous nous intéresserons à la régularité des quasi-minimiseurs. Nous montrerons un résultat dû à Meyers qui assure une meilleure intégrabilité des quasi-minima d'une fonctionnelle intégrale. Il s'agit d'un résultat de portée très générale qui ne nécessite aucune régularité de la fonctionnelle.

Chapitre 1

La méthode directe en calcul des variations

Soit E un espace de Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle que l'on cherche à minimiser. L'idée de la méthode directe du calcul des variations consiste à considérer une suite minimisante. En effet, si l'on suppose que l'infimum

$$m := \inf_{u \in E} J(u)$$

est fini, la définition de l'infimum assure l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_{n \in E}$ d'éléments de E telle que $J(u_n) \to m$. Tout point d'accumulation (pour une topologie raisonnable) de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors un candidat pour être un point de minimum. Se posent alors deux problèmes :

— la compacité de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$;

— montrer que si u est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors $J(u) = m$.

Pour la compacité, il est en général difficile d'obtenir de telles propriétés dans un espace de Banach général de dimension infinie (penser au théorème d'Ascoli dans l'espace des fonctions continues, ou le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans les espaces de Lebesgue). Pour cette raison, nous privilègerons la convergence faible à la convergence forte (de la norme) car, au moins dans le cas où E est réflexif, nous savons que toute suite bornée admettra une sous-suite faiblement convergente. Quant à la bornitude de la suite minimisante, elle résultera généralement d'une propriété de coercivité de la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser.

En ce qui concerne le second problème, si l'on sait déjà que $u_n \to u$ en un certain sens, il suffit de montrer que $J(u) \leq \liminf_n J(u_n)$ ce qui nous conduit à la notion de semi-continuité inférieure.

1.1 Le rôle de la convexité

Définition 1.1.1. On dit que J est *semi-continue inférieurement* (*sci*) au point $u \in E$ si pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans E, alors

$$J(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(u_n).$$

On dit que J est sci sur E si elle est sci en tout point de E.

Il convient d'étendre cette définition pour la convergence faible.

Définition 1.1.2. On dit que J est *séquentiellement*[1] *faiblement sci* en $u \in E$ si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E, on a

$$J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n).$$

On dit que J est faiblement sci sur E si elle est faiblement sci en tout point de E.

Remarque 1.1.3. On a clairement que si J est faiblement sci, alors J est sci. La réciproque est fausse : il suffit de prendre $J(u) = 1 - \|u\|^2$ pour tout $u \in H$ un espace de Hilbert séparable. Alors J est continue donc sci (pour la convergence forte). En revanche, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H, alors $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H et

$$J(0) = 1 > 0 = \liminf_{n\to+\infty} J(e_n).$$

Dans le cas convexe, les deux notions de semi-continuité inférieure coïncident. On rappelle la définition suivante.

Définition 1.1.4. Une fonction $J : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est *convexe* si

$$J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v) \quad \text{pour tout } t \in [0,1] \text{ et tout } u, v \in E.$$

On dit que J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte dès lors que $u \neq v$ et $t \in]0,1[$.

Exemple 1.1.5.

1. les applications linéaires sont convexes ;
2. les normes $x \mapsto \|x\|$ sont convexes ;
3. dans un espace de Hilbert $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe car si $t \in]0,1[$ et $x \neq y$,

$$\begin{aligned}\|tx + (1-t)y\|^2 - t\|x\|^2 - (1-t)\|y\|^2 &= t(t-1)\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y\rangle - t(1-t)\|y\|^2 \\ &= -t(1-t)\|x-y\|^2 < 0.\end{aligned}$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 1.1.6. *Soit $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et sci. Alors J est faiblement sci.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E. Si $\liminf_n J(x_n) = +\infty$, le résultat est évident. Si $\alpha := \liminf_n J(u_n) < +\infty$, on considère une suite décroissante $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\alpha_k \searrow \alpha$. Comme J est convexe et sci, l'ensemble $\{J \leq \alpha_k\}$ est convexe et fermé. Par ailleurs, comme $\alpha_k > \alpha = \liminf_n J(u_n)$, il existe une sous-suite, notée $(u_{\sigma_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_{\sigma_k(n)} \in \{J \leq \alpha_k\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $u \in \{J \leq \alpha_k\}$. En effet, si $u \notin \{J \leq \alpha_k\}$, d'après le théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique, on pourrait séparer strictement le convexe fermé non vide $\{J \leq \alpha_k\}$ du convexe compact $\{u\}$. Il existerait donc un $L \in E' \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle L, u\rangle < t < \langle L, v\rangle \quad \text{pour tout } v \in \{J \leq \alpha_k\}.$$

En particulier pour $v = u_{\sigma_k(n)}$, on obtient que $\langle L, u\rangle < t < \langle L, u_{\sigma_k(n)}\rangle$, puis par passage à la limite quand $n \to +\infty$, $\langle L, u\rangle < t \leq \langle L, u\rangle$, ce qui est absurde. Par conséquent, $J(u) \leq \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui implique par passage à la limite quand $k \to +\infty$ que

$$J(u) \leq \alpha = \liminf_{n\to+\infty} J(u_n),$$

ce qui montre que J est faiblement sci. □

1. Dans la suite, nous écrirons plus simplement faiblement sci

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer un résultat général d'existence de solutions à des problèmes de minimisation.

Théorème 1.1.7 (Weierstrass). *Soient E un espace de Banach réflexif et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe, sci et coercive, i.e.,*

$$J(u) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|u\|_E \to +\infty.$$

Alors il existe un $\bar{u} \in E$ tel que $J(\bar{u}) \le J(v)$ pour tout $v \in E$. Si de plus J est strictement convexe, alors le point de minimum $\bar{u}$ est unique.

Démonstration. Comme J ne prend que des valeurs finies, alors nécessairement,

$$m := \inf_E J < +\infty.$$

Soit (u_n) une suite minimisante, i.e., $J(u_n) \to m$. Si, pour une sous-suite, $\|u_n\|_E \to +\infty$, alors d'après la coercivité de J, on aurait que $J(u_n) \to +\infty$ ce qui est impossible puisque $J(u_n) \to m < +\infty$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Banach réflexif E. Il existe donc une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{u} \in E$ tels que $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup \bar{u}$ faiblement dans E. Comme la fonctionnelle J est convexe et sci, elle est faiblement sci, et donc

$$J(\bar{u}) \le \liminf_{n\to+\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = m \le J(\bar{u}).$$

Il vient donc que $J(\bar{u}) = m$ ce qui montre que $\bar{u}$ est un point de minimum de J sur E.

Quant à l'unicité, si J est strictement convexe et $\bar{u}_0$ et $\bar{u}_1$ sont deux minima distincts de J sur E, alors

$$\inf_E J \le J\left(\frac{\bar{u}_0 + \bar{u}_1}{2}\right) < \frac{1}{2}J(\bar{u}_0) + \frac{1}{2}J(\bar{u}_1) = \inf_E J,$$

ce qui est absurde. On en déduit l'unicité du point de minimum. □

1.2 Application aux fonctionnelles intégrales

Définition 1.2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si $f(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^m$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $f(\cdot, z)$ est mesurable sur Ω pour tout $z \in \mathbb{R}^m$.

Lemme 1.2.2. *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $z : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. Alors la fonction $x \mapsto f(x, z(x))$ est mesurable.*

Démonstration. La fonction z étant mesurable, il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge vers z p.p. sur Ω. On peut alors trouver $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^m$ et des ensembles mesurables $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$ deux à deux disjoints tels que

$$z_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Par conséquent, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$f(x, z_n(x)) = \sum_{i=1}^{k} f(x, \alpha_i)\chi_{A_i}(x).$$

La fonction f étant de Carathéodory, on a que $x \mapsto f(x, \alpha_i)$ est mesurable. Par suite, $x \mapsto f(x, z_n(x))$ est mesurable comme produit et somme de fonctions mesurables. Comme $z_n(x) \to z(x)$, et $f(x, \cdot)$ est continue presque pour tout $x \in \Omega$, on en déduit que $f(x, z_n(x)) \to f(x, z(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$, ce qui montre que $x \mapsto f(x, z(x))$ est mesurable comme limite p.p. de fonctions mesurables. $\square$

Théorème 1.2.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de Carathéodory tels que*

— *$f(x, \cdot)$ est convexe pour presque tout $x \in \Omega$;*

— *il existe $1 \leq p < \infty$, $a \in L^1(\Omega)$, $b \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ et tels que*

$$f(x, \xi) \geq a(x) + b(x) \cdot \xi \quad \textit{p.p. tout } x \in \Omega \textit{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^m.$$

Alors la fonctionnelle $F : L^p(\Omega; \mathbb{R}^m) \to [0, +\infty]$ définie par

$$F(z) = \int_\Omega f(x, z(x))\, dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Démonstration. L'hypothèse de convexité sur f implique que la fonctionnelle F est convexe. Montrons qu'elle fortement semi-continue inférieurement dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$ telle que $z_n \to z$ fortement dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Si $\liminf_n F(z_n) = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer que $\liminf_n F(z_n) < +\infty$ et on peut alors extraire une sous-suite $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $z_{n_k} \to z$ p.p. sur Ω et

$$\liminf_{n \to +\infty} F(z_n) = \lim_{k \to +\infty} F(z_{n_k}).$$

D'après le lemme de Fatou, il vient

$$\liminf_{k \to +\infty} \int_\Omega (f(x, z_{n_k}) - b \cdot z_{n_k} - a)\, dx$$
$$\geq \int_\Omega \liminf_{k \to +\infty} (f(x, z_{n_k}) - b \cdot z_{n_k} - a)\, dx = \int_\Omega (f(x, z) - b \cdot z - a)\, dx,$$

où l'on a utilisé la continuité de $f(x, \cdot)$ p.p. tout $x \in \Omega$. Par ailleurs, comme $z_{n_k} \to z$ dans $L^p(\Omega)$, on en déduit que

$$\liminf_{k \to +\infty} \int_\Omega (f(x, z_{n_k}) - b \cdot z_{n_k} - a)\, dx \leq \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega f(x, z_{n_k})\, dx - \int_\Omega (b \cdot z + a)\, dx,$$

ce qui implique que

$$\liminf_{n \to +\infty} F(z_n) = \lim_{k \to +\infty} \int_\Omega f(x, z_{n_k})\, dx \geq F(z).$$

La conclusion du théorème est alors une conséquence immédiate du Théorème 1.1.6. $\square$

Corollaire 1.2.4. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f : \Omega \times \mathbb{R}^{d \times N} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de Carathéodory tels que*

— *$f(x, \cdot)$ est convexe pour presque tout $x \in \Omega$;*

— *il existe $1 \leq p < \infty$, $a \in L^1(\Omega)$, $b \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^{d \times N})$ tels que*

$$f(x, \xi) \geq a(x) + b(x) \cdot \xi \quad \textit{p.p. tout } x \in \Omega \textit{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d \times N}.$$

Alors la fonctionnelle $F : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ *définie par*

$$F(u) = \int_\Omega f(x, \nabla u(x))\, dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

Notons que les résultats de semi-continuité précédents ne requièrent aucune autre hypothèse que celle de convexité et de borne inférieure. Dans les résultats qui suivent nous intéressons à des résultats d'existence de problèmes de minimisation pour lesquels, il est nécessaire de faire des hypothèses de croissance et/ou de coercivité afin d'assurer la compacité des suites minimisantes.

Théorème 1.2.5. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné et* $f : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ *et* $g : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *des fonctions de Carathéodory. On suppose que :*

— $f(x, \cdot)$ *est convexe pour presque tout* $x \in \Omega$ *;*

— *il existe* $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ *et* $1 < p < \infty$ *tels que p.p. tout* $x \in \Omega$ *et pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$,

$$\lambda |\xi|^p \leq f(x, \xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p);$$

— *il existe* $1 < p < \infty$, a_0, $a_1 \in L^1(\Omega)$ *et* $b \geq 0$ *tels que p.p. tout* $x \in \Omega$ *et pour tout* $z \in \mathbb{R}^d$,

$$a_0(x) \leq g(x, z) \leq a_1(x) + b|z|^p.$$

Si $u_0 \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, *alors il existe une solution* $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ *au problème de Dirichlet*

$$\inf_{v \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)} \left\{ J(v) := \int_\Omega f(x, \nabla v)\, dx + \int_\Omega g(x, v)\, dx \right\}.$$

Démonstration. Tout d'abord, en notant α l'infimum de J sur $u_0 + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, on a d'après les hypothèses de croissance faites sur f et g que

$$\int_\Omega a_0\, dx \leq \alpha \leq J(u_0) \leq \Lambda \int_\Omega (1 + |\nabla u_0|^p)\, dx + \int_\Omega (a_1 + b|u_0|^p)\, dx,$$

ce qui montre que $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante, i.e. $J(u_n) \to \alpha$. Pour n assez grand, on a alors que $J(u_n) \leq \alpha + 1$ et donc, d'après les hypothèses de coercivité faites sur f et g,

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u_n|^p\, dx + \int_\Omega a_0\, dx \leq \alpha + 1.$$

Comme $u_n - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et Ω est borné, l'inégalité de Poincaré implique que

$$\|u_n - u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u_n - \nabla u_0\|_{L^p(\Omega)},$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace réflexif $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ (rappelons que $1 < p < \infty$). Quitte à extraire une sous-suite (toujours notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), on peut donc supposer que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et donc,

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x, \nabla u_n)\, dx \geq \int_\Omega f(x, \nabla u)\, dx.$$

Comme $u_n - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ qui est (faiblement) fermé dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, on en déduit que $u - u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. De plus, comme $u_n - u_0 \rightharpoonup u - u_0$ faiblement dans $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, par injection compacte de Rellich, on peut également supposer que, pour cette même sous-suite, on a $u_n \to u$ fortement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. La réciproque de la convergence dominée montre alors que, quitte à extraire de nouveau une sous-suite, $u_n \to u$ presque partout dans Ω et $|u_n| \le h \in L^p(\Omega)$. La fonction g étant de Carathéodory, on en déduit que $g(x,u_n(x)) \to g(x,u(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$, et $|g(\cdot,u_n)| \le \max\{|a_0|, |a_1| + b|u_n|^p\} \le \max\{|a_0|, |a_1| + b|h|^p\} \in L^1(\Omega)$. Le théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g(x,u_n)\,dx = \int_\Omega g(x,u)\,dx,$$

soit

$$\alpha = \liminf_{n\to+\infty} J(u_n) \ge J(u)$$

avec $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Ceci montre bien que u est un minimiseur de J sur $u_0+W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. □

Remarque 1.2.6. 1. Le résultat précédent est faux dans $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ car une suite bornée dans cet espace n'est en général pas séquentiellement compacte dans $W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ mais dans l'espace plus large $BV(\Omega;\mathbb{R}^d)$ des fonctions à variation bornée.

2. Notons qu'aucune hypothèse de type convexité sur g n'est nécessaire pour assurer la semi-continuité de J. C'est dû au fait qu'il s'agit d'un terme d'ordre inférieur pour lequel l'injection compacte de Rellich assure la continuité de la fonctionnelle associée.
3. Les hypothèses de croissance sur f et g sont utilisées pour montrer que la fonctionnelle J est bien définie sur $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et que l'infimum n'est pas $+\infty$.
4. L'hypothèse de coercivité sur f et le fait que g est bornée inférieurement assurent la bornitude des suites minimisantes.

Les résultats précédents peuvent se généraliser à la situation suivante où f est une fonction de x, u et ∇u, que nous admettrons (voir [4, Theorem 3.3.4] et [4, Theorem 3.4.1]).

Théorème 1.2.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f : \Omega \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times N}) \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory tels que*

— *$f(x,z,\cdot)$ est convexe pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ et presque tout $x \in \Omega$;*

— *il existe $1 \le p < \infty$, $a \in L^1(\Omega)$, $b \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ tels que*

$$f(x,z,\xi) \ge a(x) + b(x)\cdot\xi \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } (z,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times N}.$$

Alors la fonctionnelle $F : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))\,dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.2.8. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f : \Omega \times (\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times N}) \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. On suppose que :*

— *$f(x,z,\cdot)$ est convexe pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^d$;*

— *il existe $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$, $1 < p < \infty$, a_0, $a_1 \in L^1(\Omega)$ tels que pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $(z,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times N}$,*

$$a_0(x) + \lambda|\xi|^p \le f(x,z,\xi) \le \Lambda(a_1(x) + |z|^p + |\xi|^p);$$

Si $u_0 \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, alors il existe une solution $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ au problème de Dirichlet

$$\inf_{v\in u_0+W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_\Omega f(x,v(x),\nabla v(x))\,dx \right\}.$$

Chapitre 2

Notions généralisées de convexité

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à étabir des conditions nécessaires et/ou suffisantes de faible semi-continuité inférieure pour des fonctionnelles intégrale du type

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne. Une grande partie des résultats présentés peuvent se généraliser à des fonctionnelles dépendant explicitement de x et u. Pour ne pas alourdir la présentation, nous allons nous restreindre au cas de fonctionnelles autonomes où f ne dépend uniquement que de ∇u.

L'outil de base de ce chapitre est le résultat suivant.

Théorème 2.0.9 (Riemann-Lebesgue). *Soient $\{e_1, \ldots, e_N\}$ une base de $\mathbb{R}^N$, $Y = \Pi_{i=1}^N (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^N$ un cube dans cette base et $u \in L^p_{\rm loc}(\mathbb{R}^N)$ (avec $1 \le p \le \infty$) une fonction Y-périodique, i.e., $u(x + (b_i - a_i)e_i) = u(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on définit $u_\varepsilon(x) := u(\frac{x}{\varepsilon})$. Alors*

$$u_\varepsilon \rightharpoonup \fint_Y u(y)\, dy$$

faiblement dans $L^p(\Omega)$ (faible dans $L^\infty(\Omega)$ si $p = \infty$) pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.*

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que $Y = (0,1)^N$.

Etape 1. Supposons d'abord que $p = \infty$. On a que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u\|_{L^\infty(Y)}$ de sorte que l'on peut extraire une sous-suite $(u_{\varepsilon_j})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{\varepsilon_j} \rightharpoonup \bar{u}$ faible* dans $L^\infty(\Omega)$ où $\bar{u} \in L^\infty(\Omega)$. Montrons que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\bar{u}(x) = \int_Y u(y)\, dy,$$

ce qui montrera que la limite faible* est à la fois indépendante de la sous-suite et de l'ouvert Ω.

Soit $Q \subset \Omega$ un cube dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnés et sont de longueur l. Pour j assez grand, on a que $\varepsilon_j < l$. En posant $m_j = ([l/\varepsilon_j] - 1)^N$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière, on a

$$\frac{1}{\varepsilon_j} Q = \bigcup_{i=1}^{m_j} (a_i^j + Y) + E_j,$$

où $a_i^j \in \mathbb{Z}^N$ et $E_j \subset Q$ est un ensemble tel que

$$|E_j| = \left| \frac{1}{\varepsilon_j} Q \setminus \bigcup_{i=1}^{m_j} (a_i^j + Y) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon_j} Q \right| - \left| \bigcup_{i=1}^{m_j} (a_i^j + Y) \right| = \left(\frac{l}{\varepsilon_j} \right)^N - m_j.$$

Comme $m_j \geq ((l/\varepsilon_j) - 2)^N = (l/\varepsilon_j)^N (1 - 2\varepsilon_j/l)^N = (l/\varepsilon_j)^N (1 - 2N\varepsilon_j/l + O(\varepsilon_j^2))$, on en déduit que $|E_j| = 2N(l/\varepsilon_j)^{N-1} + O(\varepsilon_j^{2-N})$. Or

$$\begin{aligned} \left| \int_Q \left(u_{\varepsilon_j}(x) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dx \right| &= \left| \varepsilon_j^N \int_{\frac{1}{\varepsilon_j} Q} \left(u(z) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dz \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m_j} \left| \varepsilon_j^N \int_{a_i^j + Y} \left(u(z) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dz \right| \\ &\quad + \left| \varepsilon_j^N \int_{E_j} \left(u(z) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dz \right|. \end{aligned}$$

Comme u est Y-périodique et $a_i^j \in \mathbb{Z}^N$, on a

$$\begin{aligned} \int_{a_i^j + Y} \left(u(z) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dz &= \int_Y \left(u(z - a_i^j) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dz \\ &= \int_Y \left(u(z) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dz = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $u \in L^\infty(Y)$,

$$\left| \varepsilon_j^N \int_{E_j} \left(u(z) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dz \right| \leq 2\varepsilon_j^N |E_j| \|u\|_{L^\infty(Y)} \leq C\varepsilon_j \to 0.$$

En regroupant les estimations précédentes et en passant à la limite quand $j \to +\infty$, on en déduit que pour tout cube $Q \subset \Omega$.

$$\int_Q \left(\bar{u}(x) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dx = 0.$$

Comme n'importe quel ouvert U de Ω peut s'écrire comme une union dénombrable de cubes deux à deux disjoints, on en déduit que pour tout ouvert $U \subset \Omega$,

$$\int_U \left(\bar{u}(x) - \fint_Y u(y)\,dy \right) dx = 0.$$

Ceci montre que $\bar{u} = \fint_Y u(y)\,dy$ p.p. sur Ω. Comme la limite est indépendente de la sous-suite, ceci implique que c'est en fait toute la suite $u_\varepsilon \rightharpoonup \fint_Y u(y)\,dy$ faible* dans $L^\infty(\Omega)$.

Etape 2. Supposons à présent que $1 \leq p < \infty$. Soit $u^k := \max(\min(u, k), -k)$ la troncature de u au niveau k. Comme u est Y-périodique, alors u^k reste également Y-périodique et d'après l'étape 1, $u_\varepsilon^k \rightharpoonup \fint_Y u^k(y)\,dy$ faible* dans $L^\infty(\Omega)$ (et donc également faiblement dans $L^p(\Omega)$ puisque Ω est borné). Par ailleurs, en notant $I_\varepsilon = \{a \in \mathbb{Z}^N : (a + Y) \cap \frac{1}{\varepsilon}\Omega \neq \emptyset\}$, alors $\#(I_\varepsilon) \leq C/\varepsilon^N$ et

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u_\varepsilon^k - u_\varepsilon|^p\,dx = \varepsilon^N \int_{\frac{1}{\varepsilon}\Omega} |u^k - u|^p\,dx &\leq \varepsilon^N \sum_{a \in I_\varepsilon} \int_{a+Y} |u^k - u|^p\,dx \\ &= \varepsilon^N \#(I_\varepsilon) \int_Y |u^k - u|^p\,dx \leq C \int_Y |u^k - u|^p\,dx, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que u^k et u sont Y-périodiques. Pour tout $v \in L^{p'}(\Omega)$, on écrit que

$$\int_\Omega \left(u_\varepsilon - \int_Y u(y)\,dy\right) v\,dx = \int_\Omega \left(u_\varepsilon^k - \int_Y u(y)\,dy\right) v\,dx + \int_\Omega (u_\varepsilon - u_\varepsilon^k) v\,dx.$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, il vient que

$$\begin{aligned}\limsup_{\varepsilon\to 0} & \left| \int_\Omega \left(u_\varepsilon - \int_Y u(y)\,dy\right) v\,dx \right| \\ & \leq \left| \left(\int_Y u^k(y)\,dy - \int_Y u(y)\,dy \right) \right| \int_\Omega |v|\,dx + C\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u^k - u\|_{L^p(Y)}.\end{aligned}$$

Par convergence dominée, $u^k \to u$ dans $L^p(Y)$. Par passage à la limite quand $k \to \infty$ dans l'estimation précédente, on en déduit que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \left(u_\varepsilon - \int_Y u(y)\,dy\right) v\,dx = 0$$

ce qui montre bien que $u_\varepsilon \rightharpoonup \int_Y u(y)\,dy$ faiblement dans $L^p(\Omega)$. □

2.1 Convexité

Grâce au Théorème de Riemann-Lebesgue, nous allons pouvoir en déduire des conditions nécessaires de semi-continuité inférieure pour les fonctionnelles intégrale.

Théorème 2.1.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée inférieurement. Si la fonctionnelle $F : L^p(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par*

$$F(z) = \int_\Omega f(z(x))\,dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$, alors f est convexe.

Démonstration. Soient $\lambda \in [0,1]$, A et $B \in \mathbb{R}^m$. On définit la fonction $z : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^m$ par

$$z(x) := \begin{cases} A & \text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leq x_1 < n + \lambda, \\ B & \text{si } n \in \mathbb{Z} \text{ et } n + \lambda \leq x_1 < n+1 \end{cases}$$

qui est $(0,1)^N$-périodicité. D'après le Théorème de Riemann-Lebesgue, la suite $z_\varepsilon := z(\cdot/\varepsilon)$ convergence faiblement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$ vers

$$\int_{(0,1)^N} z(y)\,dy = \lambda A + (1-\lambda)B.$$

Par hypothèse, on a donc que

$$|\Omega| f(\lambda A + (1-\lambda)B) = \int_\Omega f\left(\int_{(0,1)^N} z(y)\,dy\right) dx \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f(z_\varepsilon)\,dx.$$

Comme la fonction $f \circ z \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est $(0,1)^N$-périodique, une nouvelle application du Théorème de Riemann-Lebesgue montre que $f(z_\varepsilon) = (f\circ z)(\cdot/\varepsilon)) \rightharpoonup \int_{(0,1)^N} f(z(y))\,dy = \lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)$ faible* dans $L^\infty(\Omega)$, soit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f(z_\varepsilon)\,dx = |\Omega|(\lambda f(A) + (1-\lambda) f(B)).$$

En regroupant les relations précédentes, on en déduit que $f(\lambda A+(1-\lambda)B) \leq \lambda f(A)+(1-\lambda)f(B)$, i.e., que f est convexe. □

En regroupant les Théorèmes 1.2.3 et 2.1.1, on constate que la convexité de f est une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle intégrale $F : L^p(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(z) = \int_\Omega f(z(x))\,dx$$

soit faiblement semi-continue inférieurement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

A l'aide de la méthode générale employée dans la preuve du Théorème 2.1.1, nous allons à présent nous intéresser aux fonctionnelles intégrales qui dépendent de gradients en distinguant le cas scalaire ($d = 1$) du cas vectoriel ($d \geq 2$).

Commençons par le cas scalaire. Notons que, dans ce cas, un élément de $\mathbb{R}^{d\times N}$ n'est autre qu'un vecteur (ligne) de $\mathbb{R}^N$.

Théorème 2.1.2. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée inférieurement. Si la fonctionnelle $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par*

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))\,dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors f est convexe.

Démonstration. Soient $\lambda \in [0,1]$, A et $B \in \mathbb{R}^N$. On définit la fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par

$$u(x) := \begin{cases} A\cdot x - (1-\lambda)n|A-B| & \text{si } n\in\mathbb{Z},\ n \leq \frac{A-B}{|A-B|}\cdot x < n+\lambda, \\ B\cdot x + (1+n)\lambda|A-B| & \text{si } n\in\mathbb{Z},\ n+\lambda \leq \frac{A-B}{|A-B|}\cdot x < n+1. \end{cases}$$

Notons que $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et son gradient

$$\nabla u(x) = \begin{cases} A & \text{si } n\in\mathbb{Z},\ n \leq \frac{A-B}{|A-B|}\cdot x < n+\lambda, \\ B & \text{si } n\in\mathbb{Z},\ n+\lambda \leq \frac{A-B}{|A-B|}\cdot x < n+1 \end{cases}$$

est Y-périodique, où Y est un cube avec une face orthogonale au vecteur $A-B$ et dont la longueur des côtés est égale à 1.

On pose $u_\varepsilon(x) = \varepsilon u(x/\varepsilon)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varepsilon > 0$. Un calcul immédiat montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|u_\varepsilon(x) - (\lambda A + (1-\lambda)B)x| \leq \lambda(1-\lambda)|A-B|\varepsilon,$$

ce qui montre que $u_\varepsilon \to (\lambda A+(1-\lambda)B)\cdot x$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Par ailleurs, comme $\nabla u_\varepsilon \in \{A,B\}$ p.p. dans Ω, on en déduit que la suite $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ ce qui montre que $u_\varepsilon \rightharpoonup (\lambda A + (1-\lambda)B)\cdot x$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Par semi-continuité inférieure, il vient

$$|\Omega| f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f(\nabla u_\varepsilon(x))\,dx = \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f\left(\nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\,dx.$$

Comme la fonction $f\circ\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est $(0,1)^N$-périodique, une nouvelle application du Théorème de Riemann-Lebesgue montre que $f(\nabla u_\varepsilon) = (f\circ\nabla u)(\cdot/\varepsilon)) \rightharpoonup \int_{(0,1)^N} f(\nabla u(y))\,dy = \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$, ce qui montre que

$$|\Omega| f(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f\left(\nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\,dx = |\Omega|(\lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)),$$

et donc la convexité de f. □

En regroupant le Corollaire 1.2.4 et le Théorème 2.1.2, on en déduit que dans le cas scalaire ($d = 1$) la convexité de f est une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle intégrale $F : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))\, dx$$

soit faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega)$. Le cas vectoriel est autrement plus compliqué. En effet, la convexité est loin d'être une condition nécessaire comme l'atteste l'exemple ci-dessous.

Exemple 2.1.3. On se place dans le cas $N = d = 2$ et $p > 2$. On pose $Q = (0,1)^2$ et on considère la fonctionnelle intégrale $F : W^{1,p}(Q;\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \int_Q \det\nabla u\, dx.$$

Tout d'abord, remarquons que $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mapsto \det\xi$ n'est pas convexe car c'est une forme quadratique non positive. Pourtant, nous allons montrer que la fonctionnelle F est faiblement continue dans $W^{1,p}(Q;\mathbb{R}^2)$.

Tout d'abord, remarquons que si $u : Q \to \mathbb{R}^2$ est une fonction régulière, alors on a

$$\det\nabla u = \operatorname{div}(u_1\partial_2 u_2, -u_1\partial_1 u_2).$$

Par intégration, on obtient, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$,

$$\int_Q \varphi\det\nabla u\, dx = -\int_Q (u_1\partial_2 u_2\partial_1\varphi - u_1\partial_1 u_2\partial_2\varphi)\, dx.$$

Par densité, cette égalité reste valide si $u \in W^{1,p}(Q;\mathbb{R}^2)$.

Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(Q;\mathbb{R}^2)$, par injection compacte de Rellich, on a $u_n \to u$ fortement dans $L^p(Q;\mathbb{R}^2)$. Comme $p > 2$, on en déduit que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q)$,

$$\int_Q \varphi\det\nabla u_n\, dx \to \int_Q \varphi\det\nabla u\, dx,$$

i.e., $\det\nabla u_n \rightharpoonup \det\nabla u$ faible* dans $\mathcal{D}'(Q;\mathbb{R}^2)$. Par ailleurs, comme le déterminant en dimension 2 est à croissance quadratique, on en déduit $\|\det\nabla u_n\|_{L^{p/2}(Q)} \le C\|\nabla u_n\|^2_{L^p(Q)} \le C$ et comme $p/2 > 1$, on en déduit que $\det\nabla u_n \rightharpoonup \det\nabla u$ faiblement dans $L^{p/2}(Q)$. Par conséquent,

$$\int_Q \det\nabla u\, dx = \lim_{n\to+\infty}\int_Q \det\nabla u_n\, dx.$$

2.2 Rang-1-convexité

Pour comprendre pourquoi la preuve du Théorème 2.1.2 ne fonctionne pas quand $d \ge 2$, il convient de construire une fonction dont le gradient est constant par morceaux. Considérons pour simplifier le cas où le gradient ne peut prendre que deux valeurs données par des matrices A et $B \in \mathbb{R}^{d\times N}$.

Supposons pour fixer les idées que $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ est une fonction Lipschitz telle que $\nabla u = A$ sur $\{x_1 < 0\}$ et $\nabla u = B$ sur $\{x_1 > 0\}$. Par intégration, on en déduit que

$$u(x) = \begin{cases} Ax + a & \text{si } x_1 < 0,\\ Bx + b & \text{si } x_1 > 0.\end{cases}$$

Comme u est continue à l'interface $\{x_1 = 0\}$, on doit avoir $A(0, x_2, \ldots, x_N) + a = B(0, x_2, \ldots, x_N) + b$ pour tout $(x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}$, ce qui montre que $a = b$ et

$$(A - B)(0, x_2, \ldots, x_N) = 0 \quad \text{pour tout } (x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

En notant $(A - B)^{(j)}$ la j-ème colonne de la matrice $A - B$, on a alors

$$\sum_{j=2}^{N} x_j (A - B)^{(j)} = 0 \quad \text{pour tout } (x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{N-1},$$

ce qui implique que $(A - B)^{(2)} = \cdots = (A - B)^{(N)} = 0$. Par conséquent, la matrice $A - B$ est de rang 1 et on peut l'écrire $A - B = A^{(1)} \otimes e_1$ (noter que e_1 est un vecteur normal à l'interface $\{x_1 = 0\}$.

Cette discussion motive la définition suivante.

Définition 2.2.1. Une fonction $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite *rang-1-convexe* si pour toutes matrices A et $B \in \mathbb{R}^{d\times N}$ avec $\mathrm{rang}(A - B) \leq 1$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda A + (1 - \lambda)B) \leq \lambda f(A) + (1 - \lambda)f(B).$$

Remarque 2.2.2. Si A et $B \in \mathbb{R}^{d\times N}$ satisfont $\mathrm{rang}(A - B) \leq 1$, alors on peut écrire $B - A = a \otimes b$ avec $a \in \mathbb{R}^d$ et $b \in \mathbb{R}^N$. La rang-1- convexité est alors équivalente à la convexité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto f(A + ta \otimes b)$. Si, de plus, f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors la rang-1-convexité est équivalente à la *condition de Legendre-Hadamard*

$$D^2 f(A)(a \otimes b)(a \otimes b) \geq 0$$

qui assure l'ellipticité de l'équation d'Euler-Lagrange associée au problème de minimisation de $u \mapsto F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx$.

Remarque 2.2.3. Bien évidemment, toute fonction convexe est rang-1-convexe et les deux notions coïncident dans le cas scalaire, i.e., $N = 1$ ou $d = 1$. Cependant, dans le cas vectoriel ($N \geq 2$ et $d \geq 2$) ces deux notions sont distinctes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.2.4. Ce premier exemple a été introduit par Dacorogna. On considère les matrices de rang 1 suivantes

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $\det(\xi_i - \xi_j) \neq 0$ pour tout $1 \leq i \neq j \leq 3$. On pose alors

$$f(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}.$$

On a que pour tout ξ et $\eta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec $\mathrm{rang}(\xi - \eta) \leq 1$ et tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda\xi + (1 - \lambda)\xi) \leq \lambda f(\xi) + (1 - \lambda)f(\eta).$$

Si $\xi \notin \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ ou $\eta \notin \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, alors le membre de droite est $+\infty$ et l'inégalité est évidente. Si $\xi \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ et $\eta \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ avec $\xi \neq \eta$, alors $\det(\xi - \eta) \neq 0$ et donc la matrice $\xi - \eta$ n'est pas de rang 1, ce qui interdit ce cas. Enfin $\xi \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ et $\eta \in \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ avec $\xi = \eta$, l'inégalité est évidente.

Par ailleurs, on a d'une part $f(\frac{1}{3}\xi_1+\frac{1}{3}\xi_2+\frac{1}{3}\xi_3) = +\infty$ et, d'autre part, $\frac{1}{3}f(\xi_1)+\frac{1}{3}f(\xi_2)+\frac{1}{3}f(\xi_3) = 0$, ce qui montre que

$$f\left(\frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3\right) > \frac{1}{3}f(\xi_1) + \frac{1}{3}f(\xi_2) + \frac{1}{3}f(\xi_3),$$

et donc que f n'est pas convexe.

Exemple 2.2.5. Si l'on s'intéresse à des fonctions à valeurs finies, l'exemple suivant dû à Dacorogna et Marcellini (voir [4, Proposition 4.1.13 and 4.1.14]) fournit une fonction $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(\xi) = |\xi|^4 - a(\det\xi)^2 - b|\xi|^2\det\xi,$$

qui est rang-1-convexe quand $|b| \le 4$ et $8a + 3b^2 \le 16$. Par ailleurs, si $a = 0$ et $b = 4/\sqrt{3}$, f n'est pas convexe.

Théorème 2.2.6. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée inférieurement. Si la fonctionnelle $F : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ définie par*

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))\,dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, alors f est rang-1-convexe.

Démonstration. Soient $\lambda \in [0,1]$, A et $B \in \mathbb{R}^{d\times N}$ tels que $A - B = a \otimes b$ avec $a \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^N$ et $|b| = 1$. On définit la fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^d$ par

$$u(x) := \begin{cases} Bx + a(b\cdot x) - (1-\lambda)na & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ n \le b\cdot x < n+\lambda, \\ Bx + (1+n)\lambda a & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ n+\lambda \le b\cdot x < n+1. \end{cases}$$

Notons que $u \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^d)$ et son gradient

$$\nabla u(x) = \begin{cases} B + a\otimes b = A & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ n \le b\cdot x < n+\lambda, \\ B & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ n+\lambda \le b\cdot x < n \end{cases}$$

est Y-périodique, où Y est un cube avec une face orthogonale au vecteur b et dont la longueur des côtés est égale à 1.

On pose $u_\varepsilon(x) = \varepsilon u(x/\varepsilon)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varepsilon > 0$. Un calcul immédiat montre que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|u_\varepsilon(x) - (\lambda A + (1-\lambda)B)x| \le \lambda(1-\lambda)|a|\varepsilon,$$

ce qui montre que $u_\varepsilon \to (\lambda A + (1-\lambda)B)x$ fortement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, comme $\nabla u_\varepsilon \in \{A, B\}$ p.p. dans Ω, on en déduit que la suite $(\nabla u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ ce qui montre que $u_\varepsilon \rightharpoonup (\lambda A + (1-\lambda)B)x$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Par semi-continuité inférieure, il vient

$$|\Omega| f(\lambda A + (1-\lambda)B) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f(\nabla u_\varepsilon(x))\,dx = \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f\left(\nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\,dx.$$

Comme la fonction $f\circ\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ est $(0,1)^N$-périodique, une nouvelle application du Théorème de Riemann-Lebesgue montre que $f(\nabla u_\varepsilon) = (f\circ\nabla u)(\cdot/\varepsilon)) \rightharpoonup \int_{(0,1)^N} f(\nabla u(y))\,dy = \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)$, ce qui montre que

$$|\Omega| f(\lambda A + (1-\lambda)B) \le \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega f\left(\nabla u\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\,dx = |\Omega|(\lambda f(A) + (1-\lambda)f(B)),$$

et donc la rang-1-convexité de f. □

La rang-1-convexité est donc une condition nécessaire de semi-continuité inférieure. La question naturelle qui se pose est si c'est également une condition suffisante. Malheureusement ceci est faux en général.

Exemple 2.2.7. On considère le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{3\times 2}$

$$L = \{r(e_1 \otimes \eta_1) + s(e_2 \otimes \eta_2) + te_3 \otimes (\eta_1 + \eta_2) : \ r, s, t \in \mathbb{R}\},$$

où $\{e_1, e_1, e_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\eta_1, \eta_2\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On définit la fonction $g : L \to \mathbb{R}$ par

$$g(r(e_1 \otimes \eta_1) + s(e_2 \otimes \eta_2) + te_3 \otimes (\eta_1 + \eta_2)) = rst \quad \text{pour tout } r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Si P désigne la projection orthogonale sur L, on définit

$$f(\xi) := g(P(\xi)) + \frac{1}{100}(|\xi|^2 + |\xi|^4) + k|\xi - P(\xi)|^2.$$

On montre alors que f est rang-1-convexe pour un certain $k > 0$, mais que la fonctionnelle intégrale

$$u \mapsto \int_{(0,1)^2} f(\nabla u)\, dx$$

n'est pas faible* semi-continue inférieurement dans $W^{1,\infty}((0,1)^2; \mathbb{R}^3)$. Cet exemple se généralise au cas où $N \geq 2$ et $d \geq 3$. Néanmoins, il s'agit d'un problème ouvert dans le cas $N = d = 2$.

Terminons cette section par un résultat de continuité des fonctions rang-1-convexes à croissance polynômiale qui sont un cas particulier de fonctions convexes par rapport à chacune de leurs variables.

Proposition 2.2.8. *Soit $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction convexe par rapport à chacune de ses variables et telle que*

$$|f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^p) \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^m,$$

où $C > 0$ et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante $C' > 0$ qui ne dépend que de C, N, p et d telle que

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leq C'(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1})|\xi - \eta| \quad \textit{pour tout } \xi,\, \eta \in \mathbb{R}^m.$$

Démonstration. On pose $z_0 = \xi$ et, pour tout $1 \leq k \leq m$, $z_k = \xi + \sum_{i=1}^k (\eta_j - \xi_i)e_i$ de sorte que

$$f(\eta) - f(\xi) = \sum_{k=1}^m (f(z_k) - f(z_{k-1})).$$

Or

$$f(z_k) - f(z_{k-1}) = f(z_{k-1} + (\eta_k - \xi_k)e_k) - f(z_{k-1}) = g(\eta_k - \xi_k) - g(0),$$

où $g(t) := f(z_{k-1} + te_k)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Remarquons que, comme $|z_{k-1}| \leq |\eta| + |\xi|$, alors $|g(t)| \leq C(1 + |\eta|^p + |\xi|^p + |t|^p)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme g est convexe, par croissance du taux d'accroissement, on a pour tout $s \leq t \leq t' = t + |t| + |\xi| + |\eta| + 1$,

$$\frac{g(t) - g(s)}{t - s} \leq \frac{g(t') - g(t)}{t' - t} \leq C\frac{1 + |\xi|^p + |\eta|^p + |t|^p}{1 + |\xi| + |\eta| + |t|} \leq C(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1} + |t|^{p-1}).$$

En particulier, si $\eta_k - \xi_k > 0$, on pose $t = \eta_k - \xi_k$ et $s = 0$ et si $\eta_k - \xi_k \leq 0$, on pose $s = \eta_k - \xi_k$ et $t = 0$. Il vient alors que

$$|f(z_k) - f(z_{k-1})| \leq C(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1} + |\eta_k - \xi_k|^{p-1})|\eta_k - \xi_k| \leq C(1 + |\xi|^{p-1} + |\eta|^{p-1})|\eta - \xi|,$$

ce qui donne le résultat annoncé après sommation. $\square$

2.3 Quasiconvexité

Une notion intermédiaire entre la convexité et la rang-1-convexité est la quasiconvexité introduite par Morrey.

Définition 2.3.1. Une fonction borélienne et localement bornée $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ est dite *quasiconvexe* si

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|D|} \int_D f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy$$

pour tout ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^N$, tout $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(D; \mathbb{R}^d)$.

Remarque 2.3.2. Quand f ne prend que des valeurs finies (ce qui sera le cas ici), la condition de quasiconvexité ne dépend pas de l'ensemble D. En effet, si $D' \subset \mathbb{R}^N$ est un autre ouvert borné, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ et $r > 0$ tels que $x_0 + r\overline{D'} \subset D$. Si $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(D'; \mathbb{R}^d)$, on définit

$$\psi := \begin{cases} r\varphi\left(\frac{x-x_0}{r}\right) & \text{si } x \in x_0 + rD', \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que $\psi \in \mathcal{C}^1_c(D; \mathbb{R}^d)$. Si la condition de quasiconvexité est vérifiée pour D, alors

$$\begin{aligned} |D|f(\xi) &\leq \int_D f(\xi + \nabla\psi(x))\, dx \\ &= |D \setminus (x_0 + rD')|f(\xi) + \int_{x_0+rD'} f\left(\xi + \nabla\varphi\left(\frac{x-x_0}{r}\right)\right) dx \\ &= (|D| - r^N|D'|)f(\xi) + r^N \int_{D'} f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy, \end{aligned}$$

d'où

$$|D'|f(\xi) \leq \int_{D'} f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy.$$

Remarque 2.3.3. Si f est continue et satisfait une condition de croissance du type

$$|f(\xi)| \leq C(1 + |\xi|^p) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N},$$

avec $C > 0$ et $1 \leq p < \infty$, alors un argument de densité montre que la condition de quasiconvexité est équivalente à

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|D|} \int_D f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy$$

pour tout ouvert borné $D \subset \mathbb{R}^N$, tout $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$ et tout $\varphi \in W^{1,p}_0(D; \mathbb{R}^d)$.

Remarque 2.3.4. Si $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ est convexe, alors l'inégalité de Jensen montre que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(D; \mathbb{R}^d)$, on a

$$⨍_D f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy \geq f\left(⨍_D (\xi + \nabla\varphi(y))\, dy\right) = f(\xi)$$

car $\varphi = 0$ dans un voisinage de ∂D. Ceci montre que toute fonction convexe est quasiconvexe. Nous montrerons ultérieurement que la quasiconvexité implique la rang-1-convexité.

L'intéret majeur de la quasiconvexité est qu'elle fournit une condition nécessaire et suffisante de semi-continuité inférieure pour les fonctionnelles intégrales. Le résultat suivant est dû à Morrey, il a été étendu de nombreuses manières notamment dans l'une de ses formes les plus générales par Acerbi et Fusco (voir [1]) pour des fonctionnelles intégrales dépendant de x, u et ∇u.

Commençons par la condition nécessaire qui est plus simple.

Théorème 2.3.5. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $1 \le p \le \infty$ et $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to [0, +\infty)$ une fonction borélienne et $F : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par*

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx \qquad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d).$$

Si F est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ alors f est semi-continue inférieurement et quasiconvexe.

Démonstration. Si $\xi_n \to \xi$, on définit pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $u_n(x) = \xi_n x$ et $u(x) = \xi x$ de sorte que $u_n \to u$ (fortement) dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et donc

$$|\Omega| f(\xi) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(\nabla u_n)\, dx = \liminf_{n\to+\infty} |\Omega| f(\xi_n),$$

ce qui montre que f est semi-continue inférieurement.

Montrons que f est quasiconvexe. Soient $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$, $Y = (0, 1)^N$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(Y; \mathbb{R}^d)$. On étend φ par Y-périodicité à tout $\mathbb{R}^N$ et on pose $u(x) = \xi x$ et $u_n(x) = \xi x + \frac{1}{n}\varphi(nx)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Clairement $u_n \to u$ fortement dans $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et comme la suite $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, alors $u_n \rightharpoonup u$ faible* dans $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et donc également faiblement dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Par conséquent, on a

$$|\Omega| f(\xi) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(\nabla u_n)\, dx = \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi(nx))\, dx.$$

Si $f(\xi + \nabla\varphi) \in L^1(Y)$, le Théorème de Riemann-Lebesgue montre que $f(\nabla u_n) = f(\xi + \nabla\varphi(n\cdot)) \rightharpoonup \int_Y f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy$ faiblement dans $L^1(Y)$, d'où

$$f(\xi) \le \int_Y f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy.$$

Si, en revanche, $f(\xi + \nabla\varphi) \notin L^1(Y)$, alors on a toujours

$$f(\xi) \le +\infty = \int_Y f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy$$

ce qui montre la quasiconvexité de f. □

Dans la preuve de la condition suffisante, nous utiliserons le résultat suivant qui établit une forme de "différentiabilité approchée" des fonctions de Sobolev.

Théorème 2.3.6. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \le p < \infty$. Alors pour presque tout $x_0 \in \Omega$, on*

$$\lim_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(x_0)} \frac{|u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0) \cdot (x - x_0)|^p}{\rho^p}\, dx = 0.$$

Démonstration. Si u est une fonction régulière, en posant $g(t) = u(x_0+t(x-x_0))$, on a $g(1)-g(0) = \int_0^1 g'(s)\,ds$, et donc, pour tout x et $x_0 \in \Omega$,

$$u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x-x_0) = \int_0^1 [\nabla u(x_0 + s(x-x_0)) - \nabla u(x_0)]\cdot(x-x_0)\,ds.$$

Par densité cette propriété reste valide pour presque tout $x_0 \in \Omega$ et presque tout $x \in \Omega$. On multiplie cette égalité par $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B_\rho(x_0))$ et on obtient d'après le Théorème de Fubini, la formule de changement de variables et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\int_{B_\rho(x_0)} \varphi(x)(u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x-x_0))\,dx \\
&\qquad = \int_0^1 \frac{1}{s^{N+1}} \int_{B_{s\rho}(x_0)} \varphi\left(x_0 + \frac{y-x_0}{s}\right)[\nabla u(y) - \nabla u(x_0)]\cdot(y-x_0)\,dy\,ds \\
&\le \rho \int_0^1 \left(\frac{1}{s^N}\int_{B_{s\rho}(x_0)} \left|\varphi\left(x_0+\frac{y-x_0}{s}\right)\right|^{p'} dy\right)^{1/p'} \left(\frac{1}{s^N}\int_{B_{s\rho}(x_0)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy\right)^{1/p} ds \\
&\qquad\qquad \le \rho\|\varphi\|_{L^{p'}(B_\rho(x_0))} \int_0^1 \left(\frac{1}{s^N}\int_{B_{s\rho}(x_0)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy\right)^{1/p} ds.
\end{aligned}$$

En divisant par $\|\varphi\|_{L^{p'}(B_\rho(x_0))}$ et en prenant le supremum parmi toutes les fonctions $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B_\rho(x_0))$, il vient pour presque tout $x_0 \in \Omega$,

$$⨍_{B_\rho(x_0)} \frac{|u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x-x_0)|^p}{\rho^p}\,dx \le \int_0^1 \left(⨍_{B_{s\rho}(x_0)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy\right) ds.$$

Pour tout $\rho > 0$, on définit la fonction continue $f_\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$f_\rho(s) := ⨍_{B_{s\rho}(x_0)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy \quad \text{pour tout } s \in [0,1].$$

Il existe alors $s_\rho \in [0,1]$ tel que $\int_0^1 f_\rho(s)\,ds \le f_\rho(s_\rho)$ de sorte que

$$⨍_{B_\rho(x_0)} \frac{|u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x-x_0)|^p}{\rho^p}\,dx \le ⨍_{B_{s_\rho\rho}(x_0)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy.$$

Si x_0 est un point de Lebesgue de ∇u, i.e., presque tous les points de Ω, alors on a

$$⨍_{B_{s_\rho\rho}(x_0)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy \to 0,$$

ce qui montre que

$$⨍_{B_\rho(x_0)} \frac{|u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x-x_0)|^p}{\rho^p}\,dx \to 0.$$

□

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le résultat de condition suffisante de faible semi-continuité inférieure.

Théorème 2.3.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et quasiconvexe satisfaisant la propriété de croissance suivante : il existe $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ et $1 < p < \infty$ tels que*

$$\lambda|\xi|^p \leq f(\xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N}.$$

Alors la fonctionnelle $F : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u)\, dx \quad \text{pour tout } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Soit $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Il s'agit de montrer que

$$F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Notons que le membre de droite est toujours fini d'après l'hypothèse de croissance, et du fait qu'en vertu du Théorème de Banach-Steinhaus la suite $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$. On considère une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \lim_{k\to+\infty} F(u_{n_k}).$$

Etape 1. On suppose d'abord que $u(x) = \xi x$ pour tout $x \in \Omega$ est une fonction affine. L'idée consiste à modifier la condition limite de la suite u_{n_k} par celle de sa limite u.

Soit $(\mu_k)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de mesures positives dans $\mathcal{M}(\Omega)$ définie par

$$\mu_k(E) = \int_E (1 + |\xi|^p + |\nabla u_{n_k}|^p)\, dx \quad \text{pour tout Borélien } E \subset \Omega.$$

Comme cette suite de mesures est bornée, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que $\mu_k \rightharpoonup \mu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$. Pour tout $r > 0$, on note $\Omega_r = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$. Comme les ensembles $\partial\Omega_r$ sont deux à deux disjoints, on en déduit que la famille $\{r > 0 : \mu(\partial\Omega_r) > 0\}$ est au plus dénombrable, et on peut trouver un $r > 0$ tel que $\mu(\partial\Omega_r) = 0$.

Pour tout $0 < \delta < r$, on considère une fonction cut-off $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ sur $\Omega_{r+\delta}$, $\eta = 0$ sur $\Omega \setminus \Omega_{r-\delta}$ et $|\nabla\eta| \leq c/\delta$. On pose alors

$$v_k = \eta u_{n_k} + (1-\eta)u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$$

qui satisfait $v_k(x) = \xi x$ pour tout $x \in \Omega \setminus \Omega_{r-\delta}$ et $v_k = u_{n_k}$ sur $\Omega_{r+\delta}$. En utilisant la condition de croissance sur f, on en déduit que

$$\int_\Omega f(\nabla u_{n_k})\, dx \geq \int_{\Omega_{r+\delta}} f(\nabla v_k)\, dx \geq \int_\Omega f(\nabla v_k)\, dx - \int_{\Omega\setminus\Omega_{r-\delta}} f(\xi) - \Lambda \int_{\Omega_{r-\delta}\setminus\Omega_{r+\delta}} (1 + |\nabla v_k|^p)\, dx.$$

Or $\nabla v_k = \eta\nabla u_{n_k} + (1-\eta)\xi + \nabla\eta \otimes (u_{n_k} - u)$, ce qui implique que $|\nabla v_k|^p \leq c(|\nabla u_{n_k}|^p + |\xi|^p + |u - u_{n_k}|^p/\delta^p)$. Par conséquent,

$$\int_\Omega f(\nabla u_{n_k})\, dx \geq \int_\Omega f(\nabla v_k)\, dx - \int_{\Omega\setminus\Omega_{r-\delta}} f(\xi)$$
$$- C \int_{\Omega_{r-\delta}\setminus\Omega_{r+\delta}} \left(1 + |\nabla u_{n_k}|^p + |\xi|^p + \frac{1}{\delta^p}|u_{n_k} - u|^p\right) dx.$$

Comme $v_k(x) = \xi x$ pour tout $x \in \Omega \setminus \Omega_{r-\delta}$, on a par définition de la quasiconvexité que

$$\int_\Omega f(\nabla v_k)\, dx \geq |\Omega| f(\xi).$$

Par ailleurs,

$$\limsup_{k\to+\infty} \mu_k(\Omega_{r-\delta} \setminus \Omega_{r+\delta}) \leq \mu\left(\overline{\Omega_{r-\delta} \setminus \Omega_{r+\delta}}\right).$$

Par passage à la limite quand $k \to +\infty$, il vient

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f(\nabla u_{n_k})\, dx \geq |\Omega| f(\xi) - |\Omega \setminus \Omega_{r-\delta}| f(\xi) - C\mu\left(\overline{\Omega_{r-\delta} \setminus \Omega_{r+\delta}}\right).$$

En faisant tendre $\delta \searrow 0$, on obtient que

$$\lim_{\delta\searrow 0} \mu\left(\overline{\Omega_{r-\delta} \setminus \Omega_{r+\delta}}\right) = \mu(\partial\Omega_r) = 0$$

d'après le choix de r. Par conséquent,

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f(\nabla u_n)\, dx \geq |\Omega| f(\xi) - |\Omega \setminus \Omega_r| f(\xi),$$

et on obtient le résultat en faisant tendre $r \searrow 0$.

Etape 2. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ une fonction générale. On définit la mesure

$$\lambda_k(E) = \int_E f(\nabla u_{n_k})\, dx \qquad \text{pour tout Borélien } E \subset \Omega.$$

Comme cette mesure est bornée, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\lambda_k \rightharpoonup \lambda$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$. On désigne par $\mathcal{L}^N$ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^N$. Le théorème de décomposition de Lebesgue montre que $\lambda = a\mathcal{L}^N + \lambda^s$ où $a \in L^1(\Omega)$ et λ^s est une mesure étrangère à la mesure de Lebesgue. Nous allons montrer que pour presque tout $x_0 \in \Omega$,

$$a(x_0) \geq f(\nabla u(x_0)).$$

En effet, dans ce cas, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} F(u_n) = \lim_{k\to+\infty} \lambda_k(\Omega) \geq \lambda(\Omega) \geq \int_\Omega a(x)\, dx \geq \int_\Omega f(\nabla u)\, dx,$$

ce qui conclut la preuve du théorème.

Fixons un point $x_0 \in \Omega$ un point de Lebesgue de u et a qui satisfait de plus

$$\lim_{\rho\to 0} \fint_{B_\rho(x_0)} \frac{|u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)(x - x_0)|^p}{\rho^p}\, dx = 0, \quad \lim_{\rho\to 0} \frac{\lambda^s(B_\rho(x_0))}{\omega_N \rho^N} = 0.$$

Par le théorème de différentiation de Lebesgue et le Théorème 2.3.6, presque tous les points $x_0 \in \Omega$ satisfont ces propriétés. Comme les ensembles $\{\partial B_\rho(x_0)\}_{\rho>0}$ sont deux à deux disjoints, on en déduit que l'ensemble $\{\rho > 0 : \lambda(\partial B_\rho(x_0)) > 0\}$ est au plus dénombrable. Il existe donc une suite $(\rho_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\rho_j \to 0$ et $\lambda(\partial B_{\rho_j}(x_0)) = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} a(x_0) &= \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\omega_N \rho_j^N} \left(\int_{B_{\rho_j}(x_0)} a(x)\, dx + \lambda^s(B_{\rho_j}(x_0)) \right) = \lim_{j\to+\infty} \frac{\lambda(B_{\rho_j}(x_0))}{\omega_N \rho_j^N} \\ &= \lim_{j\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k(B_{\rho_j}(x_0))}{\omega_N \rho_j^N} = \lim_{j\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\omega_N \rho_j^N} \int_{B_{\rho_j}(x_0)} f(\nabla u_{n_k}(x))\, dx. \end{aligned}$$

On pose pour presque tout $y \in B = B_1(0)$,

$$v_{k,j}(y) := \frac{u_{n_k}(x_0 + \rho_j y) - u(x_0)}{\rho_j} \in W^{1,p}(B; \mathbb{R}^d)$$

de sorte que $\nabla v_{k,j}(y) = \nabla u_{n_k}(x_0 + \rho_j y)$. D'après la formule de changement de variable, on a donc

$$a(x_0) = \lim_{j\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\omega_N} \int_B f(\nabla v_{k,j}(y))\, dy$$

et

$$\int_B |v_{k,j}(y) - \nabla u(x_0)y|^p\, dy = \frac{1}{\rho_j^N} \int_{B_{\rho_j}(x_0)} \frac{|u_{n_k}(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)(x - x_0)|^p}{\rho_j^p}\, dx$$

de sorte que

$$\lim_{j\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \int_B |v_{k,j}(y) - \nabla u(x_0)y|^p\, dy = 0.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on peut donc trouver une suite $k(j) \nearrow +\infty$ quand $j \to +\infty$ telle que, si l'on pose $v_j := v_{k(j),j}$, alors $v_j \to \nabla u(x_0)y$ fortement dans $L^p(B; \mathbb{R}^d)$ et

$$a(x_0) = \lim_{j\to+\infty} \frac{1}{\omega_N} \int_B f(\nabla v_j(y))\, dy.$$

D'après la propriété de coercivité, on a que la suite $(\nabla v_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(B; \mathbb{R}^{d\times N})$ ce qui montre que $v_j \rightharpoonup \nabla u(x_0)y$ faiblement dans $W^{1,p}(B; \mathbb{R}^d)$. D'après l'étape 1, on en déduit que

$$a(x_0) \geq f(\nabla u(x_0)),$$

comme annoncé. □

Remarque 2.3.8. Le résultat précédent est loin d'être optimal. Il se généralise au cas où f satisfait

$$-C_1(|\xi|^q + 1) \leq f(\xi) \leq C_2(1 + |\xi|^p) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N},$$

avec $1 \leq q < p$ et C_1, $C_2 > 0$.

La quasiconvexité de f est donc une condition nécessaire et suffisante pour que la fonctionnelle intégrale $F : W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))\, dx$$

soit faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Elle implique donc la rang-1-convexité de f. Ces deux notions sont toutefois distinctes (du moins quand $d \geq 3$) comme l'atteste le contre-exemple de Sverak (voir Exemple 2.2.7) où on peut montrer que la fonction f construite, bien qu'étant rang-1-convexe, n'est pas quasiconvexe.

Un exemple important de fonctions quasiconvexes quand $N = d = 2$ est le suivant. Nous avons déjà vu que si $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné et $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ avec $p > 2$, alors $\det(\nabla u_n) \rightharpoonup \det(\nabla u)$ faiblement dans $L^{p/2}(\Omega)$. Par conséquent, si $g : \mathbb{R}^{2\times 2} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, le Théorème 1.2.3 assure que

$$\int_\Omega g(\nabla u, \det\nabla u)\, dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g(\nabla u, \det\nabla u_n)\, dx,$$

ce qui montre que, en vertu du Théorème 2.3.5 que $\xi \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mapsto g(\xi, \det\xi)$ est quasiconvexe. Il s'agit d'un cas très particulier d'une classe de fonctions dite *polyconvexes*.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer un résultat d'existence de minimiseurs dans le cas vectoriel dont la démonstration est identique à celle du Théorème 1.2.5.

Théorème 2.3.9. *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné,* $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ *une fonction borélienne et* $g : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory. On suppose que :*

— f *est quasiconvexe ;*

— *il existe* $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ *et* $1 < p < \infty$ *tels que pour tout* $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$,

$$\lambda|\xi|^p \leq f(\xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p);$$

— *il existe* $1 < p < \infty$, a_0, $a_1 \in L^1(\Omega)$ *et* $b \geq 0$ *tels que pour presque tout* $x \in \Omega$ *et tout* $z \in \mathbb{R}^d$,

$$a_0(x) \leq g(x,z) \leq a_1(x) + b|z|^p.$$

Si $u_0 \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, *alors il existe une solution* $u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ *au problème de Dirichlet*

$$\inf_{v \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \left\{ \int_\Omega f(\nabla v)\,dx + \int_\Omega g(x,v)\,dx \right\}.$$

Chapitre 3

Γ-convergence de fonctionnelles intégrale

3.1 Théorie générale de la Γ-convergence

On cherche à définir une notion de convergence variationnelle, appelée Γ-convergence, qui rende stable les problèmes de minimisation, autrement dit qui assure la convergence des minimiseurs ainsi que de la valeur minimale.

Dans cette section, on considère un espace métrique (X, d) et $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctionnelles $F_j : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On souhaite définir une limite F de la suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

— si $u_j \in X$ est telle que $F(u_j) = \min_X F_j$ et $u_j \to u$, alors $F(u) = \min_X F$;

— $\min_X F_j = F_j(u_j) \to F(u) = \min_X F$.

Définition 3.1.1. On dit que la suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Γ-converge vers F si pour tout $u \in X$:

i) *(borne inférieure)* pour toute suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $u_j \to u$, on a

$$F(u) \le \liminf_{j\to+\infty} F_j(u_j);$$

ii) *(borne supérieure)* il existe une suite $(\bar{u}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $\bar{u}_j \to u$ et

$$F(u) = \lim_{j\to+\infty} F_j(\bar{u}_j).$$

Le résultat fondamental de la Γ-convergence est le suivant.

Théorème 3.1.2. *Supposons que $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Γ-converge vers F. Si $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de X telle que $u_j \to u$ et $\lim_j F_j(u_j) = \lim_j \inf_X F_j$, alors u est un minimum de F et de plus,*

$$F(u) = \min_X F = \lim_{j\to+\infty} \inf_X F_j.$$

Démonstration. Comme $u_j \to u$, alors d'après la borne inférieure, on a

$$F(u) \le \liminf_{j\to+\infty} F_j(u_j).$$

Par ailleurs, pour tout $v \in X$, il existe une suite $(\bar{v}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\bar{v}_j \to v$ et $F_j(\bar{v}_j) \to F(v)$. Par conséquent,

$$\lim_{j\to+\infty} \inf_X F_j \le \lim_{j\to+\infty} F_j(\bar{v}_j) \le F(v),$$

ce qui montre que $F(u) \le F(v)$ pour tout $v \in X$ et que $F(u) = \min_X F \le \lim_j \inf_X F_j \le F(v)$ pour tout $v \in X$. En prenant $v = u$, on obtient le résultat annoncé. □

A partir de la définition, on obtient immédiatement les propriétés suivantes.

Remarque 3.1.3. 1. Si F_j Γ-converge vers F, alors F est semi-continue inférieurement dans X. En effet, soit $u^k \to u$, d'après la borne supérieure, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver une suite $\bar{u}_j^k \to u^k$ telle que $\lim_j F_j(\bar{u}_j^k) = F(u^k)$. Par récurrence, on construit une suite croissante $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \ge \sigma_k$,

$$d(\bar{u}_j^k, u^k) \le \frac{1}{k}, \quad |F_j(\bar{u}_j^k) - F(u^k)| \le \frac{1}{k}.$$

Définissons $v_j = \bar{u}_j^k$ si $\sigma_k \le j < \sigma_{k+1}$ de sorte que $v_j \to u$ et

$$F(u) \le \liminf_{j\to+\infty} F_j(v_j) \le \liminf_{k\to+\infty} F_{\sigma_k}(v_{\sigma_k}) \le \liminf_{k\to+\infty} F(u^k).$$

2. Si F_j Γ-converge vers F, alors pour toute sous-suite $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on a F_{j_k} Γ-converge vers F. Pour montrer la borne inférieure, on considère une suite $u_k \to u$ et on définit

$$\tilde{u}_j = \begin{cases} u_{j_k} & \text{si } j = j_k, \\ u & \text{si } j \ne j_k \text{ pour tout } k \end{cases}$$

de sorte que $\tilde{u}_j \to u$ et donc

$$F(u) \le \liminf_{j\to+\infty} F_j(\tilde{u}_j) \le \liminf_{k\to+\infty} F_{j_k}(\tilde{u}_{j_k}) = \liminf_{k\to+\infty} F_{j_k}(u_k).$$

Pour la borne supérieure, comme F_j Γ-converge vers F, alors il existe une suite $(\bar{u}_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $\bar{u}_j \to u$ et

$$F(u) = \lim_{j\to+\infty} F_j(\bar{u}_j) = \lim_{k\to+\infty} F_{j_k}(\bar{u}_{j_k}).$$

3. Si F_j Γ-converge vers F et $G : X \to \mathbb{R}$ est continue, alors $F_j + G$ Γ-converge vers $F + G$.

Une Γ-limite n'existe pas toujours. Pour cette raison, il est utile de d'introduire les Γ-limites inférieures et supérieures qui, elles, sont toujours bien définies.

Définition 3.1.4. Pour tout $u \in X$, on définit les Γ-limites inférieures et supérieures par

$$F'(u) := \inf \left\{ \liminf_{j\to+\infty} F_j(u_j) : \ u_j \to u \right\}, \quad F''(u) := \inf \left\{ \limsup_{j\to+\infty} F_j(u_j) : \ u_j \to u \right\}.$$

respectivement.

On a alors le résultat suivant

Proposition 3.1.5. *La suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Γ-converge si et seulement si $F' = F''$, auquel cas, la Γ-limite est donnée par cette fonctionnelle commune.*

Démonstration. Supposons que $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Γ-converge vers une fonctionnelle F et montrons que $F = F' = F''$. Remarquons qu'on a toujours $F' \le F''$. Par conséquent, il suffit de montrer que $F \le F'$ et $F'' \le F$. D'après la borne inférieure, on a pour tout $u \in X$ et pour toute suite $u_j \to u$,

$$F(u) \le \liminf_{j\to+\infty} F_j(u_j).$$

Par passage à l'infimum sur toutes les suites $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui convergent vers u et par définition de la Γ-limite inférieure, il vient $F \le F'$. Par ailleurs, la borne supérieure montre l'existence d'une suite $\bar u_j \to u$ telle que

$$F(u) = \lim_{j\to+\infty} F_j(\bar u_j) = \limsup_{j\to+\infty} F_j(\bar u_j) \ge F''(u),$$

ce qui conclut la preuve de la condition nécessaire.

Montrons à présent la condition suffisante. On suppose alors que $F' = F''$ et on veut montrer que $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Γ-converge vers cette fonctionnelle commune notée F. Par définition de la Γ-limite inférieure, on a pour tout $u \in X$ et pour toute suite $u_j \to u$,

$$F(u) = F'(u) \le \liminf_{j\to+\infty} F_j(u_j),$$

ce qui montre la borne inférieure. Pour établir la borne supérieure, nous allons montrer que l'existence d'une suite $\bar u_j \to u$ telle que

$$\limsup_{j\to+\infty} F_j(\bar u_j) \le F''(u) = F(u).$$

Il suffit de considérer que le cas où $F''(u) < +\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut alors trouver une suite $u_j^k \to u$ telle que

$$\limsup_{j\to+\infty} F_j(u_j^k) \le F''(u) + \frac{1}{k}.$$

Par récurrence, on construit une suite croissante $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \ge \sigma_k$,

$$d(u_j^k, u) \le \frac{1}{k}, \quad F_j(u_j^k) \le F''(u) + \frac{2}{k}.$$

On pose alors $\bar u_j = u_j^k$ si $\sigma_k \le j < \sigma_{k+1}$ de sorte que $\bar u_j \to u$ et $\limsup_j F_j(\bar u_j) \le F''(u)$. □

Dans les espaces métriques séparables, la Γ-convergence jouit d'une propriété de compacité.

Proposition 3.1.6. *Soit (X, d) un espace métrique séparable et $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctionnelles $F_j : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors il existe une sous-suite $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telles que F_{j_k} Γ-converge vers F.*

Démonstration. Comme X est séparable, il existe une base dénombrable de voisinages notée $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Par un principe d'extraction diagonal, on peut extraire une sous-suite $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la limite

$$\lim_{k\to+\infty} \inf_{U_i} F_{j_k}$$

existe pour tout $i \in \mathbb{N}$. Pour tout $u \in X$, on définit les Γ-limites inférieures et supérieures associées à cette sous-suite,

$$F'(u) := \inf\left\{\liminf_{k\to+\infty} F_{j_k}(x_k) : x_k \to x\right\}, \quad F''(u) := \inf\left\{\limsup_{k\to+\infty} F_{j_k}(x_k) : x_k \to x\right\}.$$

D'après la Proposition 3.1.5, il suffit de montrer que $F' = F''$. Notons qu'on a toujours par définition $F' \le F''$. Il s'agit de montrer l'autre inégalité. Soient $u \in X$ et $i \in \mathbb{N}$ tels que $u \in U_i$. Si $u_k \to u$, on a $u_k \in U_i$ pour k assez grand et, par conséquent,

$$\lim_{k\to+\infty} \inf_{U_i} F_{j_k} \le \liminf_{k\to+\infty} F_{j_k}(u_k),$$

soit
$$\sup_{\{i\in\mathbb{N}:\ u\in U_i\}} \limsup_{k\to+\infty} \inf_{U_i} F_{j_k} \leq F'(u).$$

Comme $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de voisinages, on a que
$$\sup_{\{i\in\mathbb{N}:\ u\in U_i\}} \limsup_{k\to+\infty} \inf_{U_i} F_{j_k} \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{k\to+\infty} \inf_{d(u,v)<\frac{1}{n}} F_{j_k}(v).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut donc trouver $\sigma_n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq \sigma_n$, on a
$$\inf_{d(u,v)\leq\frac{1}{n}} F_{j_k}(v) \leq F'(u) + \frac{1}{n}.$$

Il existe alors $v_k^n \in X$ tel que $d(u, v_k^n) \leq \frac{1}{n}$ avec
$$F_{j_k}(v_k^n) \leq F'(u) + \frac{2}{n}.$$

On pose $\bar{v}_k = v_k^n$ si $\sigma_n \leq k < \sigma_{n+1}$, de sorte que $\bar{v}_k \to u$ et
$$F''(u) \leq \limsup_{k\to+\infty} F_{j_k}(\bar{v}_k) \leq F'(u),$$

ce qui montre effectivement que $F' = F''$. □

La Γ-convergence possède également la propriété d'Urysohn.

Proposition 3.1.7. *La suite $(F_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Γ-converge vers F si et seulement si pour toute sous-suite, il existe une sous-suite qui Γ-converge vers F.*

Démonstration. Nous avons déjà vu à la Remarque 3.1.3-2 que si F_j Γ-converge vers F, alors pour toute sous-suite $(F_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on a F_{j_k} Γ-converge vers F.

Réciproquement, supposons que F_j ne Γ-converge pas vers F. Cela signifie que soit il existe une suite $\bar{u}_j \to u$ telle que $\liminf_j F_j(\bar{u}_j) < F(u)$, soit $\limsup_j F(u_j) > F(u)$ pour toute suite $u_j \to u$. Dans le premier cas, on extrait une sous-suite telle que $\lim_k F_{j_k}(\bar{u}_{j_k}) = \liminf_j F_j(\bar{u}_j) < F(u)$. Par hypothèse, de cette sous-suite, on peut encore extraire une sous-suite telle que $F_{j_{k_l}}$ Γ-converge vers F et, en particulier,
$$F(u) \leq \liminf_{l\to+\infty} F_{j_{k_l}}(\bar{u}_{j_{k_l}}) = \lim_{l\to+\infty} F_{j_{k_l}}(\bar{u}_{j_{k_l}}) = \lim_{k\to+\infty} F_{j_k}(\bar{u}_{j_k}),$$

ce qui est absude.

Dans le second cas, il existe un voisinage U de v tel que $F(u) < \limsup_j \inf_U F_j$. On extrait alors une sous-suite telle que $\lim_k \inf_U F_{j_k} = \limsup_j \inf_U F_j$. Par hypothèse, de cette sous-suite, on peut encore extraire une sous-suite telle que $F_{j_{k_l}}$ Γ-converge vers F. Il existe alors une suite $\bar{u}_l \to u$ (et donc $u_l \in U$ pour l assez grand) telle que
$$F(u) = \lim_{l\to+\infty} F_{j_{k_l}}(u_l) \geq \lim_{l\to+\infty} \inf_U F_{j_{k_l}} = \lim_{k\to+\infty} \inf_U F_{j_k},$$

ce qui est absude. □

3.2 Applications aux fonctionnelles intégrale

Pour tout $\varepsilon > 0$, on considère une fonction de Carathéodory $f_\varepsilon : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ satisfaisant des propriétés de croissance et coercivité uniformes :

$$\lambda|\xi|^p \leq f_\varepsilon(x,\xi) \leq \Lambda(1+|\xi|^p) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N}, \tag{3.2.1}$$

où $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ et $1 < p < \infty$. On définit la fonctionnelle $F_\varepsilon : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ par

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f_\varepsilon(x,\nabla u)\,dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.2.2}$$

On s'intéresse à la Γ-convergence de cette famille de fonctionnelles dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. A ce niveau de généralité, il ne s'agit pas d'identifier la Γ-limite, mais au moins de se demander si F est toujours une fonctionnelles intégrale du même type. Nous allons montrer le résultat de compacité suivant :

Théorème 3.2.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $1 < p < \infty$. Soit $f_\varepsilon : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ une famille de fonctions de Carathéodory satisfaisant (3.2.1) et $F_\varepsilon : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ la fonctionnelle définie par (3.2.2). Alors, pour toute suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(\varepsilon_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to [0,+\infty)$ satisfaisant les mêmes propriétés de croissance et coercivité que f_ε, tels que la fonctionnelle $F_{\varepsilon_{j_n}}$ Γ-converge dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ vers la fonctionnelle $F : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ donnée par*

$$F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f(x,\nabla u)\,dx & \textit{si } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \textit{sinon.} \end{cases}$$

L'idée consiste à localiser F_ε sur la famille des sous ensembles ouverts de Ω notée $\mathcal{A}(\Omega)$. Pour tout $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et tout $A \in \mathcal{A}(\Omega)$,

$$F_\varepsilon(u,A) = \begin{cases} \displaystyle\int_A f_\varepsilon(x,\nabla u)\,dx & \text{si } u \in W^{1,p}(A;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Un bon substitut à $\mathcal{A}(\Omega)$ est $\mathcal{R}(\Omega)$ qui est l'ensemble des unions finies de cubes de côtés rationnels et de centre rationnel contenus dans Ω. La famille $\mathcal{R}(\Omega)$ est dénombrable et, de plus, pour tout A, $B \in \mathcal{A}(\Omega)$ avec $\overline{A} \subset B$, il existe $R \in \mathcal{R}(\Omega)$ tels que $\overline{A} \subset R \subset \overline{R} \subset B$.

Comme $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ est un espace métrique séparable, pour toute suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$, la Proposition 3.1.6 couplé à un argument de diagonalisation de sous-suite montre que l'on peut extraire une sous-suite, notée $(\varepsilon_n \equiv \varepsilon_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, si l'on définit pour tout $(u,A) \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{A}(\Omega)$,

$$F(u,A) = \inf\left\{ \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n,A) : \ u_n \to u \text{ dans } L^p(A;\mathbb{R}^d) \right\},$$

alors $F(\cdot,C)$ est la Γ-limite de $F_{\varepsilon_n}(\cdot,C)$ pour tout $C \in \mathcal{R}(\Omega)$ et pour $C = \Omega$.

Commençons par déterminer le domaine de la Γ-limite. Soit $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ tel que $F(u,\Omega) < +\infty$, d'après la borne supérieure, il existe une suite $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\bar{u}_n \to u$ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et

$$F(u,\Omega) = \lim_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(\bar{u}_n,\Omega).$$

D'après la propriété de coercivité, on en déduit que la suite $(\nabla\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ ce qui implique que $\bar{u}_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ avec $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Ceci montre que $F(u,\Omega) = +\infty$ pour tout $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \setminus W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. On est donc ramené à étudier la Γ-convergence dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

D'après la borne supérieure, si $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(\bar{u}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ telle que $F_{\varepsilon_n}(\bar{u}_n,\Omega) \to F(u,\Omega) < +\infty$. Par conséquent, la suite de mesures

$$\mu_n = f_{\varepsilon_n}(\cdot,\nabla\bar{u}_n)\mathcal{L}^N$$

est bornée dans $\mathcal{M}(\Omega)$ et, quitte à extraire une autre sous-suite, on peut toujours supposer que $\mu_n \rightharpoonup \mu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$.

Proposition 3.2.2. *Pour tout A, B, $C \in \mathcal{A}(\Omega)$, on a*

i) $F(u,A) \le F(u,A\setminus\overline{C}) + F(u,B)$ *si* $\overline{C} \subset B \subset A$ *;*

ii) pour tout $\delta > 0$ *il existe* $C_\delta \in \mathcal{A}(\Omega)$ *avec* $\overline{C}_\delta \subset A$ *et* $F(u,A\setminus\overline{C}_\delta) \le \delta$ *;*

iii) $\mu(\Omega) \le F(u,\Omega)$ *;*

iv) $F(u,A) \le \mu(\overline{A})$ *si* $\overline{A} \subset \Omega$.

Démonstration. Comme $\mu_n \rightharpoonup \mu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$ et Ω est ouvert,

$$\mu(\Omega) \le \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(\Omega) = \lim_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(\bar{u}_n,\Omega) = F(u,\Omega),$$

ce qui établit (iii).

Comme $\bar{u}_n \to u$ fortement dans $L^p(A;\mathbb{R}^d)$, $\mu_n \rightharpoonup \mu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$ et $\overline{A}$ est compact, on a d'après la borne inférieure,

$$F(u,A) \le \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(\bar{u}_n,A) \le \limsup_{n\to+\infty} \mu_n(\overline{A}) \le \mu(\overline{A}),$$

ce qui établit (iv).

Par régularité intérieure de la mesure $\Lambda(1+|\nabla u|^p)\mathcal{L}^N$, pour tout $\delta > 0$, il existe un compact $K_\delta \subset A$ tel que

$$\Lambda \int_{A\setminus K_\delta} (1+|\nabla u|^p)\,dx \le \delta.$$

Soit $C_\delta \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $K_\delta \subset C_\delta \subset \overline{C}_\delta \subset A$. Alors, on a

$$\Lambda \int_{A\setminus \overline{C}_\delta} (1+|\nabla u|^p)\,dx \le \delta.$$

En prenant la suite stationnaire $u_n = u$ et en utilisant la propriété de croissance (3.2.1), il vient

$$F(u,A\setminus\overline{C}_\delta) \le \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u,A\setminus\overline{C}_\delta) \le \Lambda \int_{A\setminus \overline{C}_\delta} (1+|\nabla u|^p)\,dx \le \delta,$$

ce qui démontre (ii).

Il reste à établir la sous-additivité (i). Soit $R_0 \in \mathcal{R}(\Omega)$ tel que $\overline{C} \subset R_0 \subset \overline{R}_0 \subset B$. Comme $F(\cdot,R_0)$ est la Γ-limite de $F_{\varepsilon_n}(\cdot,R_0)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(R_0;\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(R_0;\mathbb{R}^d)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n,R_0) = F(u,R_0).$$

Par ailleurs, pour tout $0 < \eta < \mathrm{dist}(C,\partial R_0)/2$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(A\setminus\overline{C};\mathbb{R}^d)$ telle que $v_n \to u$ dans $L^p(A\setminus\overline{C};\mathbb{R}^d)$ et

$$\liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(v_n,A\setminus\overline{C}) \le F(u,A\setminus\overline{C}) + \eta.$$

Nous allons construire une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(A;\mathbb{R}^d)$ telle que $w_n \to u$ dans $L^p(A;\mathbb{R}^d)$ en raccordant les suites v_n et u_n là où leurs supports s'intersectent sur $R_0 \setminus \overline{C}$. Pour ce faire, on définit la suite de mesures

$$\nu_n := (1 + |\nabla u_n|^p + |\nabla v_n|^p)\chi_{R_0\setminus\overline{C}}\mathcal{L}^N$$

qui satisfait $\liminf_n \nu_n(\Omega) < \infty$. Par conséquent, il existe une sous-suite $(\nu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une mesure postive $\nu \in \mathcal{M}(R_0 \setminus \overline{C})$ telles que $\nu_{n_k} \rightharpoonup \nu$ faible* dans $\mathcal{M}(R_0 \setminus \overline{C})$. On peut par ailleurs également supposer que, pour cette même sous-suite, on a $\liminf_n F_{\varepsilon_n}(v_n, A \setminus \overline{C}) = \lim_k F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{n_k}, A \setminus \overline{C})$.

Pour tout $0 < t < \mathrm{dist}(C, \partial R_0)$, on définit $R_t := \{x \in R_0 : \ \mathrm{dist}(x, \partial R_0) > t\}$ et, pour tout $0 < \delta < \eta$, $L_\delta = R_{\eta-\delta} \setminus \overline{R}_{\eta+\delta}$. On considère une fonction cut-off $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta = 1$ sur $R_{\eta+\delta}$, $\zeta = 0$ sur $\Omega \setminus R_{\eta-\delta}$ et $|\nabla\zeta| \le C/\delta$. On définit alors

$$w_n := \zeta u_n + (1-\zeta)v_n \in W^{1,p}(A;\mathbb{R}^d), \quad w_n \to u \text{ dans } L^p(A;\mathbb{R}^d).$$

Par conséquent, d'après la propriété de croissance,

$$\begin{aligned} F(u,A) &\le \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(w_n, A) \le \liminf_{k\to+\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(w_{n_k}, A) \\ &\le \liminf_{k\to+\infty} \left\{ F_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}, R_{\eta+\delta}) + F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{n_k}, A \setminus \overline{R}_{\eta-\delta}) + C\nu_{n_k}(L_\delta) + \frac{C}{\delta^p}\int_{L_\delta} |u_{n_k} - v_{n_k}|^p\,dx \right\}. \end{aligned}$$

Comme $R_{\eta+\delta} \subset R_0$, $C \subset R_{\eta-\delta}$ et $u_n - v_n \to 0$ dans $L^p(L_\delta;\mathbb{R}^d)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} F(u,A) \le \lim_{k\to+\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}, R_0) + \lim_{k\to+\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{n_k}, A \setminus \overline{C}) + C \limsup_{k\to+\infty} \nu_{n_k}(L_\delta) \\ \le F(u, R_0) + F(u, A \setminus \overline{C}) + \eta + C\nu(\overline{L}_\delta). \end{aligned}$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, il vient

$$F(u,A) \le F(u,R_0) + F(u, A \setminus \overline{C}) + \eta + C\nu(\partial R_\eta).$$

Comme les ensembles $\{\partial R_\eta\}_{\eta>0}$ sont deux à deux disjoints, l'ensemble $\{\eta > 0 : \ \nu(\partial R_\eta) > 0\}$ est au plus dénombrable et on peut trouver une suite $\eta_i \to 0$ telle que $\nu(\partial R_{\eta_i}) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il vient alors en remplaçant η par η_i dans l'expression précédente et en faisant tendre $i \to +\infty$ que

$$F(u,A) \le F(u, A \setminus \overline{C}) + F(u, R_0) \le F(u, A \setminus \overline{C}) + F(u, B),$$

ce qui démontre (i). □

Lemme 3.2.3. *Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, la fonction d'ensemble $F(u,\cdot)$ est la restriction à $\mathcal{A}(\Omega)$ de la mesure de Radon μ.*

Démonstration. Nous allons montrer que $F(u,A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Pour tout $\delta > 0$ soit $C \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $\overline{C} \subset A \subset \Omega$ et $F(u, A \setminus \overline{C}) \le \delta$. Si $B \in \mathcal{A}(\Omega)$ satisfait $\overline{C} \subset B \subset \overline{B} \subset A$, alors

$$F(u,A) \le F(u,B) + F(u, A \setminus \overline{C}) \le \mu(\overline{B}) + \delta \le \mu(A) + \delta,$$

et on obtient $F(u,A) \le \mu(A)$ en faisant tendre $\delta \to 0$.

Pour montrer l'autre inégalité, on utilise la régularité intérieure de μ qui assure, pour tout $\delta > 0$, l'existence d'un compact $K \subset A$ tel que $\mu(A) \le \mu(K) + \delta$. Soit $C \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $K \subset C \subset \overline{C} \subset A$ de sorte que $\mu(A) \le \mu(\overline{C}) + \delta$. Alors, comme $\overline{C} \subset A \subset \Omega$,

$$\mu(A) \le \delta + \mu(\Omega) - \mu(\Omega \setminus \overline{C}) \le \delta + F(u,\Omega) - F(u, \Omega \setminus \overline{C}) \le \delta + F(u,A),$$

ce qui conclut la preuve en faisant tendre $\delta \to 0$. □

Montrons à présent un résultat de représentation intégrale dû à Dal Maso et Buttazzo qui donne des conditions suffisantes pour qu'une fonctionnelle $u \mapsto F(u)$ soit du type

$$\int_\Omega f(x, \nabla u)\, dx.$$

Théorème 3.2.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $1 \le p < \infty$. Soit $F : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{A}(\Omega) \to [0,+\infty)$ une fonctionnelle satisfaisant les conditions*

i) (localité) $F(u,A) = F(v,A)$ si $u = v$ p.p. sur $A \in \mathcal{A}(\Omega)$;

ii) (propriété de mesure) pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ la fonction d'ensemble $F(u,\cdot)$ est la restriction à $\mathcal{A}(\Omega)$ d'une mesure de Radon ;

iii) (condition de croissance) il existe $\Lambda > 0$ tel que pour tout $(u,A) \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{A}(\Omega)$,

$$F(u,A) \le \Lambda \int_A (1 + |\nabla u|^p)\, dx;$$

iv) invariance par translation) pour tout $(u,A) \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{A}(\Omega)$ et tout $z \in \mathbb{R}^d$,

$$F(u+z,A) = F(u,A);$$

v) (semi-continuité inférieure) pour tout $A \in \mathcal{A}(\Omega)$, $F(\cdot,A)$ est semi-continue inférieurement pour la convergence forte de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$.

Alors il existe une fonction de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to [0,+\infty)$ satisfaisant la condition de croissance

$$0 \le f(x,\xi) \le \Lambda(1 + |\xi|^p) \quad \textit{p.p. tout } x \in \Omega \textit{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N},$$

telle que

$$F(u,A) = \int_A f(x,\nabla u)\, dx \qquad \textit{pour tout } (u,A) \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \times \mathcal{A}(\Omega).$$

Démonstration. **Etape 1 : Définition de f.** Fixons $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$ et notons $\hat{u}_\xi(x) = \xi x$ pour tout $x \in \Omega$. Comme $F(\hat{u}_\xi,\cdot)$ peut s'étendre en une mesure de Radon sur Ω qui, d'après (iii), est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. En posant

$$f(x,\xi) := \limsup_{\rho\to 0} \frac{F(\hat{u}_\xi, B_\rho(x))}{\omega_N \rho^N}$$

le théorème de différentiation de Lebesgue montre que $f(\cdot,\xi) \in L^1(\Omega)$ et que pour tout $A \in \mathcal{A}(\Omega)$,

$$F(\hat{u}_\xi, A) = \int_A f(x,\xi)\, dx.$$

Etape 2 : Représentation intégrale sur les fonctions continues affines par morceaux. Soit $A \in \mathcal{A}(\Omega)$ et $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ une fonction affine par morceaux. On peut donc écrire

$$u(x) = \sum_{i=1}^m (\xi_i x + z_i)\chi_{A_i}(x)$$

où $\xi_1,\dots,\xi_m \in \mathbb{R}^{d\times N}$, $z_1,\dots,z_m \in \mathbb{R}^d$ et $A_1,\dots,A_m$ sont des ouverts deux à deux disjoints tels que $|\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^m A_i| = 0$. D'après (i), (ii), (iv) et l'étape 1, on a

$$\begin{aligned} F(u,A) &= \sum_{i=1}^m F(u,A_i) = \sum_{i=1}^m F(\hat{u}_{\xi_i} + z_i, A_i) = \sum_{i=1}^m F(\hat{u}_{\xi_i}, A_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{A_i} f(x,\xi_i)\, dx = \sum_{i=1}^m \int_{A_i} f(x,\nabla u)\, dx = \int_A f(x,\nabla u)\, dx. \end{aligned}$$

Etape 3 : Rang-1-convexité de f. Soient ξ et $\eta \in \mathbb{R}^{d\times N}$ telles que $\eta - \xi = a \otimes b$ avec $|b| = 1$, on veut montrer que pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tout $x \in \Omega$,

$$f(x, \lambda\eta + (1-\lambda)\xi) \leq \lambda f(x,\eta) + (1-\lambda) f(x,\xi).$$

Par définition de f, il suffit d'établir que pour tout $\rho > 0$,

$$F(\hat{u}_{\lambda\eta+(1-\lambda)\xi}, B_\rho(x)) \leq \lambda F(\hat{u}_\eta, B_\rho(x)) + (1-\lambda) F(\hat{u}_\xi, B_\rho(x)). \tag{3.2.3}$$

On considère la fonction $u \in W^{1,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^d)$ définie par

$$u(y) := \begin{cases} \xi y + (b\cdot y)a - (1-\lambda)na & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ n \leq b\cdot y < n+\lambda, \\ \xi y + (1+n)\lambda a & \text{si } n \in \mathbb{Z},\ n+\lambda \leq b\cdot y < n+1. \end{cases}$$

On pose $u_\varepsilon(y) = \varepsilon u(y/\varepsilon)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$ et tout $\varepsilon > 0$. Un calcul immédiat montre que pour tout $y \in \mathbb{R}^N$,

$$|u_\varepsilon(y) - \hat{u}_{\lambda\eta+(1-\lambda)\xi}(y)| \leq \lambda(1-\lambda)|a|\varepsilon,$$

ce qui montre que $u_\varepsilon \to \hat{u}_{\lambda\eta+(1-\lambda)\xi}$ fortement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$. Par semi-continuité inférieure, il vient

$$F(\hat{u}_{\lambda\eta+(1-\lambda)\xi}, B_\rho(x)) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} F(u_\varepsilon, B_\rho(x)),$$

et comme $\hat{u}_{\lambda\eta+(1-\lambda)\xi}$ est affine et u_ε est affine par morceaux, on en déduit que

$$\int_{B_\rho(x)} f(y, \lambda\eta + (1-\lambda)\xi)\, dy \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\rho(x)} f(y, \nabla u_\varepsilon(y))\, dy = \liminf_{\varepsilon\to 0} \int_{B_\rho(x)} f\left(y, \nabla u\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right) dy.$$

En notant

$$E_\eta = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{y \in \mathbb{R}^N :\ n \leq b\cdot y < n+\lambda\}, \quad E_\xi = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \{y \in \mathbb{R}^N :\ n+\lambda \leq b\cdot y < n+1\},$$

alors on a

$$\nabla u_\varepsilon(y) = \eta \chi_{E_\eta}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + \xi \chi_{E_\xi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$$

et donc

$$f(y, \nabla u_\varepsilon(y)) = f(y,\eta)\chi_{E_\eta}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) + f(y,\xi)\chi_{E_\xi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right).$$

Si Y est le cube unité de $\mathbb{R}^N$ dont deux faces sont orthogonales au vecteur b, on a que les fonctions χ_{E_η} et χ_{E_ξ} sont Y-périodiques. Le Théorème de Riemann-Lebesgue assure alors que

$$\chi_{E_\eta}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int_Y \chi_{E_\eta}(y)\, dy = \lambda, \quad \chi_{E_\xi}\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \int_Y \chi_{E_\xi}(y)\, dy = 1-\lambda$$

faible* dans $L^\infty(\Omega)$ et donc comme $f(\cdot,\xi),\ f(\cdot,\eta) \in L^1(\Omega)$, il vient

$$\int_{B_\rho(x)} f(y, \nabla u_\varepsilon(y))\, dy \to \lambda \int_{B_\rho(x)} f(y,\eta)\, dy + (1-\lambda)\int_{B_\rho(x)} f(y,\xi)\, dy,$$

ce qui montre que

$$\int_{B_\rho(x)} f(y, \lambda\eta + (1-\lambda)\xi)\, dy \leq \lambda \int_{B_\rho(x)} f(y,\eta)\, dy + (1-\lambda)\int_{B_\rho(x)} f(y,\xi)\, dy$$

qui correspond exactement à (3.2.3).

En particulier, d'après la Proposition 2.2.8, $f(x,\cdot)$ est continue pour presque tout $x \in \Omega$ ce qui montre que f est une fonction de Carathéodory. Par ailleurs, comme pour tout $x \in \Omega$ et $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$ fixé, on a $0 \leq F(\hat{u}_\xi, B_\rho(x)) \leq \Lambda(1+|\xi|^p)\omega_N \rho^N$, on en déduit que

$$0 \leq f(x,\xi) \leq \Lambda(1+|\xi|^p) \quad \text{pour tout } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N}.$$

Etape 4 : Une inégalité par continuité. Soient $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et $A \in \mathcal{A}(\Omega)$. Pour tout $\delta > 0$ il existe $C \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $\overline{C} \subset A$ et $F(u, A \setminus \overline{C}) \leq \delta$. On peut trouver une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n|_C$ est affine par morceaux et $u_n \to u$ fortement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. D'après l'étape 2, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F(u_n, C) = \int_C f(x, \nabla u_n)\, dx.$$

Par passage à la limite quand $n \to +\infty$, d'après (v) et la continuité de $v \in W^{1,p}(C;\mathbb{R}^d) \mapsto \int_C f(x,\nabla v)\,dx$, on en déduit que

$$F(u,A) - \delta \leq F(u,C) \leq \int_C f(x,\nabla u)\,dx \leq \int_A f(x,\nabla u)\,dx,$$

et l'inégalité vient par passage à la limite quand $\delta \to 0$.

Etape 5 : Egalité par translation. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, on définit $G : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{A}(\Omega) \to [0,+\infty)$ par

$$G(v,A) = F(u+v, A)$$

qui satisfait les propriétés (i)–(v) du théorème (avec une constante Λ différente). Par conséquent, il existe une fonction de Carathéodory $g : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to [0,+\infty)$ telle que

$$G(v,A) \leq \int_A g(x,\nabla v)\,dx \text{ pour tout } (v,A) \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)\times\mathcal{A}(\Omega),$$

avec égalité si v est affine par morceaux. Si $C \in \mathcal{A}(\Omega)$ est tel que $\overline{C} \subset A$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n|C$ est affine par morceaux et $u_n \to u$ fortement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, alors

$$\begin{aligned}\int_C g(x,0)\,dx = G(0,C) = F(u,C) &\leq \int_C f(x,\nabla u)\,dx \\ &= \lim_{n\to+\infty}\int_C f(x,\nabla u_n)\,dx = \lim_{n\to+\infty} F(u_n,C) = \lim_{n\to+\infty} G(u_n - u, C) \\ &\leq \lim_{n\to+\infty}\int_C g(x,\nabla u_n - \nabla u)\,dx = \int_C g(x,0)\,dx,\end{aligned}$$

ce qui implique que toutes les inégalités sont des égalités, et donc

$$F(u,C) = \int_C f(x,\nabla u)\,dx.$$

On obtient finalement que

$$F(u,A) = \int_A f(x,\nabla u)\,dx$$

en passant au supremum parmi tous les $C \in \mathcal{A}(\Omega)$ tels que $\overline{C} \subset A$. □

Nous sommes à présent en mesure de donner une démonstration du Théorème 3.2.1.

Démonstration du Théorème 3.2.1. On sait déjà que $F_{\varepsilon_n}(\cdot, \Omega)$ Γ-converge vers une fonctionnelle $F(\cdot, \Omega)$ qui est égale à $+\infty$ sur $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d) \setminus W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$.

D'après la Remarque 3.1.3, cette fonctionnelle est semi-continue inférieurement dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, si $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, la fonction d'ensemble $F(u, \cdot)$ est la restriction à $\mathcal{A}(\Omega)$ d'une mesure de Radon. Les propriétés de localité, de croissance et d'invariance par translation sont évidentes. La conclusion provient donc d'une application directe du Théorème 3.2.4. □

Remarque 3.2.5. La preuve du Théorème 3.2.1 montre que pour tout $\eta > 0$ et tout $(u, A) \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d) \times \mathcal{A}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(A; \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_A f_{\varepsilon_n}(x, \nabla u_n)\, dx \leq \int_A f(x, \nabla u)\, dx + \eta.$$

Si $A = \Omega$ où $A \in \mathcal{R}(\Omega)$, on sait par construction que $F(\cdot, A)$ est la Γ-limite de $F_{\varepsilon_{j_n}}(\cdot, A)$ et donc qu'on peut trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(A; \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A f_{\varepsilon_n}(x, \nabla u_n)\, dx = \int_A f(x, \nabla u)\, dx.$$

On peut même montrer que cette propriété reste vraie pour tout $A \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Nous terminons ce chapitre par un résultat de stabilité de problèmes variationnels. Pour ce faire, nous aurons besoin de la proposition suivante qui affirme qu'on peut toujours supposer que les suites qui atteignent la borne supérieure ont la même valeur sur le bord que leur limite.

Proposition 3.2.6. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, alors*

$$\begin{aligned} F(u, \Omega) &= \inf\Big\{ \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n, \Omega) :\ u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega; \mathbb{R}^d) \\ &\qquad\qquad \text{et } u_n = u \text{ dans un voisinage de } \partial\Omega \Big\} \\ &= \inf\Big\{ \limsup_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n, \Omega) :\ u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega; \mathbb{R}^d) \\ &\qquad\qquad \text{et } u_n = u \text{ dans un voisinage de } \partial\Omega \Big\}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a clairement que

$$\begin{aligned} F(u, \Omega) \quad \leq \quad F'(u) := \inf\Big\{ \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n, \Omega) :\ u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega; \mathbb{R}^d) \\ \text{et } u_n = u \text{ dans un voisinage de } \partial\Omega \Big\}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer l'autre inégalité. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ telle que $v_n \to u$ dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$ et

$$\liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n, \Omega) < +\infty.$$

On extrait alors une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}, \Omega) = \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n, \Omega).$$

On définit la suite de mesures $\nu_k := (1 + |\nabla v_{n_k}|^p + |\nabla u|^p)\mathcal{L}^N$ qui satisfait $\sup_k \nu_k(\Omega) < \infty$. Par conséquent, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on a $\nu_k \rightharpoonup \nu$ faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$.

Pour tout $t > 0$, on définit $\Omega_t := \{x \in \Omega : \ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > t\}$ et, pour tout $0 < \delta < t$, $L_\delta = \Omega_{t-\delta} \setminus \overline{\Omega}_{t+\delta}$. On considère une fonction cut-off $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \le \zeta \le 1$ dans Ω, $\zeta = 1$ sur $\Omega_{t+\delta}$, $\zeta = 0$ sur $\Omega \setminus \Omega_{t-\delta}$ et $|\nabla\zeta| \le C/\delta$. On définit alors

$$u_n := \zeta v_n + (1-\zeta)u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \quad u_n \to u \text{ dans } L^p(\Omega;\mathbb{R}^d).$$

Par conséquent, comme $u_n = u$ sur $\Omega \setminus \Omega_{t-\delta}$, il vient

$$F'(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(u_n, \Omega) \le \liminf_{k\to+\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}, \Omega).$$

Par ailleurs, du fait que $v_n = u_n$ sur $\Omega_{t+\delta}$, on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla v_{n_k})\, dx &\ge \int_{\Omega_{t+\delta}} f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla u_{n_k})\, dx \\ &\ge \int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla u_{n_k})\, dx - \int_{\Omega\setminus\Omega_{t-\delta}} f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla u)\, dx - C\nu_k(L_\delta) + \frac{C}{\delta^p}\int_{L_\delta} |u - v_{n_k}|^p\, dx.\end{aligned}$$

Par passage à la liminf quand $k \to +\infty$, il vient d'après la propriété de croissance (4.1.1),

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla v_{n_k})\, dx \ge \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla u_{n_k})\, dx - \Lambda \int_{\Omega\setminus\Omega_{t-\delta}} (1 + |\nabla u|^p)\, dx - C\nu(\overline{L}_\delta).$$

En faisant tendre $\delta \to 0$, il vient

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla v_{n_k})\, dx \ge \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla u_{n_k})\, dx - \Lambda \int_{\Omega\setminus\Omega_t} (1 + |\nabla u|^p)\, dx - C\nu(\partial\Omega_t).$$

Comme les ensembles $\{\partial\Omega_t\}_{t>0}$ sont deux à deux disjoints, l'ensemble $\{t > 0 : \ (\mathcal{L}^N + \nu)(\partial\Omega_t) > 0\}$ est au plus dénombrable et on peut donc trouver une suite $t_i \searrow 0$ tel que $(\mathcal{L}^N + \nu)(\partial\Omega_{t_i}) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il vient alors en remplaçant t par t_i dans l'expression précédente et en faisant tendre $i \to +\infty$ que

$$\liminf_{k\to+\infty} \int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla v_{n_k})\, dx \ge \lim_{k\to+\infty} \int_\Omega f_{\varepsilon_{n_k}}(x, \nabla u_{n_k})\, dx.$$

On en déduit que

$$F'(u) \le \lim_{k\to+\infty} F_{\varepsilon_{n_k}}(v_{n_k}, \Omega) = \liminf_{n\to+\infty} F_{\varepsilon_n}(v_n, \Omega),$$

puis par passage à l'inf parmi toutes les suite $v_n \to u$ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ que $F'(u) \le F(u, \Omega)$. La formule avec la limsup se démontre de manière identique. □

Nous sommes à présent en mesure de montrer la propriété de convergence des suites minimisantes et de l'infimum. Soient $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et $g : \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory telle que

$$a_0(x) \le g(x, z) \le a_1(x) + b|z|^p) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } z \in \mathbb{R}^d, \tag{3.2.4}$$

où a_0, $a_1 \in L^1(\Omega)$ et $b > 0$. On considère la fonctionnelle $J_n : W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J_n(u) = \int_\Omega f_{\varepsilon_n}(x, \nabla u)\, dx + \int_\Omega g(x, u)\, dx$$

et le problème de minimisation

$$I_n := \inf_{v\in\bar{u}+W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)} J_n(v),$$

où $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite extraite satisfaisant la conclusion du Théorème 3.2.1 ait lieu. Alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.2.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Si $u_n \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ est telle que $J_{\varepsilon_n}(u_n) - I_n \to 0$, alors on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ où $u \in \bar{u} + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ est une solution de*

$$I := \min_{v \in \bar{u} + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)} \left\{ J(v) := \int_\Omega f(x, \nabla v)\, dx + \int_\Omega g(x, v)\, dx \right\}$$

et, de plus, $I_{n_k} \to I$.

Démonstration. Soit $G : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$G(v) = \int_\Omega g(x, v)\, dx \qquad \text{pour tout } v \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d).$$

D'après la condition de croissance (3.2.4), la fonctionnelle G est continue sur $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et la Remarque 3.1.3-3 implique que $F_{\varepsilon_n} + G$ Γ-converge vers $F + G$.

Soit $u_n \in \bar{u} + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ telle que $J_{\varepsilon_n}(u_n) - I_n \to 0$. D'après les propriétés de croissances (3.2.1) et (3.2.4), on a

$$\int_\Omega a_0\, dx \leq I_n \leq J_n(\bar{u}) \leq \int_\Omega (a_1 + b|\bar{u}|^p)\, dx + \Lambda \int_\Omega (1 + |\nabla \bar{u}|^p)\, dx,$$

et donc, la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Par conséquent, la suite $(J_{\varepsilon_n}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui implique que $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ et, d'après l'inégalité de Poincaré appliquée à $u_n - \bar{u}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$. On peut donc extraire une sous-suite (u_{n_k}) telle que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ avec $u \in \bar{u} + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et, d'après la borne inférieure,

$$J(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} J_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}).$$

Par ailleurs, d'après la Proposition 3.2.6, pour tout $v \in \bar{u} + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\bar{u} + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ telle que $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et

$$J_{\varepsilon_n}(v_n) \to J(v).$$

On en déduit que

$$J(u) \leq \liminf_{k\to+\infty} J_{\varepsilon_{n_k}}(u_{n_k}) \leq \liminf_{k\to+\infty} I_{n_k} \leq \limsup_{k\to+\infty} I_{n_k} \leq \limsup_{k\to+\infty} J_{\varepsilon_{n_k}}(v_{n_k}) = \lim_{n\to+\infty} J_{\varepsilon_n}(v_n) = J(v),$$

ce qui montre que u est un minimiseur de J sur $\bar{u} + W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ et donc que $I = J(u)$. En prenant $v = u$, les inégalités précédentes deviennent des égalités et il vient que $I_{n_k} \to I$. $\square$

Chapitre 4

Quelques applications

4.1 Relaxation

Nous avons vu précédemment que la quasiconvexité (la convexité dans le cas scalaire) de f est une condition nécessaire et suffisante à la faible semi-continuité inférieure de la fonctionnelle intégrale

$$u \mapsto W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d) \mapsto \int_\Omega f(\nabla u)\,dx.$$

Une question naturelle se pose alors : que se passe-t-il quand f n'est pas quasiconvexe ?

Exemple 4.1.1. Par exemple, si $N = d = 1$ et $\Omega = (0,1)$, on considère la fonction (non convexe) $f(\xi) = (1-\xi^2)^2$ et la suite $u_\varepsilon(x) = \varepsilon u(x/\varepsilon)$ où $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction 1-périodique définie par

$$u(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } n \leq x < n + \frac{1}{2}, \\ n + 1 - x & \text{si } n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1. \end{cases}$$

On a que $u_\varepsilon \rightharpoonup 0$ faiblement dans $W^{1,4}(0,1)$. Par conséquent, comme $u_\varepsilon'(x) = u'(\varepsilon x) \in \{-1, 1\}$ p.p dans $x \in (0,1)$, il vient

$$F(0) = 1 > 0 = F(u_\varepsilon).$$

De façon générale, considérons un espace métrique (X,d) et une fonctionnelle $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qui n'est pas semi-continue inférieurement sur X. On s'intéresse à déterminer une fonctionnelle $\overline{F}$ dont les minima sont les limites des suites minimisantes de F, autrement dit l'enveloppe semi-continue inférieure (ou relaxée) de F définie, pour tout $u \in X$, par

$$\overline{F}(u) = \sup\{G(u) : \ G \text{ semi-continue inférieurement et } G \leq F\}.$$

On a le résultat général suivant qui ramène le calcul de l'enveloppe semi-continue inférieure de F à celui de la Γ-limite de la suite stationnaire F.

Proposition 4.1.2. *Soit (X,d) un espace métrique et $F : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors l'enveloppe semi-continue inférieure de F coïncide avec la Γ-limite de F et elle est donnée par*

$$\overline{F}(u) = \inf\left\{\liminf_{j\to+\infty} F(u_j) : \ u_j \to u\right\} \qquad \textit{pour tout } u \in X.$$

Démonstration. Pour tout $u \in X$, notons

$$F'(u) = \inf \left\{ \liminf_{j\to+\infty} F(u_j) : \; u_j \to u \right\}$$

la Γ-limite inférieure de la suite stationnaire F et montrons que F' est la Γ-limite de F. La borne inférieure est évidente. Concernant la borne supérieure, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une suite $u_j^k \to u$ telle que

$$\liminf_{j\to+\infty} F(u_j^k) \leq F'(u) + \frac{1}{k}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une sous-suite $(u^k_{\varphi_k(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{j\to+\infty} F(u^k_{\varphi_k(j)}) = \liminf_{j\to+\infty} F(u_j^k) \leq F'(u) + \frac{1}{k}.$$

On construit ensuite une suite strictement croissante d'entiers $(\sigma_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $j \geq \sigma_k$,

$$d(u^k_{\varphi_k(j)}, u) \leq \frac{1}{k}, \quad F(u^k_{\varphi_k(j)}) \leq F'(u) + \frac{2}{k},$$

et on définit $v_j = u^k_{\varphi_k(j)}$ si $\sigma_k \leq j < \sigma_{k+1}$ de sorte que $v_j \to u$ et

$$\limsup_{j\to+\infty} F(v_j) \leq F'(u),$$

ce qui montre la borne supérieure.

D'après la Remarque 3.1.3, la fonctionnelle F' est semi-continue inférieurement et, par construction $F' \leq F$, ce qui montre que $F' \leq \overline{F}$. Par ailleurs, si G est une fonctionnelle semi-continue inférieurement telle $G \leq F$, alors pour toute suite $u_j \to u$,

$$G(u) \leq \liminf_{j\to+\infty} G(u_j) \leq \liminf_{j\to+\infty} F(u_j),$$

ce qui implique, par passage à l'infimum par rapport à toutes les suites $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que $G \leq F'$, ce qui montre que $\overline{F} \leq F'$ et donc que $F' = \overline{F}$ est effectivement l'enveloppe semi-continue inférieurement de F. $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à la relaxation de fonctionnelles intégrales. On considère une fonction continue $f : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ satisfaisant des propriétés de croissance et coercivité

$$\lambda|\xi|^p \leq f(\xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N}, \tag{4.1.1}$$

où $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ et $1 < p < \infty$. On définit la fonctionnelle $F : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ par

$$F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f(\nabla u)\, dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Théorème 4.1.3. *L'enveloppe semi-continue inférieurement de F dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ est donnée par $\overline{F} : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ par*

$$\overline{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega Qf(\nabla u)\, dx & \textit{si } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \textit{sinon,} \end{cases}$$

où $Qf : \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ est la quasiconvexification de f définie par

$$Qf(\xi) = \inf\left\{ \int_{(0,1)^N} f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy : \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1)^N;\mathbb{R}^d) \right\}.$$

Remarque 4.1.4. 1. D'après la propriété de croissance (4.1.1), on a aussi que

$$Qf(\xi) = \inf\left\{ \int_{(0,1)^N} f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy : \ \varphi \in W_0^{1,p}((0,1)^N;\mathbb{R}^d) \right\}.$$

2. Si f est quasiconvexe, alors on a par définition $Qf = f$.

Démonstration. D'après le Théorème 3.2.1, nous savons déjà qu'il existe une fonction de Carathéodory $\overline{f} : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\overline{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \overline{f}(x, \nabla u)\, dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il s'agit alors de montrer que $\overline{f} = Qf$. Dans la suite de la preuve, nous posons $u_\xi(x) := \xi x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, où $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$ est fixée.

Etape 1. Montrons que $\overline{f}$ est indépendante de la variable spatiale x. Soient x_0, $y_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $B_\rho(x_0) \subset \Omega$ et $B_\rho(y_0) \subset \Omega$. D'après la Remarque 3.2.5, il existe une suite $(u_n^\rho)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(B_\rho(x_0);\mathbb{R}^d)$ telle que $u_n^\rho \to u_\xi$ dans $L^p(B_\rho(x_0);\mathbb{R}^d)$ et

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_\rho(x_0)} f(\nabla u_n^\rho)\, dx \le \int_{B_\rho(x_0)} \overline{f}(x,\xi)\, dx + \rho^{N+1}.$$

On définit $v_n^\rho(x) = u_n^\rho(x - y_0 + x_0)$ de sorte que $v_n^\rho \in W^{1,p}(B_\rho(y_0);\mathbb{R}^d)$ et $v_n^\rho \to u_\xi + \xi(x_0 - y_0)$ dans $L^p(B_\rho(y_0);\mathbb{R}^d)$. Par conséquent, par changement de variables,

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(y_0)} \overline{f}(x,\xi)\, dx &\le \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_\rho(y_0)} f(\nabla v_n^\rho)\, dx \\ &= \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_\rho(x_0)} f(\nabla u_n^\rho)\, dx \le \int_{B_\rho(x_0)} \overline{f}(x,\xi)\, dx + \rho^{N+1}. \end{aligned}$$

En divisant l'inégalité précédente par $\omega_N \rho^N$ et en passant à la limsup quand $\rho \to 0$, on obtient $\overline{f}(y_0,\xi) \le \overline{f}(x_0,\xi)$. L'autre inégalité s'obtient en inversant les rôles de x_0 et y_0.

Etape 2 : borne inférieure. Soit $Q = x_0 + (0,\rho)^N$ un cube contenu dans Ω. Il existe une suite $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(Q;\mathbb{R}^d)$ telle que $u_j \to u_\xi$ dans $L^p(Q;\mathbb{R}^d)$ et

$$\liminf_{j\to+\infty} \int_Q f(\nabla u_j)\, dx \le \rho^{N+1} + \rho^N \overline{f}(\xi).$$

En particulier, d'après la condition de coercivité de f, on en déduit que la suite $(\nabla u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(Q;\mathbb{R}^{d\times N})$ ce qui implique que $u_j \rightharpoonup u_\xi$ faiblement dans $W^{1,p}(Q;\mathbb{R}^d)$. D'après la Proposition 3.2.6, on peut supposer sans restreindre la généralité que $u_j = u_\xi$ sur ∂Q, en particulier $\varphi := u_j - u_\xi \in W_0^{1,p}(Q;\mathbb{R}^d)$. On pose alors $\psi(x) = \varphi(x_0 + \rho x)/\rho$ de sorte que $\psi \in W_0^{1,p}((0,1)^N;\mathbb{R}^d)$ et, par définition de la quasiconvexification, on a

$$\int_Q f(\nabla u_j)\, dx = \int_Q f(\xi + \nabla\varphi)\, dx = \rho^N \int_{(0,1)^N} f(\xi + \nabla\psi)\, dx \ge \rho^N Qf(\xi).$$

En divisant par ρ^N et en faisant tendre $\rho \to 0$, on obtient que $\overline{f}(\xi) \geq Qf(\xi)$.

Etape 3 : borne supérieure. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(Q; \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\int_Q f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy \leq Qf(\xi) + \varepsilon.$$

On étend φ par Q-périodicité à tout $\mathbb{R}^N$ et on pose pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\varphi_j(x) = \frac{\varphi(jx)}{j}$$

de sorte que $\varphi_j \to 0$ fortement dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Dans ce cas,

$$|\Omega|\overline{f}(\xi) = \overline{F}(u_\xi) \leq \liminf_{j\to+\infty} F(u_\xi + \varphi_j) = \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega f(\xi + \varphi(jx))\, dx.$$

D'après le Théorème de Riemann-Lebesgue, on a $f(\xi + \varphi(j\cdot)) \rightharpoonup \int_Q f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy$ faiblement dans $L^1(\Omega)$, ce qui implique que

$$|\Omega|\overline{f}(\xi) \leq \liminf_{j\to+\infty} \int_\Omega f(\xi + \varphi(jx))\, dx = |\Omega| \int_Q f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy \leq |\Omega|(Qf(\xi) + \varepsilon).$$

Il suffit ensuite de faire tendre $\varepsilon \to 0$. □

Proposition 4.1.5. *La fonction Qf est l'enveloppe quasiconvexe de f, i.e., pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$,*

$$Qf(\xi) = \sup\{g(\xi) : g \text{ est quasiconvexe et } g \leq f\}.$$

Démonstration. En prenant $\Omega = B = B_1(0)$, le Théorème 4.1 précédent montre que la fonctionnelle

$$u \in L^p(B; \mathbb{R}^d) \mapsto \overline{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_B Qf(\nabla u)\, dx & \text{si } u \in W^{1,p}(B; \mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

est l'enveloppe semi-continue inférieurement de

$$u \in L^p(B; \mathbb{R}^d) \mapsto F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_B f(\nabla u)\, dx & \text{si } u \in W^{1,p}(B; \mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le Proposition 4.1.2 (ou la Remarque 3.1.3) montre alors que $\overline{F}$ est semi-continue inférieurement dans $L^p(B; \mathbb{R}^d)$. Par injection compacte de Rellich, $\overline{F}$ est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(B; \mathbb{R}^d)$, ce qui montre en vertu du Théorème 2.3.7 que Qf est quasiconvexe. Par ailleurs, on a clairement que $Qf \leq f$. Enfin, si $g \leq f$ et g est quasiconvexe, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1)^N; \mathbb{R}^d)$,

$$g(\xi) \leq \int_{(0,1)^N} g(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy \leq \int_{(0,1)^N} f(\xi + \nabla\varphi(y))\, dy.$$

Par passage à l'infimum en φ, on en déduit que $g \leq Qf$ ce qui montre que Qf est effectivement l'enveloppe quasiconvexe de f. □

Dans le cas scalaire, l'enveloppe quasiconvexe se réduit à l'enveloppe convexe. Pour revenir à l'exemple 4.1.1, si $N = d = 1$ et $\Omega = (0,1)$, alors la relaxée de la fonctionnelle

$$u \in L^4(0,1) \mapsto F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 (1-|u'|^2)^2\,dx & \text{si } u \in W^{1,4}(0,1), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$u \in L^4(0,1) \mapsto \overline{F}(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 Cf(u')\,dx & \text{si } u \in W^{1,4}(0,1), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $Cf(\xi) = (1-\xi^2)^2$ si $|\xi| > 1$ et $Cf(\xi) = 0$ si $|\xi| \leq 1$ est l'enveloppe convexe de $\xi \mapsto f(\xi) = (1-\xi^2)^2$.

Le calcul de l'enveloppe quasiconvexe est une question difficile à résoudre en pratique. Très peu d'exemples sont disponibles.

Exemple 4.1.6. On définit la fonction de Kohn-Strang $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to [0,+\infty)$ par

$$f(\xi) = \begin{cases} 1+|\xi|^2 & \text{si } \xi \neq 0, \\ 0 & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Cette fonctionnelle apparaît naturellement dans les problèmes d'optimisation de forme ou d'endommagement. On peut montrer (voir [4, Lemma A.2-2.7]) que l'enveloppe convexe de f est donnée par

$$Cf(\xi) = \begin{cases} 1+|\xi|^2 & \text{si } |\xi| \geq 1, \\ 2|\xi| & \text{si } |\xi| < 1, \end{cases}$$

et l'enveloppe quasiconvexe est donnée par

$$Qf(\xi) = \begin{cases} 1+|\xi|^2 & \text{si } |\xi|^2 + 2|\mathrm{det}\xi| \geq 1, \\ 2\sqrt{|\xi|^2 + 2|\mathrm{det}\xi|} - 2|\mathrm{det}\xi| & \text{si } |\xi|^2 + 2|\mathrm{det}\xi| < 1. \end{cases}$$

4.2 Homogénéisation

On s'intéresse à présent à un problème de Γ-convergence avec une échelle de microstructure. On considère une fonction de Carathéodory $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{d\times N} \to [0,+\infty)$ satisfaisant

i) $f(\cdot,\xi)$ est 1-périodique pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$;

ii) il existe λ, $\Lambda > 0$ et $1 < p < \infty$, tels que

$$\lambda|\xi|^p \leq f(y,\xi) \leq \Lambda(1+|\xi|^p) \quad \text{p.p. tout } y \in \mathbb{R}^N \text{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N}.$$

On définit la fonctionnelle intégrale $F_\varepsilon : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ par

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla u\right) dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{si } u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \setminus W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

On peut interpréter cette fonctionnelle comme l'énergie contenue dans un corps élastique ayant des hétérogénéités périodiquement distribuées de période $\varepsilon > 0$ très petite. On cherche alors à essayer de déterminer un milieu élastique "moyenné", ou homogénéisé, en faisant tendre la période de la microstructure vers 0. Nous avons le résultat suivant obtenu indépendamment par Braides [2] et Müller [8].

Théorème 4.2.1. *La fonctionnelle F_ε Γ-converge dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ vers la fonctionnelle homogénéisée $F_{\text{hom}} : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ définie par*

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega f_{\text{hom}}(\nabla u)dx & si\ u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & si\ u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \setminus W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où f_{hom} est donnée par la formule de cellule

$$f_{\text{hom}}(\xi) = \lim_{T\to+\infty} \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}((0,T)^N;\mathbb{R}^d)} \fint_{(0,T)^N} f(y, \xi + \nabla\varphi(y))\, dy \qquad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N}.$$

Remarque 4.2.2. 1. Dans la formule de cellule qui définit f_{hom}, il est sous-entendu que la limite quand la période $T \to +\infty$ existe. Il s'agit d'une propriété dite d'ergodicité qui se généralise pour des géométries plus complexes comme dans le cas quasi-périodique ou même stochastique (voir le Lemme 4.2.3 ci dessous).

2. si $f = f(\xi)$ est indépendante de la variable spatiale y, alors la formule de cellule se réduit à la formule de quasiconvexification de f.

3. Si f est convexe par rapport à la variable ξ, il est possible de montrer que la formule de cellule se réduit à

$$f_{\text{hom}}(\xi) = \inf_{\varphi \in W_{\text{per}}^{1,p}((0,1)^N;\mathbb{R}^d)} \int_{(0,1)^N} f(y, \xi + \nabla\varphi(y))\, dy \qquad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{d\times N}.$$

Nous renvoyons pour cela au [3, Theorem 14.7]. Néanmoins, dans le cas non convexe, il est vraiment nécessaire de considérer la limite d'une famille de problèmes de minimisation posés sur des cellules qui envahissent l'espace (voir le contre-exemple de Müller [3, Example 14.12]).

Lemme 4.2.3. *La limite*

$$\lim_{T\to+\infty} \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}((0,T)^N;\mathbb{R}^d)} \fint_{(0,T)^N} f(y, \xi + \nabla\varphi(y))\, dy$$

existe pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{d\times N}$.

Démonstration. On pose, pour tout $t > 0$,

$$g_t := \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}((0,t)^N;\mathbb{R}^d)} \fint_{(0,t)^N} f(y, \xi + \nabla\varphi(y))\, dy,$$

et on considère $\varphi_t \in W_0^{1,p}((0,t)^N;\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\fint_{(0,t)^N} f(y, \xi + \nabla\varphi_t(y))\, dy \le g_t + \frac{1}{t}.$$

Si $s > t$, nous allons construire une fonction $\psi_s \in W_0^{1,p}((0,s)^N;\mathbb{R}^d)$ comme suit. Tout d'abord, on étend φ_t par zéro sur le plus grand cube $(0,[t]+1)^N$ et on subdivise $(0,s)^N$ en l'union disjointe de translatés de $(0,[t]+1)^N$. Soit I l'ensemble des indices $i = (i_1,\dots,i_N) \in \mathbb{Z}^N$ tels que $0 \le ([t]+1)(i_j+1) \le s$ pour tout $j = 1,\dots,N$. Notons que

$$\frac{s^N}{t^N} \ge \#(I) = \left(\left[\frac{s}{[t]+1}\right] - 1\right)^N \ge \left(\frac{s}{[t]+1} - 2\right)^N \ge \frac{(s-2t-2)^N}{(t+1)^N}.$$

On définit pour tout $y \in (0,s)^N$,

$$\psi_s(y) := \begin{cases} \varphi_t(y-i) & \text{si } y \in i + (0,t)^N,\ i \in I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $E_s = (0,s)^N \setminus \bigcup_{i\in I}(i + (0,t)^N)$, on a

$$|E_s| = s^N - t^N \#(I) \leq s^N - (s-2t-2)^N \frac{t^N}{(t+1)^N}.$$

Par définition de g_s, on a

$$\begin{aligned} g_s &\leq \fint_{(0,s)^N} f(y, \xi + \nabla\psi_s(y))\, dy \\ &= \frac{1}{s^N}\left(\sum_{i\in I}\int_{i+(0,t)^N} f(y, \xi + \nabla\varphi_t(y-i))\, dy + \int_{E_s} f(y,\xi)\, dy\right) \\ &\leq \frac{1}{s^N}\left(\sum_{i\in I}\int_{(0,t)^N} f(x+i, \xi + \nabla\varphi_t(x)\, dx + \Lambda(1+|\xi|^p)|E_s|\right) \\ &= \frac{1}{s^N}\left(\sum_{i\in I}\int_{(0,t)^N} f(x, \xi + \nabla\varphi_t(x)\, dx + \Lambda(1+|\xi|^p)|E_s|\right) \\ &\leq \frac{1}{s^N}\left(\#(I)t^N\left(g_t + \frac{1}{t}\right) + \Lambda(1+|\xi|^p)|E_s|\right) \\ &\leq g_t + \frac{1}{t} + \Lambda(1+|\xi|^p)\left(1 - \frac{(s-2t-2)^N t^N}{s^N(t+1)^N}\right). \end{aligned}$$

En faisant tendre d'abord $s \to +\infty$, puis $t \to +\infty$, il vient

$$\limsup_{s\to+\infty} g_s \leq \liminf_{t\to+\infty} g_t,$$

ce qui montre l'existence de la limite. $\square$

Démonstration du Théorème 4.2.1. D'après le Théorème 3.2.1, pour toute suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(\varepsilon_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction de Carathéodory $\overline{f} : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to [0,+\infty)$ satisfaisant les mêmes propriétés de croissance et coercivité que f, tels que la fonctionnelle $F_{\varepsilon_{j_n}}$ Γ-converge dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ vers la fonctionnelle $F : L^p(\Omega;\mathbb{R}^d) \to [0,+\infty]$ donnée par

$$F(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \overline{f}(x, \nabla u)\, dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Etape 1. Montrons tout d'abord que $\overline{f}$ est indépendante de la variable spatiale x. Soient x_0, $y_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$ tels que $B_\rho(x_0) \cup B_\rho(y_0) \subset \Omega$. D'après la Proposition 3.2.6, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W_0^{1,p}(B_\rho(x_0);\mathbb{R}^d))$ telle que $u_n \to 0$ dans $L^p(B_\rho(x_0);\mathbb{R}^d)$ et

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_\rho(x_0)} f\left(\frac{x}{\varepsilon_{j_n}}, \xi + \nabla u_n\right) dx \leq \int_{B_\rho(x_0)} \overline{f}(x,\xi)\, dx + \rho^{N+1}.$$

Soit $\tau_n = \varepsilon_{j_n}\left[\frac{y_0-x_0}{\varepsilon_{j_n}}\right]$. Comme $\tau_n \to y_0 - x_0$, alors si $t > 1$, on a $B_\rho(x_0+\tau_n) \subset B_{t\rho}(y_0)$ pour n assez grand. On étend la suite u_n par 0 à l'extérieur de $B_\rho(x_0)$ et pour presque tout $x \in B_{t\rho}(y_0)$, on pose

$$v_n(x) = u_n(x-\tau_n).$$

On a alors,

$$\int_{B_{t\rho}(y_0)} |v_n(x)|^p\,dx = \int_{B_\rho(x_0+\tau_n)} |u_n(x-\tau_n)|^p\,dx = \int_{B_\rho(x_0)} |u_n(y)|^p\,dy \to 0$$

ce qui montre que $v_n \to 0$ dans $B_{t\rho}(y_0)$ et donc,

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(y_0)} \overline{f}(x,\xi)\,dx &\le \int_{B_{t\rho}(y_0)} \overline{f}(x,\xi)\,dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_{t\rho}(y_0)} f\left(\frac{x}{\varepsilon_{j_n}}, \xi + \nabla v_n(x)\right) dx \\
&\le \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_\rho(x_0+\tau_n)} f\left(\frac{x}{\varepsilon_{j_n}}, \xi + \nabla u_n(x-\tau_n)\right) dx + \Lambda(1+|\xi|^p)|B_{t\rho}(y_0) \setminus B_\rho(x_0+\tau_n)| \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_\rho(x_0)} f\left(\frac{y}{\varepsilon_{j_n}} + \left[\frac{y_0-x_0}{\varepsilon_{j_n}}\right], \xi + \nabla u_n(y)\right) dy + \Lambda(1+|\xi|^p)\omega_N\rho^N(t^N-1) \\
&= \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_\rho(x_0)} f\left(\frac{y}{\varepsilon_{j_n}}, \xi + \nabla u_n(y)\right) dy + \Lambda(1+|\xi|^p)\omega_N\rho^N(t^N-1) \\
&\le \int_{B_\rho(x_0)} \overline{f}(x,\xi)\,dx + \rho^{N+1} + \Lambda(1+|\xi|^p)\omega_N\rho^N(t^N-1).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $t \searrow 1$, on obtient

$$\int_{B_\rho(y_0)} \overline{f}(x,\xi)\,dx \le \int_{B_\rho(x_0)} \overline{f}(x,\xi)\,dx + \rho^{N+1}.$$

On obtient finalement que $\overline{f}(y_0,\xi) \le \overline{f}(x_0,\xi)$ en divisant l'expression précédente par $\omega_N\rho^N$ et en passant à la limsup quand $\rho \to 0$. L'autre inégalité se montre en inversant les rôles de x_0 et y_0.

Etape 2. Comme $\overline{f}$ est une fonction quasiconvexe, on a

$$\overline{f}(\xi) = \min_{\varphi \in W_0^{1,p}((0,1)^N;\mathbb{R}^d)} \int_{(0,1)^N} \overline{f}(\xi + \nabla\varphi(y))\,dy,$$

puis, d'après le Théorème 3.2.7 appliqué à $u_0(x) = \xi x$ et $g = 0$, on a (quitte à extraire une nouvelle sous-suite)

$$\begin{aligned}
&\min_{\varphi \in W_0^{1,p}((0,1)^N;\mathbb{R}^d)} \int_{(0,1)^N} \overline{f}(\xi + \nabla\varphi(x))\,dx \\
&\qquad = \lim_{n\to+\infty} \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}((0,1)^N;\mathbb{R}^d)} \int_{(0,1)^N} f\left(\frac{x}{\varepsilon_{j_n}}, \xi + \nabla\varphi(x)\right) dx \\
&\qquad\qquad = \lim_{n\to+\infty} \inf_{\psi \in W_0^{1,p}((0,T_n)^N;\mathbb{R}^d)} \frac{1}{T_n^N} \int_{(0,T_n)^N} f\left(y, \xi + \nabla\psi(y)\right) dy,
\end{aligned}$$

où $T_n = 1/\varepsilon_{j_n}$. D'après le Lemme 4.2.3, il vient que $\overline{f}(\xi) = f_{\mathrm{hom}}(\xi)$ et donc $F = F_{\mathrm{hom}}$.

Etape 3. Nous avons montré que, de toute sous-suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une nouvelle sous-suite $(\varepsilon_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $F_{\varepsilon_{j_n}}$ Γ-converge vers la même limite F_{hom}. D'après la propriété d'Urysohn (voir la Proposition 3.1.7), on en déduit que c'est toute la suite F_ε qui Γ-converge vers F_{hom}. □

Il est en général très difficile de calculer explicitement la formule de cellule sauf dans des cas très particuliers qui se ramènent à un calcul $1D$.

Exemple 4.2.4. Suppposons que $N = d = 1$ et $f(y, \xi) = a(y)|\xi|^2$ pour tout $(y, \xi) \in \mathbb{R}^2$, où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction mesurable 1-périodique telle que $0 < \lambda \leq a(y) \leq \Lambda < +\infty$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Comme la limite qui définit la formule de cellule existe, on peut se restreindre à une période $k \in \mathbb{N}$. Soit $u_k \in H^1_0(0, k)$ une solution du problème de minimisation

$$\min_{v \in H^1_0(0,k)} \int_0^k a(y)|\xi + v'(y)|^2 \, dy.$$

L'équation d'Euler-Lagrange montre que u_k est solution de $[a(\xi+u'_k)]' = 0$ au sens des distributions dans $(0, k)$. En particulier, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ (qui dépend de k et ξ) telle que $a(\xi+u'_k) = c$ p.p. dans $(0, k)$ et donc, comme a ne s'annule jamais et $u_k(0) = 0$,

$$u_k(x) = \int_0^x \left(\frac{c}{a(y)} - \xi \right) dy.$$

On utilise maintenant le fait que $u_k(k) = 0$, ce qui implique que

$$c = \xi \left(\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} \right)^{-1},$$

où l'on a utilisé le fait que a est 1-périodique et $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{hom}}(\xi) = \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \int_0^k a(y)|\xi + u'_k(y)|^2 \, dy \\ = \lim_{k \to +\infty} \frac{c}{k} \int_0^k (\xi + u'_k(y)) \, dy = c\xi = \left(\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} \right)^{-1} |\xi|^2. \end{aligned}$$

4.3 Réduction de dimension

On considère un dernier exemple de modélisation de plaques bi-dimensionnelles à partir de l'élasticité non linéaire tridimensionnelle. On s'intéresse à un milieu élastique dont l'épaisseur est beaucoup plus petite que les autres dimensions. Ce milieu occupe le cylindre $\Omega_\varepsilon = \omega \times (-\varepsilon/2, \varepsilon/2)$ au repos, où $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un ouvert borné et $\varepsilon > 0$ est petit.

L'énergie élastique contenue dans un tel matériau est donnée par

$$v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3) \mapsto \int_{\Omega_\varepsilon} W(\nabla v) \, dx,$$

où $W : \mathbb{R}^{3\times3} \to [0, +\infty)$ est une fonction continue satisfaisant

$$\lambda|\xi|^p \leq W(\xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{3\times3}$$

avec λ, $\Lambda > 0$ et $1 < p < \infty$. On s'intéresse au comportement asymptotique de cette énergie lorsque $\varepsilon \to 0$, i.e., lorsque la configuration de référence du milieu "converge" vers une surface plane de l'espace. La première difficulté à laquelle nous sommes confrontés est le fait que l'espace ambiant $W^{1,p}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3)$ dépend du paramètre ε. Nous allons donc remettre à l'échelle ce problème dans une configuration unitaire $\Omega = \Omega_1$ en posant, pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega_\varepsilon; \mathbb{R}^3)$,

$$u(x_1, x_2, x_3) = v(x_1, x_2, \varepsilon x_3) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega.$$

Dans la suite, on posera $x' = (x_1, x_2)$ la variable planaire et ∇' le gradient par rapport à x'. On a alors que $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ et, d'après la formule de changement de variables

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_\varepsilon} W(\nabla v)\, dx = \int_\Omega W\left(\nabla' u \Big| \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 u\right) dx.$$

On définit la fonctionnelle intégrale $E_\varepsilon : L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \to [0, +\infty]$ par

$$E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega W\left(\nabla' u \Big| \frac{1}{\varepsilon}\partial_3 u\right) dx & \text{si } u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{si } u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \setminus W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3). \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant de Γ-convergence dû à Le Dret & Raoult [7].

Théorème 4.3.1. *La famille E_ε Γ-converge dans $L^p(\Omega; \mathbb{R}^3)$ vers la fonctionnelle $E : L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \to [0, +\infty]$ définie par*

$$E(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\omega QW_0(\nabla' u)\, dx & \textit{si } u \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \textit{si } u \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^3) \setminus W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3), \end{cases}$$

où $W_0(\xi) = \min_{z \in \mathbb{R}^3} W(\xi|z)$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ et QW_0 est la quasiconvexification de W_0 définie par

$$QW_0(\xi) = \inf_{\varphi \in W_0^{1,p}((0,1)^2;\mathbb{R}^3)} \int_{(0,1)^2} W_0(\xi + \nabla'\varphi(y'))\, dy' \quad \textit{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Remarque 4.3.2. Notons que le modèle limite est un modèle “réduit” car le domaine de la Γ-limite est donné par $W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$, c'est à dire des champs de vecteurs $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$ bidimensionnels, i.e., tels que $\partial_3 u = 0$ p.p. dans Ω.

Commençons par montrer un lemme de sélection mesurable pour les solutions du problème de minimisation définissant $W_0(\xi(x))$ lorsque $\xi : \omega \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ est une fonction mesurable.

Lemme 4.3.3. *Pour toute fonction mesurable $\xi : \omega \to \mathbb{R}^{3\times 2}$, il existe une fonction mesurable $b : \omega \to \mathbb{R}^3$ telle que*

$$W_0(\xi(x)) = W(\xi(x)|b(x)) \quad \textit{pour presque tout } x \in \omega.$$

Si de plus $\xi \in L^p(\omega; \mathbb{R}^{3\times 2})$, alors $b \in L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$.

Démonstration. Si $\xi(x) = \xi \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ est constante, comme la fonction $z \mapsto W(\xi|z)$ est continue et coercive, il existe un $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $W_0(\xi) = W(\xi|b) = \min_{z\in\mathbb{R}^3} W(\xi|z)$.

Si $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_i \chi_{A_i}$ est une fonction étagée avec $\xi_i \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ pour tout $1 \le i \le m$ et $A_1, \dots, A_m$ est une partition mesurable de ω, alors pour tout $1 \le i \le m$, il existe $b_i \in \mathbb{R}^3$ tel que $W_0(\xi_i) = W(\xi_i|b_i)$. On définit alors $b = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{A_i}$ qui est une fonction mesurable de $\omega \to \mathbb{R}^3$ et qui satisfait $W_0(\xi) = W(\xi|b)$ p.p. dans ω.

Enfin, si $\xi : \omega \to \mathbb{R}^{3\times 2}$ est une fonction mesurable, il existe une suite $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées telle que $\xi_k \to \xi$ p.p. dans ω. Soit $b_k : \omega \to \mathbb{R}^3$ une fonction étagée mesurable telle que $W_0(\xi_k) = W(\xi_k|b_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, comme W_0 est défini comme un infimum de fonctions continues, alors W_0 est semi-continue supérieurement ce qui montre que

$$\limsup_{k\to+\infty} W_0(\xi_k) \le W_0(\xi).$$

Par ailleurs, on pose $b = \limsup_k b_k$ (composante par composante) qui définit une fonction mesurable. Pour tout $x \in \omega$, on extrait une sous-suite (qui dépend de x) telle que $b(x) = \lim_k b_{\sigma_x(k)}(x)$. Par continuité de W, pour presque tout $x \in \omega$, on a

$$W_0(\xi(x)) \le W(\xi(x)|b(x)) = \lim_{k\to+\infty} W(\xi_{\sigma_x(k)}(x)|b_{\sigma_x(k)}(x))$$
$$= \lim_{k\to+\infty} W_0(\xi_{\sigma_x(k)}(x)) \le \limsup_{k\to+\infty} W_0(\xi_k).$$

En regroupant les inégalités précédentes, on en déduit que $W_0(\xi) = W(\xi|b)$ p.p. dans ω.

Supposons maintenant que $\xi \in L^p(\omega;\mathbb{R}^{3\times 2})$. Pour montrer que $b \in L^p(\omega;\mathbb{R}^3)$, on utilise les propriétés de croissance et de coercivité de W pour obtenir que

$$\lambda \int_\omega |b|^p\, dx' \le \lambda \int_\omega |(\xi|b)|^p\, dx' \le \int_\omega W(\xi|b)\, dx'$$
$$= \int_\omega W_0(\xi)\, dx \le \int_\omega W(\xi|0) \le \Lambda \int_\omega (1+|\xi|^p)\, dx' < \infty,$$

ce qui conclut la preuve du lemme. □

Démonstration. D'après le Théorème 3.2.1, pour toute suite $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$, il existe une sous-suite $(\varepsilon_n = \varepsilon_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la fonctionnelle E_{ε_n} Γ-converge dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^d)$ vers une fonctionnelle $\overline{E}$. La preuve est ensuite divisée en quatre étapes pour montrer que $\overline{E} = E$.

Etape 1 : compacité. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ et

$$\liminf_{n\to+\infty} E_{\varepsilon_n}(u_n) < +\infty.$$

Alors, quitte à extraire une sous-suite, la borne inférieure de coercivité implique que

$$\int_\Omega \left| \left(\nabla' u_n \Big| \frac{1}{\varepsilon_n}\partial_3 u_n\right)\right|^p dx \le C.$$

En particulier, si $\varepsilon_n < 1$, on a que $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^{3\times 3})$ ce qui implique que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ et aussi que $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Par ailleurs, on a également

$$\int_\Omega |\partial_3 u_n|^p\, dx \le C\varepsilon_n.$$

Par semi-continuité inférieure de la norme pour la convergence faible, on en déduit que

$$\int_\Omega |\partial_3 u|^p\, dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\partial_3 u_n|^p\, dx = 0,$$

ce qui montre que $\partial_3 u = 0$ p.p. dans Ω. La fonction u peut donc être identifiée à un élément de $W^{1,p}(\omega;\mathbb{R}^3)$.

Etape 2 : borne inférieure. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$. Si $\liminf_n E_{\varepsilon_n}(u_n) = +\infty$, il n'y a rien à montrer. Si en revanche $\liminf_n E_{\varepsilon_n}(u_n) < \infty$, l'étape 1 montre que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$ avec $u \in W^{1,p}(\omega;\mathbb{R}^3)$. Comme $QW_0 \le W_0 \le W$, on en déduit que

$$\liminf_{n\to+\infty} E_{\varepsilon_n}(u_n) \ge \liminf_{n\to+\infty} E_{\varepsilon_n}(u_n) \int_\Omega QW_0(\nabla' u_n)\, dx.$$

Montrons que QW_0 est quasiconvexe de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour ce faire, on considère une fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1)^3;\mathbb{R}^3)$. En particulier, pour tout $x_3 \in (0,1)$, on a que $\psi(\cdot, x_3) \in \mathcal{C}_c^\infty((0,1)^2;\mathbb{R}^3)$, ce qui montre que pour tout $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$,

$$QW_0(\overline{\xi}) \leq \int_{(0,1)^2} QW_0(\overline{\xi} + \nabla'\psi(x', x_3))\, dx'$$

puis, par le Théorème de Fubini que

$$QW_0(\overline{\xi}) \leq \int_0^1 \int_{(0,1)^2} QW_0(\overline{\xi} + \nabla'\psi(x', x_3))\, dx'\, dx_3 = \int_{(0,1)^3} QW_0(\overline{\xi} + \nabla'\psi(x))\, dx.$$

Comme $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^3)$, le Théorème 2.3.7 de semi-continuité inférieure implique que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega QW_0(\nabla' u_n)\, dx \geq \int_\Omega QW_0(\nabla' u)\, dx = \int_\omega QW_0(\nabla' u)\, dx'$$

car u est indépendante de x_3. On a donc montré que

$$\liminf_{n\to+\infty} E_{\varepsilon_n}(u_n) \geq \int_\omega QW_0(\nabla' u)\, dx' = E(u),$$

puis, par passage à l'infimum parmi toutes les suites, que $\overline{E} \geq E$.

Etape 3 : borne supérieure. Si $u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^3) \setminus W^{1,p}(\omega;\mathbb{R}^3)$, alors $E(u) = +\infty$ et il n'y a rien à montrer. On suppose donc que $u \in W^{1,p}(\omega;\mathbb{R}^3)$. D'après le Lemme 4.3.3, il existe une fonction $b \in L^p(\omega;\mathbb{R}^3)$ telle que

$$W_0(\nabla' u(x')) = W(\nabla' u(x')|b(x')) \quad \text{p.p. tout } x' \in \omega.$$

Soit $b_k \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega;\mathbb{R}^3)$ telle que $b_k \to b$ fortement dans $L^p(\omega;\mathbb{R}^3)$. On pose alors $u_n^k(x) = u(x') + \varepsilon_n x_3 b_k(x')$ pour presque tout $x \in \Omega$ de sorte que $u_n^k \to u$ fortement dans $L^p(\Omega;\mathbb{R}^3)$ quand $n \to +\infty$. Comme $\nabla' u_n^k(x) = \nabla' u(x') + \varepsilon_n x_3 \nabla' b_k(x')$ et $\partial_3 u_n^k(x) = \varepsilon_n b_k(x')$ pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\int_\Omega W\left(\nabla' u_n^k \Big| \frac{1}{\varepsilon_n}\partial_3 u_n^k\right) dx = \int_\Omega W\left(\nabla' u(x') + \varepsilon_n x_3 \nabla' b_k(x') \big| b_k(x')\right) dx$$

et, par convergence dominée et continuité de W,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega W\left(\nabla' u_n^k \Big| \frac{1}{\varepsilon_n}\partial_3 u_n^k\right) dx = \int_\Omega W\left(\nabla' u \big| b_k\right) dx.$$

Par définition de la Γ-convergence, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\overline{E}(u) \leq \int_\Omega W\left(\nabla' u \big| b_k\right) dx,$$

puis, par passage à la limite quand $k \to +\infty$ et par convergence dominée,

$$\overline{E}(u) \leq \int_\Omega W\left(\nabla' u \big| b\right) dx = \int_\Omega W_0\left(\nabla' u\right) dx = \int_\omega W_0\left(\nabla' u\right) dx',$$

où l'on a utilisé le fait que la fonction u est indépendante de x_3.

On définit, pour tout $u \in L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$,

$$G(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\omega W_0(\nabla' u)\, dx' & \text{si } u \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons montré jusque là que $\overline{E} \leq G$. D'après la Remarque 3.1.3-1, la Γ-limite $\overline{E}$ est semi-continue inférieurement dans $L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$. Par conséquent, $\overline{E}$ est plus petite que la relaxée de G dans $L^p(\omega; \mathbb{R}^3)$, et donc d'après le Théorème 4.1.3, pour tout $u \in W^{1,p}(\omega; \mathbb{R}^3)$,

$$\overline{E}(u) \leq \int_\omega QW_0(\nabla' u)\, dx' = E(u),$$

ce qui conclut la preuve de la borne supérieure.

Etape 4 : conclusion. Par la propriété d'Urysohn, comme la Γ-limite est unique, on en déduit que c'est tout la suite E_ε qui Γ-convergence vers E. □

Exemple 4.3.4. Une énergie fréquemment rencontrée en élasticité non linéaire est celle de Saint Venant-Kirchhoff définie, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, par

$$W(\xi) = \frac{\mu}{4}\mathrm{tr}((\xi^T\xi - I)^2) + \frac{\lambda}{8}(\mathrm{tr}(\xi^T\xi - I))^2,$$

où $\lambda \geq 0$ et $\mu > 0$ sont les coefficients de Lamé. Il est établi dans [7, Proposition 16] que, pour tout $\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$,

$$\begin{aligned} QW_0(\overline{\xi}) \quad = \quad & \frac{E}{8}\left(v_2(\overline{\xi})^2 - 1\right)_+^2 \\ & + \frac{E}{8(1-\nu^2)}\left(v_1(\overline{\xi})^2 + \nu v_2(\overline{\xi})^2 - (1+\nu)\right)_+^2 \\ & + \frac{E}{8(1-\nu^2)(1-2\nu)}\left(\nu v_1(\overline{\xi})^2 + v_2(\overline{\xi})^2 - (1+\nu)\right)_+^2, \end{aligned}$$

où $v_1(\overline{\xi}) \leq v_2(\overline{\xi})$ sont les valeurs propres de $\overline{\xi}^T\overline{\xi} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ est le module de Young et $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ est le coefficient de Poisson.

Chapitre 5

Régularité des quasi-minimiseurs

Dans ce chapitre, on considère un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et une fonction de Carathéodory $f : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(z, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d\times N}$ et presque tout $x \in \Omega$,

$$\lambda|\xi|^p - b|z|^p - a(x) \leq f(x, z, \xi) \leq \Lambda|\xi|^p + b|z|^p + a(x),$$

où $1 \leq p < \infty$, $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$, $b > 0$ et $a \in L^1(\Omega)$ avec $a \geq 0$ p.p. dans Ω. Pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$, on définit

$$F(u) := \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx.$$

Définition 5.0.5. Une fonction $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ est un *quasi-minimiseur* de F si pour tout $v \in u + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$,

$$F(u) \leq F(v).$$

5.1 Théorème de régularité de Meyers

Le théorème de régularité de Meyers affirme que tout quasi-minimiseur d'une fonctionnelle intégrale à croissance polynomiale par rapport au gradient, possède une meilleure intégrabilité de Sobolev que celle initialement donnée par l'espace d'énergie. C'est un résultat très général qui est vrai lorsque les coefficients sont très peu réguliers ainsi que dans le cas vectoriel.

Théorème 5.1.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ un quasi-minimiseur de F avec $a \in L^s(\Omega)$ avec $s > 1$. Alors il existe $r > p$ tel que $u \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$.*

Quand l'exposant p est suffisamment grand, on obtient de la régularité Höldérienne pour les quasi-minimiseurs.

Corollaire 5.1.2. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ un quasi-minimiseur de F avec $a \in L^s(\Omega)$ avec $s > 1$. Si $p \geq N$, alors il existe $\alpha \in (0, 1)$ tel que $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega; \mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Si $p > N$, alors par injection de Sobolev, si $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ est un quasi-minimiseur de F, alors $u \in \mathcal{C}^{0,1-N/p}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^d)$. Si $p = N$, alors l'exposant de Meyers $r > N$ et donc, de nouveau par injection de Sobolev, on a $u \in \mathcal{C}^{0,1-N/r}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. □

Remarque 5.1.3. Dans le cas scalaire $d = 1$, la régularité Höldérienne des quasi-minimiseurs reste vraie pour des exposants petits $p < N$. Il s'agit d'une généralisation du Théorème de De Giorgi-Nash-Moser dont on peut trouver une preuve dans [6].

Commençons par montrer un lemme qui sera fort utile par la suite.

Lemme 5.1.4. *Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive et bornée sur $[\rho, R]$ telle que pour tout $\rho \leq s < r \leq R$,*

$$\Phi(s) \leq \vartheta\Phi(t) + \frac{A}{(t-s)^\alpha} + B,$$

où A, $B > 0$ et $\alpha > 1$ et $0 \leq \vartheta < 1$. Alors il existe une constante $c = c(\alpha, \vartheta) > 0$ telle que

$$\Phi(\rho) \leq c\left[\frac{A}{(R-\rho)^\alpha} + B\right].$$

Démonstration. Soit $\lambda \in (0,1)$ tel que $\lambda^{-\alpha}\vartheta < 1$. On définit par la récurrence la suite $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en posant $t_0 = \rho$, et pour tout $i \geq 0$, $t_{i+1} = t_i + (1-\lambda)\lambda^i(R-\rho)$. En appliquant l'hypothèse avec $s = t_i$ et $t = t_{i+1}$, obtient on montre que

$$\begin{aligned}\Phi(\rho) &= \Phi(t_0) \leq \vartheta\Phi(t_1) + \frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(R-\rho)^\alpha} + B \\ &\leq \vartheta^k\Phi(t_k) + \left(\sum_{i=0}^{k-1}(\vartheta\lambda^{-\alpha})^i\right)\left[\frac{A}{(1-\lambda)^\alpha(R-\rho)^\alpha} + B\right].\end{aligned}$$

En faisant tendre $k \to +\infty$, on obtient l'inégalité souhaitée avec $c = \sum_{i=1}^{\infty}(\theta\lambda^{-\alpha})^i = \frac{(1-\lambda)^{-\alpha}}{1-\vartheta\lambda^{-\alpha}}$. □

Commençons par établir une négalité de Caccioppoli et une inégalité de Hölder inversée.

Théorème 5.1.5. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ un quasi-minimiseur de F. Alors il existe des constantes $R_0 = R_0(\lambda, \Lambda, N, p, b) > 0$ et $C = C(\lambda, \Lambda, N, p, b) > 0$ telles que pour tout $R < R_0$ et toute boule B_R avec $\overline{B}_R \subset \Omega$, on a l'inégalité de Caccioppoli*

$$\int_{B_{R/2}} (|u|^p + |\nabla u|^p)\,dx \leq C\left\{\frac{1}{R^p}\int_{B_R}|u-u_R|^p\,dx + |B_R|\left(\fint_{B_R}|u|\,dx\right)^p + \int_{B_R} a\,dx\right\}$$

et l'inégalité de Hölder inversée

$$\fint_{B_{R/2}} (|u|^p + |\nabla u|^p)\,dx \leq C\left\{\left(\fint_{B_R}(|u|^p + |\nabla u|^p)^m\,dx\right)^{1/m} + \fint_{B_R} a\,dx\right\},$$

avec $m = N/(p+N) < 1$.

Démonstration. Soit $B = B_R$ une boule telle que $\overline{B}_R \subset \Omega$. Soient $R/2 < s < t \leq R$ et $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ une fonction cut-off telle que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ sur B_s, $\eta = 0$ sur $B \setminus B_t$ et $|\nabla\eta| \leq \frac{2}{t-s}$. On note $u_t := \fint_{B_t} u\,dx$ la moyenne de u sur B_t.

On définit le compétiteur $v = u - \eta(u-u_t) \in u + W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$. Comme u est un quasi-minimiseur, on a que

$$F(u) \leq F(v)$$

et comme $v = u$ p.p. sur $\Omega \setminus B_t$,

$$\int_{B_t}(\lambda|\nabla u|^p - b|u|^p - a)\,dx \leq \int_{B_t}(\Lambda|\nabla v|^p + b|v|^p + a)\,dx.$$

Comme $u = u_t + (u - u_t)$, $v = u_t + (1 - \eta)(u - u_t)$ et $\nabla v = (1 - \eta)\nabla u - \nabla\eta \otimes (u - u_t)$, on en déduit que

$$\int_{B_t} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx \leq C_1 \left\{ \int_{B_t \setminus B_s} |\nabla u|^p \, dx \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(t-s)^p} \int_{B_t} |u - u_t|^p \, dx + \int_{B_t} |u - u_t|^p \, dx + |B_t||u_t|^p + \int_{B_t} a \, dx \right\},$$

avec $C_1 = C_1(\lambda, \Lambda, N, p, b) > 0$. D'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on a

$$\int_{B_t} |u - u_t|^p \, dx \leq c_* t^p \int_{B_t} |\nabla u|^p \, dx,$$

où $c_* = c_*(N, p) > 0$. Soit $R_0 = R_0(\lambda, \Lambda, N, p, b) > 0$ tel que $C_1 c_* R_0^p \leq 1/2$. Si $R < R_0$, on en déduit que

$$C_1 \int_{B_t} |u - u_t|^p \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{B_t} |\nabla u|^p \, dx$$

ce qui implique que

$$\int_{B_s} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx \leq C_2 \left\{ \int_{B_t \setminus B_s} |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{(t-s)^p} \int_{B_t} |u - u_t|^p \, dx + |B_t||u_t|^p + \int_{B_t} a \, dx \right\},$$

où, de nouveau, $C_2 = C_2(\lambda, \Lambda, N, p, b) > 0$. De plus, comme $R/2 < t \leq R$, on a alors

$$|u_t| \leq 2^N \fint_{B_R} |u| \, dx$$

et

$$\int_{B_t} |u - u_t|^p \, dx \leq 2^{p-1} \int_{B_t} |u - u_R|^p \, dx + 2^{p-1} |B_t||u_R - u_t|^p$$
$$\leq 2^{p-1} \int_{B_R} |u - u_R|^p \, dx + 2^{p-1} \int_{B_t} |u - u_R|^p \, dx \leq 2^p \int_{B_R} |u - u_R|^p \, dx$$

d'où l'on déduit que

$$\int_{B_s} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx \leq C_3 \left\{ \int_{B_t \setminus B_s} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx \right.$$
$$\left. + \frac{1}{(t-s)^p} \int_{B_R} |u - u_R|^p \, dx + |B_R| \left(\fint_{B_R} |u| \, dx \right)^p + \int_{B_R} a \, dx \right\},$$

avec $C_3 = C_3(\lambda, \Lambda, N, p, b) > 0$. On applique alors la méthode du “hole filling” de Widman qui consiste à ajouter des deux côtés de l'inégalité la même quantité

$$C_3 \int_{B_s} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx$$

et à diviser par $C_3 + 1$. On obtient

$$\int_{B_s} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx$$
$$\leq \vartheta \int_{B_t} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx + \frac{1}{(t-s)^p} \int_{B_R} |u - u_R|^p \, dx + |B_R| \left(\fint_{B_R} |u| \, dx \right)^p + \int_{B_R} a \, dx,$$

où $\vartheta = \frac{C_3}{C_3+1} < 1$. D'après le Lemme 5.1.4, on en déduit que

$$\int_{B_{R/2}} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx \le C_4 \left\{ \frac{1}{R^p} \int_{B_R} |u - u_R|^p\, dx + |B_R| \left(\fint_{B_R} |u|\, dx \right)^p + \int_{B_R} a\, dx \right\}, \quad (5.1.1)$$

où $C_4 = C_4(\lambda, \Lambda, N, p, b) > 0$, ce qui montre l'inégalité de Caccioppoli.

D'après l'inégalité de Sobolev-Poincaré, en posant $p_* = \frac{Np}{N+p} < N$, on a $(p_*)^* = p$ de sorte que

$$\int_{B_R} |u - u_R|^p\, dx \le C \left(\int_{B_R} |\nabla u|^{p_*}\, dx \right)^{p/p_*} = C \left(\int_{B_R} |\nabla u|^{pm}\, dx \right)^{1/m},$$

avec $m = N/(p+N) < 1$. De plus, comme $pm > 1$, on a par l'inégalité de Hölder,

$$\left(\fint_{B_R} |u|\, dx \right)^p \le \left(\fint_{B_R} |u|^{pm}\, dx \right)^{1/m}.$$

En reportant ces deux inégalités dans (5.1.1), il vient

$$\fint_{B_{R/2}} (|u|^p + |\nabla u|^p)\, dx \le C_5 \left\{ \left(\fint_{B_R} (|u|^p + |\nabla u|^p)^m\, dx \right)^{1/m} + \fint_{B_R} a\, dx \right\},$$

ce qui montre l'inégalité de Hölder inversée. □

Une fonction satisfaisant une inégalité de Hölder inversée implique que cette fonction doit avoir une meilleure intégrabilité que celle initialement supposée. C'est l'objet du Lemme de Gehring dont la preuve nécessite le rappel préalable d'un résultat d'intégration sur les points de Lebesgue.

Théorème 5.1.6. *Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a*

$$\lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} |u(y) - u(x)|\, dy = 0.$$

L'ensemble des points $x \in \Omega$ ne satisfaisant pas la propriété précédente est noté S_u et est appelé ensemble singulier de u. Le complémentaire de S_u est l'ensemble des points de Lebesgue de u.

Rappelons également le résultat suivant de recouvrement géométrique qui est d'ailleurs utilisé dans la démonstration du théorème des points de Lebesgue.

Théorème 5.1.7 (Recouvrement de Vitali). *Soit $\mathcal{F} := \{B = B_R(x)\}$ une famille de boules telles que $\sup_{B_R(x) \in \mathcal{F}} R < +\infty$. Alors il existe une sous-famille $\mathcal{F}' = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ au plus dénombrable telle que $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} 5B_i.$$

Lemme 5.1.8 (Gehring). *Soit $B \subset \mathbb{R}^N$ une boule. Supposons que $f \in L^1(B)$ et $g \in L^p(B)$ ($p > 1$) qui satisfont l'inégalité de Hölder inversée : pour toute boule $B_r(z) \subset B$,*

$$\fint_{B_{r/2}(z)} |f|\, dx \le K \left(\left(\fint_{B_r(z)} |f|^m\, dx \right)^{1/m} + \fint_{B_r(z)} |g|\, dx \right)$$

avec $0 < m < 1$ et $K \ge 1$. Alors il existe $q \in (1, p]$ et $C > 0$ qui ne dépendent que de N, K, m et p tels que

$$\left(\fint_{\frac{1}{2}B} |f|^q\, dx \right)^{1/q} \le C \left(\fint_B |f|\, dx + \left(\fint_B |g|^q\, dx \right)^{1/q} \right).$$

Démonstration. On note R le rayon de la boule B. Fixons $\frac{1}{2} \leq s \leq t \leq 1$ et posons

$$\lambda_0 := \left(\frac{20}{t-s}\right)^N \left(\fint_B |f|\,dx + \fint_B |g|\,dx\right).$$

Pour tout $z \in B_{sR}$ et $r \in (0, t-s)R]$, on définit

$$E(z,r) := \fint_{B_{r/2}(z)} |f|\,dx + \fint_{B_r(z)} |g|\,dx.$$

Etape 1. Montrons que pour tout $\lambda > \lambda_0$ et pour tout $z \in B_{sR} \cap \{|f| > \lambda\} \setminus (S_f \cup S_g)$, il existe $r_z \in (0, \frac{t-s}{10}R]$ tel que

$$E(z, r_z) = \lambda, \qquad \sup_{r_z < r \leq (t-s)R} E(z,r) \leq \lambda. \tag{5.1.2}$$

En effet, comme $|f(z)| > \lambda$ et z est un point de Lebesgue de f et g, alors,

$$\lim_{r \to 0} E(z,r) = |f(z)| + |g(z)| > \lambda,$$

et

$$E\left(z, \frac{t-s}{10}R\right) \leq \left(\frac{20}{t-s}\right)^N \left(\fint_B |f|\,dx + \fint_B |g|\,dx\right) = \lambda_0 < \lambda. \tag{5.1.3}$$

Comme la fonction $r \mapsto E(z,r)$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires montre l'existence d'un $r' \in \left(0, \frac{t-s}{10}R\right)$ tel que $E(z,r') = \lambda$. On définit alors

$$r_z = \max\left\{r' \in \left(0, \frac{t-s}{10}R\right] \;:\; E(z,r') = \lambda\right\}.$$

Notons que, d'après (5.1.3), on a $0 < r_z < \frac{t-s}{10}R$ de sorte que pour $r_z < r \leq \frac{t-s}{10}R$, alors $E(z,r) \leq \lambda$. Si $\frac{t-s}{10}R \leq \rho \leq (t-s)R$, alors il existe un réel $c \in [1,10]$ tel que $\rho = \frac{t-s}{c}R$. On en déduit alors que

$$E(z,\rho) \leq \left(\frac{2c}{t-s}\right)^N \left(\fint_B |f|\,dx + \fint_B |g|\,dx\right) \leq \lambda_0 < \lambda,$$

ce qui conclut la preuve de (5.1.2).

Etape 2. Pour tout borélien $A \subset B_R$, on définit les mesures

$$\mu_f(A) = \int_{A \cap B_{tR}} |f|^m\,dx, \quad \nu_f(A) = \int_{A \cap B_{tR}} |f|\,dx, \quad \nu_g(A) = \int_{A \cap B_{tR}} |g|\,dx.$$

Par hypothèse et comme $K \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\lambda = E(z,r_z) &\leq \fint_{B_{r_z}(z)} |g|\,dx + K\left(\left(\fint_{B_{r_z}(z)} |f|^m\,dx\right)^{1/m} + \fint_{B_{r_z}(z)} |g|\,dx\right) \\
&\leq K\left(\fint_{B_{r_z}(z)} |f|^m\,dx\right)^{1/m} + 2K \fint_{B_{r_z}(z)} |g|\,dx \\
&\leq K\left(\left(\frac{\lambda}{8K}\right)^m + \frac{\mu_f(B_{r_z}(z) \cap \{|f| > \frac{\lambda}{8K}\})}{|B_{r_z}(z)|}\right)^{1/m} + 2K\left(\frac{\lambda}{8K} + \frac{\nu_g(B_{r_z}(z) \cap \{|g| > \frac{\lambda}{8K}\})}{|B_{r_z}(z)|}\right) \\
&\leq 2K\left(\frac{\lambda}{8K} + \left(\frac{\mu_f(B_{r_z}(z) \cap \{|f| > \frac{\lambda}{8K}\})}{|B_{r_z}(z)|}\right)^{1/m} + \frac{\lambda}{8K} + \frac{\nu_g(B_{r_z}(z) \cap \{|g| > \frac{\lambda}{8K}\})}{|B_{r_z}(z)|}\right).
\end{aligned}$$

Cette dernière inégalité implique que

$$\left(\frac{\mu_f(B_{r_z}(z)\cap\{|f|>\frac{\lambda}{8K}\})}{|B_{r_z}(z)|}\right)^{1/m}\geq\frac{\lambda}{8K}\quad\text{ou}\quad\frac{\nu_g(B_{r_z}(z)\cap\{|g|>\frac{\lambda}{8K}\})}{|B_{r_z}(z)|}\geq\frac{\lambda}{8K}$$

d'où

$$\left(\frac{8K}{\lambda}\right)^m\mu_f\left(B_{r_z}(z)\cap\left\{|f|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right)+\left(\frac{8K}{\lambda}\right)\nu_g\left(B_{r_z}(z)\cap\left\{|g|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right)\geq|B_{r_z}(z)|.$$

D'après le théorème de recouvrement de Vitali, il existe des points $z_i\in B_{sR}\cap\{|f|>\lambda\}\setminus(S_f\cup S_g)$ tels que $B_{r_{z_i}}(z_i)\cap B_{r_{z_j}}(z_j)=\emptyset$ si $i\neq j$ et

$$\{|f|>\lambda\}\ \setminus(S_f\cup S_g)\ \subset\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_{5r_{z_i}}(z_i)\cap\{|f|>\lambda\}.$$

Comme ν_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et $|S_f\cup S_g|=0$, on en déduit que

$$\nu_f(B_{sR}\ \cap\{|f|>\lambda\})=\nu_f(B_{sR}\cap\{|f|>\lambda\}\setminus(S_f\cup S_g))\leq\sum_{i\in\mathbb{N}}\nu_f(B_{5r_{z_i}}(z_i)\cap\{|f|>\lambda\}).$$

Or

$$\nu_f(B_{5r_{z_i}}(z_i)\cap\{|f|>\lambda\})\leq\int_{B_{5r_{z_i}}(z_i)}|f|\,dx\leq|B_{5r_{z_i}}(z_i)|E(z_i,10r_{z_i})$$

et du fait que $10r_{z_i}\leq(t-s)R$, on en déduit de (5.1.2) que

$$E(z_i,10r_{z_i})\leq 5^N|B_{r_{z_i}}(z_i)|\lambda.$$

Par conséquent, comme les boules $B_{r_{z_i}}(z_i)$ sont deux à deux disjointes,

$$\begin{aligned}&\nu_f(B_{sR}\cap\{|f|>\lambda\})\\ &\leq 5^N\lambda\left(\frac{8K}{\lambda}\right)^m\sum_{i\in\mathbb{N}}\mu_f\left(B_{r_{z_i}}(z_i)\cap\left\{|f|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right)+5^N\lambda\left(\frac{8K}{\lambda}\right)\sum_{i\in\mathbb{N}}\nu_g\left(B_{r_{z_i}}(z_i)\cap\left\{|g|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right)\\ &\qquad\leq 5^N(8K)^m\lambda^{1-m}\mu_f\left(\left\{|f|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right)+5^N(8K)\nu_g\left(\left\{|g|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right).\end{aligned}\tag{5.1.4}$$

Etape 3. Soit $\delta>0$ qui sera fixé ultérieurement. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{B_{sR}}|f|^{1+\delta}\,dx&=\int_{B_{sR}\cap\{|f|\leq\lambda_0\}}|f|^{1+\delta}\,dx+\int_{B_{sR}\cap\{|f|>\lambda_0\}}|f|^{1+\delta}\,dx\\ &\leq\lambda_0^{1+\delta}|B_{sR}|+\delta\int_{\lambda_0}^{\infty}\lambda^{\delta-1}\nu_f(B_{sR}\cap\{|f|>\lambda\})\,d\lambda.\end{aligned}$$

D'après (5.1.4) et la formule de changement de variables, on peut peut majorer le deuxième terme du membre de droite par

$$\begin{aligned}
&\delta \int_{\lambda_0}^{\infty} \lambda^{\delta-1}\nu_f(B_{sR}\cap\{|f|>\lambda\})\,d\lambda \\
&\quad\le 5^N(8K)^m\delta\int_{\lambda_0}^{\infty}\lambda^{\delta-m}\mu_f\left(\left\{|f|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right)d\lambda + 5^N(8K)\delta\int_{\lambda_0}^{\infty}\lambda^{\delta-1}\nu_g\left(\left\{|g|>\frac{\lambda}{8K}\right\}\right)d\lambda \\
&\quad= 5^N(8K)^{\delta+1}\left(\delta\int_{\lambda_0/(8K)}^{\infty}\lambda^{\delta-m}\mu_f(\{|f|>\lambda\})\,d\lambda + \delta\int_{\lambda_0/(8K)}^{\infty}\lambda^{\delta-1}\nu_g(\{|g|>\lambda\})\,d\lambda\right) \\
&\quad\le 5^N(8K)^{\delta+1}\left(\frac{\delta}{\delta+1-m}\int_{B_{tR}}|f|^{1+\delta}\,dx + \int_{B_{tR}}|g|^{1+\delta}\,dx\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé de nouveau le théorème de Fubini dans la dernière inégalité. Comme $m<1$ et $p>1$, on peut trouver $\delta=\delta(N,K,m,p)>0$ assez petit tel que

$$1+\delta\le p,\qquad \left(5^N(8K)^{\delta+1}\frac{\delta}{\delta+1-m}\right)^{1/(1+N+\delta)}\le\frac{1}{2},$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_{B_{sR}}|f|^{1+\delta}\,dx &\le \frac{1}{2^{1+N+\delta}}\int_{B_{tR}}|f|^{1+\delta}\,dx + C\int_B|g|^{1+\delta}\,dx \\
&\quad + \left(\frac{20}{t-s}\right)^{(1+\delta)N}\left(\fint_B|f|\,dx+\fint_B|g|\,dx\right)^{1+\delta}|B_{sR}|,
\end{aligned}$$

où $C=C(N,K,m,p)>0$. Comme $\frac{t}{s}\le 2$ et $s\ge\frac{1}{2}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\fint_{B_{sR}}|f|^{1+\delta}\,dx &\le \frac{1}{2^{1+\delta}}\fint_{B_{tR}}|f|^{1+\delta}\,dx + 2^NC\fint_B|g|^{1+\delta}\,dx \\
&\quad + \left(\frac{20}{t-s}\right)^{(1+\delta)N}\left(\fint_B|f|\,dx+\fint_B|g|\,dx\right)^{1+\delta}
\end{aligned}$$

et donc et posant $q=1+\delta$, il vient d'après l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}
\left(\fint_{B_{sR}}|f|^q\,dx\right)^{1/q} &\le \frac{1}{2}\left(\fint_{B_{tR}}|f|^q\,dx\right)^{1/q} + C\left(\fint_B|g|^q\,dx\right)^{1/q} \\
&\quad + \frac{C'}{(t-s)^N}\left(\fint_B|f|\,dx+\left(\fint_B|g|^q\,dx\right)^{1/q}\right).
\end{aligned}$$

On pose

$$\Phi(t):=\left(\fint_{B_{tR}}|f|^q\,dx\right)^{1/q},\quad A:=C'\left(\fint_B|f|\,dx+\left(\fint_B|g|^q\,dx\right)^{1/q}\right),\quad B:=C\left(\fint_B|g|^q\,dx\right)^{1/q}$$

de sorte que pour tout $1/2\le s\le t\le 1$, on a

$$\Phi(s)\le\frac{1}{2}\Phi(t)+\frac{A}{(t-s)^N}+B.$$

Le Lemme 5.1.4 implique alors l'existence d'une constante $c = c(N) > 0$ telle que $\Phi(\frac{1}{2}) \leq c(A+B)$, i.e.

$$\left(\fint_{\frac{1}{2}B} |f|^q \, dx\right)^{1/q} \leq C \left(\fint_B |f| \, dx + \left(\fint_B |g|^q \, dx\right)^{1/q}\right),$$

ce qui correspond à l'estimation voulue. □

Nous sommes à présent en mesure de donner la démonstration du Théorème de Meyers.

Démonstration du Théoème 5.1.1. Soit $R_0 > 0$ donné par le Théorème 5.1.5. Si ω est un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, par compacité, on peut recouvrir $\overline{\omega}$ par un nombre fini de boules $B_1, \ldots, B_k$ avec $2B_i \subset \Omega$ et dont les rayons sont plus petits que $R_0/2$. Pour toute boule $B_r(z) \subset B_i$, comme $r \leq R_0$, le Théorème 5.1.5 implique que

$$\fint_{B_{r/2}(z)} (|u|^p + |\nabla u|^p) \, dx \leq C \left\{ \left(\fint_{B_r(z)} (|u|^p + |\nabla u|^p)^m \, dx\right)^{1/m} + \fint_{B_r(z)} a \, dx \right\}.$$

Comme $a \in L^s(\Omega)$ avec $s > 1$, pour tout $1 \leq i \leq k$, le Lemme de Gehring montre l'existence d'un $q_i \in (1, s)$ tel que

$$\left(\fint_{B_i} (|u|^p + |\nabla u|^p)^{q_i} \, dx\right)^{1/q_i} \leq C \left(\fint_{2B_i} (|u|^p + |\nabla u|^p) \, dx + \left(\fint_{2B_i} |a|^{q_i} \, dx\right)^{1/q_i}\right).$$

On pose $q = \min\{q_1, \ldots, q_k\} \in (1, s)$, alors d'après l'inégalité de Hölder, il vient

$$\left(\fint_{B_i} (|u|^p + |\nabla u|^p)^q \, dx\right)^{1/q} \leq C \left(\fint_{2B_i} (|u|^p + |\nabla u|^p) \, dx + \left(\fint_{2B_i} |a|^s \, dx\right)^{1/s}\right),$$

ce qui montre que

$$\int_\omega (|u|^p + |\nabla u|^p)^q \, dx \leq \sum_{i=1}^k \int_{B_i} (|u|^p + |\nabla u|^p)^q \, dx \leq C \left(\|u\|^{pq}_{W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^d)} + \|a\|^q_{L^s(\Omega)}\right).$$

Par conséquent, en posant $r = pq > p$, on obtient que $u \in W^{1,r}(\omega; \mathbb{R}^d)$. □

Chapitre 6

Appendice : Espace des mesures de Radon bornées

Nous renvoyons à [9] pour les démonstrations des résultats énoncés ci-dessous.

6.1 Approche par théorie de la mesure

6.1.1 Mesures positives

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, on désigne par $\mathcal{B}(\Omega)$ la tribu Borélienne sur Ω.

Définition 6.1.1. On dit que $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ est une *mesure Borélienne positive* si

— $\mu(\emptyset) = 0$;

— pour toute suite $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de Boréliens deux à deux disjoints,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right).$$

Si de plus $\mu(K) < +\infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$, on dit que μ est une *mesure de Radon positive.*

Les mesures de Radon positives jouissent de propriétés de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par la mesure d'ouverts ou de fermés : pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \sup\{\mu(K) : \ K \subset B,\, K \text{ compact}\}, \\ &= \inf\{\mu(U) : \ B \subset U,\, U \text{ ouvert}\}. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{L}^N$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Le théorème de décomposition de Lebesgue montre que toute mesure de Radon positive μ peut se décomposer en la somme d'une mesure absolument continue μ^a et d'une mesure singulière μ^s par rapport à $\mathcal{L}^N$. Une application du théorème de Radon-Nikodým montre alors que μ^a est une mesure a densité par rapport à $\mathcal{L}^N$. Il existe donc une fonction $a \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^+)$ telle que

$$\mu = a\mathcal{L}^N + \mu^s$$

où μ^s est singulière par rapport à $\mathcal{L}^N$, ce qui signifie qu'il existe un Borélien $Z \subset \Omega$ tel que $\mathcal{L}^N(Z) = \mu^s(\Omega \setminus Z) = 0$. La densité de Radon-Nikodým a de μ par rapport à $\mathcal{L}^N$, parfois notée

$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^N}$ se calcule alors par dérivation de mesure :

$$a(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\mathcal{L}^N(B_\rho(x))} \quad \mathcal{L}^N\text{-p.p. tout } x \in \Omega.$$

Notons que, par homogénéité et invariance par translation de la mesure de Lebesgue, on a $\mathcal{L}^N(B_\rho(x)) = \omega_N \rho^N$ où $\omega_N := \mathcal{L}^N(B_1(0))$. De plus la partie singulière μ^s satisfait

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\mu^s(B_\rho(x))}{\omega_N \rho^N} = 0 \quad \mathcal{L}^N\text{-p.p. tout } x \in \Omega.$$

6.1.2 Mesures réelles

Définition 6.1.2. On dit que $\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est une *mesure Borélienne réelle* si

— $\mu(\emptyset) = 0$;

— pour toute suite $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de Boréliens deux à deux disjoints, la série numérique $\sum_j \mu(B_j)$ converge absolument et sa somme est donnée par

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j) = \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j\right).$$

On définit, pour tout $B \in \mathcal{B}(\Omega)$, la *variation* de μ par

$$|\mu|(B) = \sup\left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} |\mu(B_j)| : \ B_j \in \mathcal{B}(\Omega),\, B_i \cap B_j = \emptyset \text{ pour tout } i \neq j,\, B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \right\}.$$

L'application $|\mu| : \mathcal{B}(\Omega) \to [0, +\infty]$ est alors une mesure de Borel positive finie qui satisfait la propriété

$$|\mu(B)| \le |\mu|(B) \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}(\Omega).$$

On pose alors

$$\mu^\pm := \frac{\mu \pm |\mu|}{2}$$

qui définissent des mesures de Borel positives finies qui satisfont

$$\mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

L'intégration d'une fonction Borélienne positive (ou $|\mu|$-intégrable) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ par rapport à μ est alors définie par

$$\int_\Omega f\, d\mu := \int_\Omega f\, d\mu^+ - \int_\Omega f d\mu^-.$$

6.2 Approche par analyse fonctionnelle

On désigne par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans Ω. Cet espace n'est pas un Banach, c'est pourquoi il convient de le fermer pour la topologie de la norme uniforme sur $\overline{\Omega}$. On définit alors

$$\mathcal{C}_0(\Omega) = \overline{\mathcal{C}_c(\Omega)}^{\|\cdot\|_\infty}$$

qui est alors un espace de Banach séparable. Par ailleurs une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$ (f tend vers 0 sur le bord de Ω).

Le théorème de représentation de Riesz montre que pour tout $L \in [\mathcal{C}_0(\Omega)]'$, il existe une unique mesure Borélienne réelle μ telle que

$$L(f) = \int_\Omega f\, d\mu \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}_0(\Omega), \quad \|L\|_{[\mathcal{C}_0(\Omega)]'} = |\mu|(\Omega).$$

Le dual topologique de $\mathcal{C}_0(\Omega)$, noté $\mathcal{M}(\Omega)$, s'identifie alors à l'ensemble des mesures Boréliennes réelles. Il s'agit de l'*espace des mesures de Radon bornées*. En tant qu'espace dual, on peut considérer la topologie faible* sur $\mathcal{M}(\Omega)$.

Définition 6.2.1. Une suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ converge faible* vers μ dans $\mathcal{M}(\Omega)$ si

$$\int_\Omega \varphi\, d\mu_n \to \int_\Omega \varphi\, d\mu \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_0(\Omega).$$

Comme $\mathcal{C}_0(\Omega)$ est séparable, toute suite bornée dans $\mathcal{M}(\Omega)$ admet une sous-suite qui converge faible* dans cet espace. Pour les suites de mesures positives, nous avons les conditions suivantes de semi continuité le long d'ouverts ou de compacts.

Proposition 6.2.2. *Si $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans $\mathcal{M}(\Omega)$ de mesures positives qui converge faible* dans $\mathcal{M}(\Omega)$ vers μ, alors*

$$\mu(U) \le \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(U) \quad \textit{pour tout ouvert } U \subset \Omega,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(K) \le \mu(K) \quad \textit{pour tout compact } K \subset \Omega,$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n(E) = \mu(E) \quad \textit{pour tout borélien borné } E \subset \Omega \textit{ tel que } \mu(\partial E) = 0.$$

Démonstration. Si $U \subset \Omega$ est ouvert, par régularité intérieure de μ, pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un compact $C \subset U$ tel que $\mu(C) \ge \mu(U) - \varepsilon$. Soit $\psi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ sur C et $\psi = 0$ sur $\Omega \setminus U$. Alors

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu_n(U) \ge \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \psi\, d\mu_n = \int_\Omega \psi\, d\mu \ge \mu(C) \ge \mu(U) - \varepsilon.$$

Le résultat s'obtient par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Si $K \subset \Omega$ est compact, par régularité extérieure de μ, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $V \subset \Omega$ tel que $K \subset V$ et $\mu(V) \le \mu(K) + \varepsilon$. On peut trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ sur K et $\varphi = 0$ sur $\Omega \setminus V$. Par conséquent

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(K) \le \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \varphi\, d\mu_n = \int_\Omega \varphi\, d\mu \le \mu(V) \le \mu(K) + \varepsilon.$$

On obtient le résultat en faisant tendre $\varepsilon \to 0$.

Si $E \subset \Omega$ est un Borélien tel que $\mu(\partial E) = 0$, alors

$$\mu(E) = \mu(\mathring{E}) \le \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(\mathring{E}) \le \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(E) \le \limsup_{n\to+\infty} \mu_n(E) \le \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(\overline{E}) \le \mu(\overline{E}) = \mu(E),$$

ce qui conclut la preuve de la proposition. □

Le lemme suivant sera fort utile par la suite.

Lemme 6.2.3. *Soit $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ une mesure positive et $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ une famille d'ensembles Boréliens dans Ω tels que $A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \emptyset$ pour tout λ, $\lambda' \in \Lambda$ avec $\lambda \neq \lambda'$. Alors, l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda : \mu(A_\lambda) > 0\}$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit $Z = \{\lambda \in \Lambda : \mu(A_\lambda) > 0\}$ et $Z_n = \{\lambda \in \Lambda : \mu(A_\lambda) > 1/n\}$. Comme $Z = \bigcup_n Z_n$, il suffit de montrer que Z_n est dénombrable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous allons en fait montrer que Z_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in Z_n$, alors comme les ensembles $A_{\lambda_1}, \dots, A_{\lambda_k}$ sont deux à deux disjoints,

$$\frac{k}{n} \leq \sum_{i=1}^{k} \mu(A_{\lambda_i}) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_{\lambda_i}\right) \leq \mu(\Omega),$$

ce qui montre que $k \leq n\mu(\Omega)$, et que $n\mu(\Omega)$ est une borne supérieure sur le cardinal de Z_n. $\square$

Bibliographie

[1] E. Acerbi, N. Fusco : Semicontinuity problems in the calculus of variations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **86** (1984) 125–145.

[2] A. Braides : Homogenization of some almost periodic coercive functionals, *Rend. Accad. Naz. Sci. Mem. Mat.* **9(5)** (1985) 313–321.

[3] A. Braides, A. Defranceschi : *Homogenization of multiple integrals*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1998)

[4] B. Dacorogna : *Direct methods in the calculus of variations*, Applied Mathematical Sciences, 78. Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[5] G. Dal Maso : *An introduction to* Γ*-convergence*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 8. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1993).

[6] E. Giusti : *Direct methods in the calculus of variations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (2003).

[7] H. Le Dret, A. Raoult : The nonlinear membrane model as variational limit of nonlinear three-dimensional elasticity, *J. Math. Pures Appl.* **74** (1995) 549-578.

[8] S. Müller : Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials, *Arch. Rational Mech. Anal.* **99** (1987) 189–212.

[9] W. Rudin : *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto, Ont.-London (1966).