Université Paris-Sud
Master de Mathématiques et Applications

Equations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires

Jean-François Babadjian

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

On dit qu'un opérateur différentiel linéaire du second ordre L est *elliptique* s'il agit sur des fonctions $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ sous la forme suivante :

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x),$$

où $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice à coefficients bornés satisfaisant la propriété d'ellipticité : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Comme la matrice hessienne $D^2u = (\partial_{ij}^2 u)_{1\leq i,j\leq N}$ est symétrique, on peut se restreindre au cas de matrices $A(x)$ qui sont symétriques, auquel cas la condition d'ellipticité est équivalente au fait que la matrice $A(x)$ est définie positive et que sa plus petite valeur propre est plus grande que $\lambda > 0$.

Un cas particulier est celui des *opérateurs sous forme divergence*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i\big(a_{ij}(x)\partial_j u(x)\big) = \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x)).$$

En écrivant

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x) + \sum_{i,j=1}^{N} \partial_i a_{ij}(x)\partial_j u(x),$$

on retrouve la forme précédente avec $b_j = \sum_{i=1}^{N} \partial_i a_{ij}$ et la condition d'ellipticité reste la même. Cependant, on ne peut pas se restreindre au cas de matrices $A(x)$ qui sont symétriques.

On appelle équation elliptique *linéaire* une équation de la forme

$$Lu = f,$$

où f est une fonction donnée (appelé *terme source* ou *second membre*) et L est linéaire par rapport à u. On dit que l'équation est *semi-linéaire* si elle est non linéaire mais sa partie principale est linéaire par rapport à u, i.e.,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial^2_{ij}u(x) = f(x,u,\nabla u).$$

On dit que l'équation est *quasi-linéaire* si elle est non linéaire mais sa partie principale est linéaire par rapport à la dérivée de u d'ordre le plus élevé. Pour les équations d'ordre 2, elles sont du type

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x,u,\nabla u)\partial^2_{ij}u(x) = f(x,u,\nabla u).$$

La classe générale des équations complètement non linéaires est de la forme

$$F(x,u,\nabla u,D^2u) = 0.$$

La condition d'ellipticité est alors que $M \mapsto F(x,z,\xi,M)$ est monotone, i.e. pour tout $(x,s,\xi,M) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{N\times N}$ et toute matrice P définie positive,

$$F(x,s,\xi,M+P) \geq F(x,s,\xi,M).$$

L'opérateur elliptique le plus important est le *Laplacien*. Il correspond à la matrice $A = I$:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \partial^2_{ii}u.$$

1.2 Quelques exemples

L'équation de Poisson

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On cherche une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cette équation intervient dans de nombreux domaines des mathématiques et de ses applications. Par exemple, en dimension $N = 3$, si f représente une densité de charge électrique présente dans Ω, alors $-u$ est le potentiel électrique dans Ω quand le bord de Ω est parfaitement conducteur. Le gradient de $-u$ est le champ électrique. Plus généralement, ce problème intervient dans les questions relatives au potentiel newtonien.

En dimension $N = 2$, il s'agit de l'équation de la membrane élastique : f représente une densité volumique de forces et u représente le déplacement vertical d'une membrane qui occupe la position $\overline{\Omega}$ au repos. La condition limite $u = 0$ sur $\partial\Omega$ signifie que la membrane est fixée sur le bord.

Elasticité linéaire

De manière plus générale, le système de l'élasticité linéaire (dit système de Lamé) permet de décrire la position d'équilibre d'un milieu élastique homogène et isotrope lorsque l'on fait l'hypothèse que les déplacements par rapport à l'état naturel sont petits. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ représente la configuration de référence d'un milieu élastique linéaire soumis à une densité volumique de forces $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et fixé sur le bord, le déplacement $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ est solution du système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} -(\lambda+\mu)\nabla(\mathrm{div} u) - \mu\Delta u = f & \text{dans } \ \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les coefficients λ et μ sont des paramètres d'élasticité appelés coefficients de Lamé qui doivent satisfaire les conditions

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0$$

assurant le caractère elliptique du système d'EDP précédent.

Système de Stokes

Les équations de Stokes sont des équations de la mécanique des fluides qui régissent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible qui occupe le volume $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ au repos. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ désigne une densité volumique de forces agissant sur le fluide, on cherche la vitesse du fluide $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$ et la pression $p : \Omega \to \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} -\mu\Delta v = \nabla p + f & \text{dans } \ \Omega, \\ \mathrm{div} v = 0 & \text{dans } \ \Omega, \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La deuxième équation traduit l'incompressibilité du fluide.

Chapitre 2

L'opérateur Laplacien

L'un des opérateurs différentiels les plus importants est le Laplacien Δ sur $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \partial_{ii}^2 u = \mathrm{div} \nabla u.$$

Il est utile d'avoir à l'esprit un modèle physique lié à cet opérateur. Le plus simple provient de la théorie de l'électrostatique. Selon les équations de Maxwell, un champ électrique E dans l'espace (un champ de vecteur représentant la force électrostatique par unité de charge) est relié à la densité de charge f par l'équation $\mathrm{div} E = f$ (à condition que les unités de mesure soient correctement choisies) et satisfait également $\mathrm{rot} E = 0$ (en dimension N, $\mathrm{rot} E$ est donné par la matrice antisymétrique $(\partial_i E_j - \partial_j E_i)_{1 \leq i,j \leq N}$). Cette deuxième condition signifie que, du moins localement, E est le gradient d'une fonction, notée $-u$, déterminée à une constante additive près, appelé potentiel électrostatique. Par conséquent, on a

$$-\Delta u = f,$$

de sorte que le Laplacien relie le potentiel à la densité de charge.

2.1 Fonctions harmoniques

Définition 2.1.1. Une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est *harmonique* si elle est solution de l'*équation de Laplace*

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Nous verrons plus loin que l'hypothèse $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est en fait superflue. Nous allons à présent établir un certain nombre de propriétés des fonctions harmoniques. Tout d'abord, comme le Laplacien commute avec les rotations, il préserve la classe des fonctions radiales sur laquelle il se réduit à une équation différentielle ordinaire. On peut alors caractériser toutes les fonctions radiales harmoniques en dehors de l'origine.

Proposition 2.1.2. *Si $u(x) = \phi(|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si et seulement si*

$$u(x) = \begin{cases} a|x| + b & \text{si } N = 1, \\ a \ln |x| + b & \text{si } N = 2, \\ a|x|^{2-N} + b & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tout $x \neq 0$, on a,

$$\partial_i u(x) = \phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \quad \partial^2_{ii} u(x) = \phi''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \phi'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right).$$

Par conséquent,

$$\Delta u(x) = \phi''(|x|) + \frac{N-1}{|x|}\phi'(|x|)$$

et $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si et seulement si $\phi''(r) + \frac{N-1}{r}\phi'(r) = 0$ pour tout $r > 0$ ou encore $\frac{\phi''(r)}{\phi'(r)} = \frac{1-N}{r}$ pour tout $r > 0$. On intègre une première fois cette EDO et on obtient alors que $\ln \phi'(r) = (1-N)\ln r + \ln c$, soit $\phi'(r) = cr^{1-N}$. Une nouvelle intégration donne le résultat. □

Dans la suite, nous aurons besoin d'intégrer sur des hypersurfaces S qui sont la frontière de domaines de $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.1.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que Ω est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe
— un $r > 0$
— un système d'axes de coordonnées $\{e_1, \dots, e_N\}$
— une fonction $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$
tels que

$$\begin{aligned}\Omega \cap Q_r(x) &= \{y \in Q_r(x) : y_N < \gamma(y_1, \dots, y_{N-1})\},\\ \partial\Omega \cap Q_r(x) &= \{y \in Q_r(x) : y_N = \gamma(y_1, \dots, y_{N-1})\},\end{aligned}$$

où $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y_i - x_i| < r \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N\}$. Si $k \geq 1$, la normale unitaire extérieure à Ω en $y = (y_1, \dots, y_{N-1}, \gamma(y_1, \dots, y_{N-1})) = (y', \gamma(y')) \in \partial\Omega \cap Q_r(x)$ est bien définie et est donnée par

$$\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\gamma(y')|^2}}(-\nabla\gamma(y'), 1).$$

De plus, si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, est une fonction continue dans un voisinage de $\partial\Omega$, l'intégrale de bord de φ sur $\partial\Omega \cap Q_r(x)$ est définie par

$$\int_{\partial\Omega \cap Q_r(x)} \varphi \, d\sigma := \int_{x' +]-r,r[^{N-1}} \varphi(y', \gamma(y'))\sqrt{1 + |\nabla\gamma(y')|^2}\, dy'.$$

Si Ω est borné, alors $\partial\Omega$ est un compact de $\mathbb{R}^N$. Par la propriété de Heine-Borel, on peut alors trouver un nombre fini de cubes $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$(pour $i = 1, \dots, m$) qui satisfont les propriétés ci-dessus. Si $\theta_1, \dots, \theta_m$ est une partition de l'unité associée à $Q_1, \dots, Q_m$:
— pour tout $1 \leq i \leq m$, $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(Q_i)$ et $0 \leq \theta_i \leq 1$;
— $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ sur $\partial\Omega$;
alors, on définit

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma := \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega \cap Q_i} \theta_i \varphi \, d\sigma.$$

On peut montrer que cette quantité est indépendante du choix de la paramétrisation, du recouvrement $Q_1, \dots, Q_m$ et de la partition de l'unitié $\theta_1, \dots, \theta_m$.

Le résultat suivant est une version N-dimensionelle de la formule d'intégration par parties, bien connue en dimension 1.

Théorème 2.1.4. (Théorème de la divergence) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\int_\Omega \mathrm{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma. \tag{2.1.1}$$

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$,

$$\int_\Omega \nabla f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\sigma. \tag{2.1.2}$$

Démonstration. Nous démontrons seulement la formule (2.1.2).

Etape 1. On suppose ici que $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$. Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset]-R, R[^N$. Comme f est à support dans Ω, on peut l'étendre par zéro à tout $]-R, R[^N$ en une fonction (toujours notée f) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[^N$. D'après le théorème de Fubini, on a alors que pour tout $1 \le j \le N$,

$$\int_\Omega \partial_j f \, dx = \int_{]-R,R[^N} \partial_j f \, dx = \int_{]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{R} \partial_j f \, dx_j \right) dx_1 \cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_N.$$

Or

$$\int_{-R}^{R} \partial_j f \, dx_j = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, R, x_{j+1}, \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, -R, x_{j+1}, \ldots, x_N) = 0$$

car $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega \subset]-R, R[^N$. Par conséquent, comme $f = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \nabla f \, dx = 0 = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\sigma.$$

Etape 2. Soit $x \in \partial\Omega$, $r > 0$, $Q := Q_r(x)$ et $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R})$ comme dans la Définition 2.1.3. Plaçons nous dans la base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ donnée par la paramétrisation locale de $\partial\Omega$. On note alors $\partial_i f = \nabla f \cdot e_i$ la dérivée dans la direction e_i de sorte que $\nabla f = \sum_{i=1}^N (\partial_i f) e_i$. Montrons que

$$\int_\Omega \nabla f(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\sigma \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}^1_c(Q).$$

Tout d'abord, on a d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_N f(y)\, dy &= \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{\gamma(y')} \partial_N f(y', y_N)\, dy_N \right) dy' \\ &= \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} f(y', \gamma(y'))\, dy' = \int_{\partial\Omega\cap Q} f\nu_N \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} f\nu_N \, d\sigma.\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $j \neq N$, et $y' \in x'+]-R, R[^{N-1}$, on a que

$$\partial_j \left(\int_{-R}^{\gamma(y')} f(y', y_N)\, dy_N \right) = f(y', \gamma(y'))\partial_j \gamma(y') + \int_{-R}^{\gamma(y')} \partial_j f(y', y_N)\, dy_N.$$

On intègre à présent par rapport à $y' \in x'+]-R, R[^{N-1}$. Comme $f = 0$ sur ∂Q, le théorème de Fubini montre que le membre de gauche s'annule et donc que

$$0 = \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} f(y', \gamma(y'))\partial_j \gamma(y')\, dy' + \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{\gamma(y')} \partial_j f(y', y_N)\, dy_N \right) dy',$$

soit
$$\int_\Omega \partial_j f(y)\,dy = \int_{\partial\Omega\cap Q} f\nu_j\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} f\nu_j\,d\sigma.$$

Etape 3. Soit $Q_1,\dots,Q_m$ un recouvrement de $\partial\Omega$ par des cubes satisfaisant les propriétés de la Définition 2.1.3. On considère également un ouvert ω tel que $\overline{\omega}\subset\Omega$ et
$$\overline{\Omega}\subset\omega\cup\bigcup_{i=1}^m Q_i.$$
Soit $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_N$ une partition de l'unité associée à $\omega,Q_1,\dots,Q_m$:
— $\theta_0\in\mathcal{C}_c^\infty(\omega)$, $0\le\theta_0\le 1$ et, pour tout $1\le i\le m$, $\theta_i\in\mathcal{C}_c^\infty(Q_i)$ et $0\le\theta_i\le 1$;
— $\sum_{i=0}^m\theta_i=1$ sur $\overline{\Omega}$.

Comme $f=\sum_{i=0}^m\theta_i f$ dans Ω, on a que
$$\int_\Omega \nabla f(x)\,dx = \int_\omega \nabla(\theta_0 f)\,dx + \sum_{i=1}^m\int_{\Omega\cap Q_i}\nabla(\theta_i f)\,dx.$$
D'après l'étape 1, du fait que $\mathrm{supp}(\theta_0 f)\subset\omega\subset]-R,R[^N$, on en déduit que
$$\int_\omega \nabla(\theta_0 f)\,dx = 0. \tag{2.1.3}$$
Si $1\le i\le m$, comme $\theta_i f\in\mathcal{C}_c^1(Q_i)$, on peut appliquer l'étape 2 pour obtenir que
$$\int_\Omega \nabla(\theta_i f)\,dx = \int_{\partial\Omega}\theta_i f\nu\,d\sigma. \tag{2.1.4}$$
En regroupant (2.1.3) et (2.1.4), il vient
$$\int_\Omega \nabla f\,dx = \sum_{i=0}^m\int_\Omega\nabla(\theta_i f)\,dx = \sum_{i=1}^m\int_{\partial\Omega}\theta_i f\nu\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} f\nu\,d\sigma,$$
où l'on a utilisé le fait que sur $\partial\Omega$, $\theta_0=0$ et donc $\sum_{i=1}^m\theta_i=1$. □

Théorème 2.1.5 (Formules de Green). *Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et u, $v:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*
$$\int_\Omega (v\Delta u+\nabla u\cdot\nabla v)\,dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u\,d\sigma,$$
et
$$\int_\Omega (v\Delta u+u\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega}(v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\,d\sigma,$$
où $\partial_\nu u=\nabla u\cdot\nu$ et $\partial_\nu v=\nabla v\cdot\nu$.

Démonstration. Pour la première formule de Green, on applique le théorème de la divergence au champ de vecteurs $F:=v\nabla u$. Pour la deuxième formule de Green, on applique, la première formule de Green deux fois. □

Une conséquence immédiate de la formule de Green stipule que le flux d'une fonction harmonique à travers une surface fermée est nul.

Corollaire 2.1.6. *Si u est harmonique sur Ω et ω est un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, alors*

$$\int_{\partial\omega} \partial_\nu u \, d\sigma = 0.$$

Démonstration. On applique la formule de Green avec $v = 1$. □

Nous allons à présent établir des formules de moyennes de fonctions harmoniques sur des boules. Pour ce faire, il sera utile de connaître la formule de changement de variables suivante (quand $N = 2$ il s'agit du changement de variables en coordonnées polaires et quand $N = 3$, on retrouve la formule de changement de variables en coordonnées sphériques). On peut trouver une démonstration relativement élémentaire dans [4, Section 2.7].

Théorème 2.1.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $x \in \Omega$ et $R > 0$ sont tels que $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, alors*

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)} u(y)\, dy &= \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} u(z)\, d\sigma(z)\, dr \\ &= \int_0^R \int_{\partial B_1(x)} u(rz)\, d\sigma(z)\, r^{N-1} dr = \int_0^R \int_{\partial B_1(0)} u(x+rz)\, d\sigma(z)\, r^{N-1} dr.\end{aligned}$$

Dans la suite, ω_N désigne le volume (la mesure de Lebesgue) de la boule unité. En utilisant la formule de changement de variables en coordonnées polaires avec $u = 1$, on obtient que

$$\omega_N = |B_1| = \int_{B_1} 1 \, dx = \int_0^1 \sigma(\partial B_1) r^{N-1}\, dr = \frac{\sigma(\partial B_1)}{N},$$

ce qui montre que le périmètre de la sphère unité est donnée par $N\omega_N$. Par homogénéité et invariance par translation du périmètre et du volume on a donc

$$|B_R(x)| = \omega_N R^N \text{ et } \sigma(\partial B_R(x)) = N\omega_N R^{N-1}.$$

Le résultat suivant établit que la valeur moyenne d'une fonction harmonique en un point est égale à sa moyenne sur n'importe quelle sphère ou boule autour de ce point.

Théorème 2.1.8 (de la valeur moyenne). *Supposons que u est harmonique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si $x \in \Omega$ et $R > 0$ sont tels que $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, alors*

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(z)\, d\sigma(z) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x)} u(y)\, dy.$$

Démonstration. Montrons d'abord la première identité. Quitte à translater, on peut supposer que $x = 0$. On utilise la formule de Green avec sur l'ouvert $U := B_R \setminus \overline{B_r}$ $(0 < r < R)$ avec $v(y) = \phi(|y|)$ où $\phi(r) = r$ si $N = 1$, $\phi(r) = \ln r$ si $N = 2$ et $\phi(r) = \frac{r^{2-N}}{2-N}$ si $N \geq 3$. Comme d'après la Proposition 2.1.2, u et v sont harmoniques sur U, on obtient

$$\int_{\partial U} (v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\, d\sigma = 0.$$

Comme $\partial U = \partial B_R \cup \partial B_r$ et $\nu(x) = \frac{x}{R}$ sur ∂B_R et $\nu(x) = -\frac{x}{r}$ sur ∂B_r (le signe moins est dû à l'orientation de ∂B_r qui est opposée à celle de ∂B_R), l'expression précédente devient

$$\phi(R) \int_{\partial B_R} \partial_\nu u \, d\sigma - \phi'(R) \int_{\partial B_R} u \, d\sigma - \phi(r) \int_{\partial B_r} \partial_\nu u \, d\sigma + \phi'(r) \int_{\partial B_r} u \, d\sigma = 0.$$

En utilisant le Corollaire 2.1.6, il vient que

$$R^{1-N}\int_{\partial B_R} u\,d\sigma = r^{1-N}\int_{\partial B_r} u\,d\sigma.$$

Comme u est en particulier continue, on peut faire tendre $r \to 0$ de sorte que

$$R^{1-N}\int_{\partial B_R} u\,d\sigma = \lim_{r\to 0} r^{1-N}\int_{\partial B_r} u\,d\sigma = N\omega_N u(0).$$

En intégrant l'identité précédente par rapport à R et en utilisant la formule de changement de variables en coordonnées polaires, on obtient également que

$$\int_{B_R} u(y)\,dy = \int_0^R\int_{\partial B_r} u(z)\,d\sigma(z)\,dr = N\omega_N\left(\int_0^R r^{N-1}\,dr\right)u(0) = \omega_N R^N u(0),$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

Nous avons également une réciproque au théorème de la valeur moyenne.

Théorème 2.1.9. *Soit u une fonction continue sur un ouvert Ω telle que pour tout $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ tels que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$,*

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(z)\,d\sigma(z).$$

Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et u est harmonique sur Ω.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1)$ telle que $\phi(x) = \psi(|x|)$ avec $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\int_{B_1}\phi(y)\,dy = N\omega_N\int_0^1\psi(r)r^{N-1}\,dr = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-N}\phi(y/\varepsilon)$ et $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}$. Si $x \in \Omega_\varepsilon$, comme $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, on en déduit que la fonction $y \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ est supportée dans $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ et on a

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega u(y)\phi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{B_1} u(x-\varepsilon y)\phi(y)\,dy = \int_0^1\int_{\partial B_1} u(x-r\varepsilon z)\psi(r)r^{N-1}\,d\sigma(z)\,dr.$$

En changeant de variables et en utilisant l'hypothèse, on obtient que

$$\int_{\partial B_1} u(x-r\varepsilon z)\,d\sigma(z) = \frac{1}{(r\varepsilon)^{N-1}}\int_{\partial B_{r\varepsilon}(x)} u(z)\,d\sigma(z) = N\omega_N u(x),$$

ce qui implique que

$$u_\varepsilon(x) = N\omega_N u(x)\int_0^1\psi(r)r^{N-1}\,dr = u(x)\int_{B_1}\phi(y)\,dy = u(x).$$

Comme $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, on en déduit que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ également. Puis, ε étant arbitraire, il vient que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Par la propriété de la valeur moyenne, si $x \in \Omega_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{dr}\int_{\partial B_1} u(x+ry)\,d\sigma(y) &= \int_{\partial B_1}\nabla u(x+ry)\cdot y\,d\sigma(y)\\ &= \int_{\partial B_r}\nabla u(x+z)\cdot\frac{z}{r}r^{N-1}\,d\sigma(z) = r^{N-1}\int_{\partial B_r(x)}\partial_\nu u\,d\sigma = r^{N-1}\int_{B_r(x)}\Delta u(y)\,dy,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule de Green dans la dernière égalité. Comme Δu est continue sur Ω, on en déduit que pour tout $x \in \Omega$, $\Delta u(x) = 0$, ce qui établit que u est harmonique dans Ω. □

De façon générale, il est possible d'étendre la notion de fonctions harmoniques aux distributions. Rappelons au préalable quelques notions de la théorie des distributions.

Définition 2.1.10. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ au sens suivant :

— Linéarité : soient λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et φ, $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, alors

$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle + \mu\langle T, \psi\rangle;$$

— Continuité : si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ sont tels $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (i.e. il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur K pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$), alors

$$\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle.$$

A titre d'exemple, toute fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ définit une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par la formule

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

En effet, la linéarité est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale et la continuité résulte du théorème de la convergence dominée. Un autre exemple important est celui de la masse de Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par

$$\langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

L'un des avantages des distributions réside dans le fait qu'il est possible de définir une notion de dérivée à tout ordre via une généralisation de la formule de Green. En effet, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière on a par applications successives de la formule de la divergence : pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(\partial^\alpha\varphi) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi \, dx.$$

Cette formule est à la base de la définition suivante.

Définition 2.1.11. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on définit la distribution $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Nous sommes à présent en mesure de définir la notion de distribution harmonique.

Définition 2.1.12. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. On dit que T est harmonique sur Ω si $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e.

$$\langle T, \Delta\varphi\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Remarque 2.1.13. Si $T = u$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, la formule de Green montre alors que

$$0 = \langle T, \Delta\varphi\rangle = \int_\Omega u\Delta\varphi \, dx = \int_\Omega (\Delta u)\varphi \, dx,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, ce qui montre que $\Delta u = 0$ sur Ω et donc que u est harmonique au sens usuel.

On peut montrer que toute distribution harmonique sur Ω est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. Nous démontrons ci-dessous ce résultat dans le cas où T est une fonction localement intégrable.

Théorème 2.1.14 (Weyl). *Soit $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega u\Delta\varphi \, dx = 0 \qquad \textit{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et u est harmonique sur Ω.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1)$ telle que $\phi(x) = \psi(|x|)$ avec $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\int_{B_1} \phi(y)\, dy = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-N}\phi(y/\varepsilon)$ et $\Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega : \operatorname{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Si $x \in \Omega_\varepsilon$, la fonction $y \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ est supportée dans Ω. On pose alors

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega u(y)\phi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Les propriétés standards de la convolution montrent que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et également presque partout (quitte à extraire une sous-suite). On montre par ailleurs que $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ et que

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\Delta\phi_\varepsilon(x-y)\, dy = 0,$$

autrement dit, que u_ε est harmonique sur Ω_ε. Soient $x \in \Omega$ tel que $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ et $r > 0$ tels que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. On peut alors trouver un $\varepsilon_0 > 0$ (dépendant de x et r) tel que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$. D'après le Théorème de la valeur moyenne, on a que

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\omega_N r^N}\int_{B_r(x)} u_\varepsilon(y)\, dy.$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient que p.p. tout $x \in \Omega$,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^N}\int_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

Par conséquent u admet un représentant continu dans la classe d'équivalence des fonctions qui lui sont égales presque partout. On peut donc supposer que $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. On est alors en mesure d'appliquer le Théorème 2.1.9 qui assure que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et u est harmonique sur Ω. □

La propriété régularisante des fonctions harmoniques peut se quantifier par l'inégalité de Caccioppoli qui contrôle les dérivées d'une fonction harmonique par des termes d'ordre inférieur. Notons que cette inégalité (valable pour les fonctions harmoniques ou, plus généralement, pour les solutions d'EDP elliptiques sous forme divergence) peut être vue comme une inégalité de Poincaré-Wirtinger inversée (voir le Théorème 3.2.8).

Théorème 2.1.15 (Inégalité de Caccioppoli). *Il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de la dimension N) telle que pour toute fonction harmonique u sur Ω, tout $x_0 \in \Omega$ et tout $0 < \rho < R$ tels que $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, alors on a*

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \le \frac{C}{(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u - u_{x_0,R})^2\, dx,$$

où $u_{x_0,R} = \frac{1}{\omega_N R^N}\int_{B_R(x_0)} u(y)\, dy$ est la moyenne de u sur $B_R(x_0)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R(x_0))$ telle que $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ sur $B_\rho(x_0)$ et $|\nabla\varphi| \le C/(R-\rho)$, où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de N. Comme $\varphi^2(u - u_{x_0,R}) \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R(x_0))$, on en déduit de la formule de Green que

$$\begin{aligned} 0 = -\int_{B_R(x_0)} \varphi^2(u-u_{x_0,R})\Delta u\,dx &= \int_{B_R(x_0)} \nabla(\varphi^2(u-u_{x_0,R}))\cdot\nabla u\,dx \\ &= \int_{B_R(x_0)} \varphi^2|\nabla u|^2\,dx + 2\int_{B_R(x_0)} \varphi(u-u_{x_0,R})\nabla\varphi\cdot\nabla u\,dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'inégalité $2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} \varphi^2|\nabla u|^2\,dx &= -2\int_{B_R(x_0)} \varphi(u-u_{x_0,r})\nabla\varphi\cdot\nabla u\,dx \\ &\le \varepsilon\int_{B_R(x_0)} \varphi^2|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_R(x_0)} (u-u_{x_0,R})^2|\nabla\varphi|^2\,dx \\ &\le \varepsilon\int_{B_R(x_0)} \varphi^2|\nabla u|^2\,dx + \frac{C}{\varepsilon(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u-u_{x_0,R})^2\,dx. \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = 1/2$ et en utilisant le fait que $\varphi = 1$ sur $B_\rho(x_0)$, on en déduit que

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\,dx \le \frac{C}{(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u-u_{x_0,R})^2\,dx,$$

ce qui démontre l'inégalité souhaitée. □

Une conséquence de l'inégalité de Caccioppoli concerne des propriétés de décroissance de la norme L^2 d'une fonction harmonique localisée sur une boule, en fonction du rayon de la boule. Ce type d'estimations mesure la régularité des fonctions (voir par exemple la Définition 4.1.2 des espaces de Campanato). Elles sont liées à des propriétés de monotonie et sont souvent à la base de théories de régularité.

Corollaire 2.1.16. *Il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de la dimension N) telle que pour toute fonction harmonique u sur Ω, tout $x_0 \in \Omega$ et tout $0 < \rho < R$ tels que $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, on a*

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u|^2\,dx \le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^N \int_{B_R(x_0)} |u|^2\,dx$$

et

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u-u_{x_0,\rho}|^2\,dx \le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |u-u_{x_0,R}|^2\,dx.$$

Démonstration. Notons que les deux inégalités sont immédiates si $\rho \ge R/2$. Sans restreindre la généralité, on peut donc supposer que $\rho < R/2$.

Commençons par montrer la première inégalité. Dans ce cas, on a

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u|^2\,dx \le \omega_N\rho^N \sup_{B_\rho(x_0)} |u|^2 \le \omega_N\rho^N \sup_{B_{R/2}(x_0)} |u|^2 = \omega_N\rho^N|u(\bar{x})|^2, \tag{2.1.5}$$

où $\bar{x} \in \overline{B_{R/2}(x_0)}$. D'après le théorème de la valeur moyenne, on a

$$u(\bar{x}) = \frac{2^N}{\omega_N R^N}\int_{B_{R/2}(\bar{x})} u\,dx,$$

ce qui implique, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u(\bar{x})|^2 \leq \frac{2^N}{\omega_N R^N} \int_{B_{R/2}(\bar{x})} |u|^2 \, dx \leq \frac{2^N}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_0)} |u|^2 \, dx. \tag{2.1.6}$$

La première inégalité se déduit de (2.1.5) et (2.1.6).

Concernant la deuxième inégalité, d'après l'inégalités de Poincaré-Wirtinger et la première inégalité appliquée à la fonction harmonique ∇u et l'inégalité de Caccioppoli, il vient

$$\begin{aligned}
\int_{B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^2 &\leq C\rho^2 \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \\
&\leq C\rho^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \int_{B_{R/2}(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \\
&\leq C\rho^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \frac{1}{R^2} \int_{B_R(x_0)} |u - u_{x_0,R}|^2 \, dx,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

Théorème 2.1.17 (Principe du maximum). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe. Si u est harmonique sur Ω et $M := \sup_{x\in\Omega} u(x) < +\infty$, alors soit $u(x) < M$ pour tout $x \in \Omega$ ou $u(x) = M$ pour tout $x \in \Omega$.*

Démonstration. Définissons $A := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ et notons qu'il s'agit d'un ensemble relativement fermé dans Ω. Comme u est harmonique dans Ω, il en est de même pour $M - u$. Par conséquent, si $x \in A$, le théorème de la valeur moyenne montre que

$$0 = M - u(x) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} [M - u(y)] \, dy.$$

Comme par ailleurs $M - u \geq 0$ dans Ω, on en déduit $M - u = 0$ dans $B_r(x)$, ce qui montre que $B_r(x) \subset A$. Par conséquent A est également ouvert dans Ω. La connexité de Ω entraine que $A = \Omega$ ou $A = \emptyset$. Dans le premier cas, on obtient que $u = M$ sur Ω et dans le second cas que $u < M$ sur Ω. □

Corollaire 2.1.18. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique sur Ω. Alors le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteind sur $\partial\Omega$.*

Démonstration. Comme $\overline{\Omega}$ est compact et u est continue sur $\overline{\Omega}$, u atteind son maximum sur $\overline{\Omega}$ en un point x_0. Si $x_0 \in \Omega$, le principe du maximum montre que u est constante sur la composante connexe de Ω qui contient x_0. Par conséquent, le maximum est atteind sur $\partial\Omega$. □

Théorème 2.1.19 (Unicité). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Si u_1, $u_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ sont des fonctions telles que*

$$\begin{cases} -\Delta u_i(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ u_i(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

pour $i = 1, 2$, alors $u_1 = u_2$ sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration. Les fonctions $u_1 - u_2$ et $u_2 - u_1 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ sont harmoniques sur Ω, elle atteignent donc leurs maximum sur $\partial\Omega$. Comme $u_1 - u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que $u_1 = u_2$ sur Ω. □

Théorème 2.1.20 (Liouville). *Si u est une fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^N$, alors u est constante.*

Démonstration. Comme u est harmonique sur $\mathbb{R}^N$ elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$. Par conséquent, en dérivant l'équation $\Delta u = 0$, on en déduit que toutes les dérivées partielles $\partial_i u$ $(1 \le i \le N)$ sont également harmoniques sur $\mathbb{R}^N$. Le théorème de la valeur moyenne et le théorème de la divergence montrent alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $R > 0$, on a

$$\partial_i u(x) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x)} \partial_i u(y)\, dy = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\partial B_R(x)} u\nu_i \, d\sigma.$$

Par conséquent,

$$|\partial_i u(x)| \le \frac{1}{\omega_N R^N} N\omega_N R^{N-1} \max_{\partial B_R(x)} |u| \le \frac{N}{R} \sup_{\mathbb{R}^N} |u|.$$

En faisant tendre $R \to +\infty$, on obtient que $\partial_i u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $1 \le i \le N$, ce qui montre que u est effectivement une fonction constante. □

2.2 Solution fondamentale

Dans cette section nous calculons la solution fondamentale du Laplacien, i.e. une fonction $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ qui satisfait

$$-\Delta G = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

et donnons quelques applications à la résolution d'EDP dans tout l'espace. Une manière élémentaire d'obtenir une solution fondamentale consiste à considérer des fonctions radiales sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Nous avons déjà vu au Corollaire 2.1.2 qu'elles sont toutes de la forme $a|x| + b$ si $N = 1$, $a \ln |x| + b$ si $N = 2$ et $a|x|^{2-N} + b$ si $N \ge 3$. Notons que ces fonctions sont localement intégrales de sorte qu'elles définissent bien des distributions sur $\mathbb{R}^N$. Comme la constante b est harmonique même en 0, elles ne contribuent pas et peuvent être omises. Il s'agit donc de montrer que la constante a peut être choisie de sorte à obtenir une solution fondamentale.

Théorème 2.2.1. *Soit*

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x| & si\ N = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & si\ N = 2, \\ \frac{|x|^{2-N}}{N(N-2)\omega_N} & si\ N \ge 3. \end{cases}$$

Alors G est une solution fondamentale pour le Laplacien.

Démonstration. Si $N = 1$, calculons pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\ \varphi''(x)\, dx = -\int_{-\infty}^0 x\varphi''(x)\, dx + \int_0^{+\infty} x\varphi''(x)\, dx.$$

En effectuant des intégrations par parties dans chaque intégrales, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|\ \varphi''(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)\, dx - [x\varphi'(x)]_{-\infty}^0 - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx + [x\varphi'(x)]_0^{+\infty} = 2\varphi(0),$$

ce qui montre bien que $-G'' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Considérons maintenant le cas $N \ge 2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \ln(|x|^2 + \varepsilon^2) & \text{si } N = 2, \\ \frac{(|x|^2+\varepsilon^2)^{(2-N)/2}}{N(N-2)\omega_N} & \text{si } N \ge 3. \end{cases}$$

Notons que $G_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a clairement que $G_\varepsilon(x) \to G(x)$ pour tout $x \neq 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs, $-\frac{1}{4\pi}\ln(|x|^2+1) \leq G_\varepsilon \leq -\frac{1}{2\pi}\ln|x|$ si $N=2$ et $|G_\varepsilon| \leq |G|$ si $N \geq 3$. Dans les deux cas, G_ε est dominée par une fonction localement intégrable. Le théorème de la convergence dominée montre alors que $G_\varepsilon \to G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \Delta G_\varepsilon, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} G_\varepsilon \Delta\varphi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} G\Delta\varphi\, dx = \langle \Delta G, \varphi\rangle.$$

Il suffit donc de montrer que $-\langle \Delta G_\varepsilon, \varphi\rangle \to \varphi(0)$.

Comme

$$\partial_i G_\varepsilon(x) = -\frac{1}{N\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-N/2}x_i, \quad \partial^2_{ii}G_\varepsilon(x) = -\frac{1}{N\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-N/2} + \frac{1}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-(N+2)/2}x_i^2$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}-\Delta G_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-N/2} - \frac{1}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-(N+2)/2}|x|^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-(N+2)/2} = \varepsilon^{-N}\psi(x/\varepsilon) = \psi_\varepsilon(x),\end{aligned}$$

où

$$\psi(y) := \frac{1}{\omega_N}(|y|^2+1)^{-(N+2)/2}. \tag{2.2.1}$$

Du fait que ΔG_ε est une fonction radiale, on peut donc écrire que

$$-\langle \Delta G_\varepsilon, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \Delta G_\varepsilon(-x)\varphi(x)\, dx = \varphi * \psi_\varepsilon(0).$$

Il s'agit alors de montrer que $\varphi * \psi_\varepsilon(0) \to \varphi(0)$.

Tout d'abord, un changement de variables en coordonnées polaires montre que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y)\, dy = \int_0^{+\infty}\int_{\partial B_1} \psi(rz) r^{N-1}\, d\sigma(z)\, dr \\ &= \frac{1}{\omega_N}\int_0^{+\infty}\int_{\partial B_1} (r^2+1)^{-(N+2)/2} r^{N-1}\, d\sigma(z)\, dr = N\int_0^{+\infty}(r^2+1)^{-(N+2)/2}r^{N-1}\, dr.\end{aligned}$$

En posant $s = r^2/(r^2+1)$, $ds = 2rdr/(r^2+1)^2$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y)\, dy = \frac{N}{2}\int_0^1 s^{(N-2)/2}\, ds = 1,$$

ce qui implique que $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\eta > 0$ on peut alors trouver un $R > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus \overline{B_R}} |\psi(y)|\, dy \leq \eta.$$

Par conséquent,

$$\varphi * \psi_\varepsilon(0) - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N} [\varphi(x) - \varphi(0)]\psi_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} [\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)]\psi(y)\, dy.$$

Par conséquent,

$$|\varphi * \psi_\varepsilon(0) - \varphi(0)| \leq 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\eta + \sup_{y \in \overline{B_R}} |\varphi(\varepsilon y) - \varphi(0)|,$$

et comme φ est uniformément continue sur le compact $\overline{B_R}$ on en déduit que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\varphi * \psi_\varepsilon(0) - \varphi(0)| \le 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\eta,$$

puis, $\eta > 0$ étant arbitraire, que $\varphi * \psi_\varepsilon(0) \to \varphi(0)$. $\square$

Le nom de solution fondamentale est en l'honneur de Newton car, pour $N = 3$, G est le potentiel Newtonien, i.e. le potentiel gravitationnel engendré par une unité de masse à la l'origine. En termes d'électrostatique, G est le potentiel Coulombien, i.e. le potentiel électrostatique engendré par une unité de charge positive à l'origine.

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre l'*équation de Poisson* $-\Delta u = f$ pour des seconds membres f assez généraux. Commençons par un résultat d'existence pour $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2.2.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose*

$$u(x) := (G * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)G(y)\,dy.$$

Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Démonstration. Comme $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$, les propriétés classiques de la convolution montrent que $G * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$\Delta u(x) = \Delta(G * f)(x) = G * \Delta f(x).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta f(x-y)G(y)\,dy = \int_{B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy.$$

On estime d'abord la première intégrale

$$\left|\int_{B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy\right| \le \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B_\varepsilon} |G(y)|\,dy.$$

Comme $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, l'intégrale ci-dessus tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, ce qui implique que

$$\int_{B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy \to 0.$$

Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f(x-\cdot) \subset B_R$. D'après la formule de Green, le fait que G est harmonique sur $B_R \setminus B_\varepsilon$ et $f = 0$ sur ∂B_R, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy &= \int_{B_R\setminus B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy \\ &= -\int_{\partial B_\varepsilon} G(y)\partial_\nu f(x-y)\,d\sigma(y) - \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y)\partial_\nu G(y)\,d\sigma(y).\end{aligned}$$

La première intégrale de bord s'estime de la façon suivante :

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon} G(y)\partial_\nu f(x-y)\,d\sigma(y)\right| \le \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\partial B_\varepsilon} |G(y)|\,d\sigma(y),$$

où

$$\int_{\partial B_\varepsilon} |G(y)|\, d\sigma(y) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } N = 1, \\ \varepsilon |\ln \varepsilon| & \text{si } N = 2, \\ \frac{\varepsilon}{N-2} & \text{si } N \geq 3, \end{cases}$$

ce qui montre que

$$\int_{\partial B_\varepsilon} G(y) \partial_\nu f(x-y)\, d\sigma(y) \to 0.$$

Par ailleurs, pour tout $y \in \partial B_\varepsilon$,

$$\partial_\nu G(y) = \nabla G(y) \cdot \left(\frac{-y}{|y|} \right) = \left(-\frac{y}{N\omega_N |y|^N} \right) \cdot \left(\frac{-y}{|y|} \right) = \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y) \partial_\nu G(y)\, d\sigma(y) &= \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y)\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z)\, d\sigma(z) \to f(x). \end{aligned}$$

En regroupant les résultats précédents, on obtient que $-\Delta u(x) = f(x)$. □

Pour des seconds membres f plus généraux, il convient de donner une définition généralisée de solution de l'équation $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.2.3. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. On dit que $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ est une *solution faible* (ou *solution au sens des distributions*) du problème

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi\, dx.$$

On a alors le résultat suivant d'existence.

Théorème 2.2.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Si $N = 1$, on suppose de plus que $\int_{\mathbb{R}} |y||f(y)|\, dy < +\infty$ et si $N = 2$, on suppose que $\int_{\mathbb{R}^2} |f(y)||\ln|y||\, dy < +\infty$. Alors $u := G * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et u est une solution faible de l'équation $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $u := G * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Soit χ la fonction caractéristique de la boule unité. Comme $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ on a que $\chi G \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, $(1-\chi)G \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 3$, $y \mapsto (1-\chi(y))\frac{G(y)}{|\ln|y||} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ si $N = 2$ et $y \mapsto (1-\chi(y))\frac{G(y)}{|y|} \in L^\infty(\mathbb{R})$ si $N = 1$. Les hypothèses faites sur f montrent alors que $(\chi G) * f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $((1-\chi)G) * f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, ce qui montre que

$$u = G * f = (\chi G) * f + ((1-\chi)G) * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \Delta\varphi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y) f(y)\, dy \right) \Delta\varphi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y) \Delta\varphi(x) \right) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} G(y-x) \Delta\varphi(x) \right) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(G * \varphi)(y) f(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(y)\, dy, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que G est radiale et le Théorème 2.2.2 dans la dernière égalité. □

Si la convolution avec la solution fondamentale permet de montrer l'existence de solutions classiques ou faibles du type $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^N$, l'unicité n'est en générale pas assurée par l'EDP. En effet, on peut par exemple rajouter à u n'importe quelle fonction harmonique pour construire une famille de solutions de l'EDP précédente. Il faut généralement rajouter des conditions de décroissance de u à l'infini.

De même, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné, la résolution d'EDP du type $-\Delta u = f$ dans Ω (en un certain sens) nécessite de préciser des conditions, dites conditions limites, sur le bord de Ω. On distingue deux classes importantes de problèmes aux limites :

— *le problème de Dirichlet* : soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, on cherche $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in \partial\Omega; \end{cases}$$

— *le problème de Neumann* : soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, on cherche $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ \partial_\nu u(x) = h(x) & \text{pour tout } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans la suite du cours, nous nous attacherons à décrire de bon cadres mathématiques permettant de résoudre ce type de problèmes parfois dans une plus grande généralité.

Chapitre 3

Equations linéaires sous forme divergence

3.1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. On appelle équation elliptique linéaire du second ordre sous forme divergence une équation du type

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'inconnue, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ est une matrice dont les coefficients $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ ont une régularité à préciser et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est un second membre. Pour le moment, nous restons vague sur la régularité des données A et f. Nous supposons toutefois que

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq N \tag{3.1.2}$$

ainsi qu'une condition dite d'*ellipticité* (ou de *coercivité*) : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$A(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1.3}$$

Cette dernière condition assure que l'EDP précédente est effectivement de type elliptique.

Remarque 3.1.1. Nous aurions pu considérer ci-dessus une condition limite de type Dirichlet non homogène de la forme

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, ou même considérer d'autres types de conditions limites par exemple une condition de Neumann

$$A\nabla u \cdot \nu = h \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

avec $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ également donnée. Cependant, nous nous restreindrons pour simplifier aux conditions de Dirichlet homogène.

Remarque 3.1.2. Si $A = \mathrm{Id}$, on retrouve le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

introduit au chapitre précédent.

Définition 3.1.3. On suppose que $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \ldots, N$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. On dit que u est une solution classique de (3.1.1) si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Il n'existe pas forcément de solution classique à (3.1.1). Néanmoins, il existe des solutions plus faibles que l'on va maintenant définir. Pour ce faire, supposons que u est une solution classique. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on multiplie l'équation ponctuellement par $\varphi(x)$ puis on intègre sur Ω, il vient alors

$$\int_\Omega f\varphi\, dx = -\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u)\varphi\, dx,$$

puis on utilise la forme de Green pour obtenir

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \text{pour tout } \ \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{3.1.4}$$

Notons l'absence de terme de bord dû au fait que φ est nulle sur $\partial\Omega$ (puisqu'à support compact dans Ω).

Réciproquement, supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfait $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et (3.1.4). On peut de nouveau intégrer par parties pour obtenir que

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u)\ \varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx,$$

ce qui montre que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ p.p. sur Ω. Comme les fonctions f et $\mathrm{div}(A\nabla u)$ sont continues (du fait des hypothèses de régularité), on obtient que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ partout sur Ω, ce qui montre que u est une solution forte.

Nous avons donc montré que u est une solution forte si et seulement si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfait $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et (3.1.4). Or la formulation (3.1.4) ne fait intervenir que les dérivées partielles premières de u. Ceci suggère d'affaiblir la notion de solution en cherchant une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaisant $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et (3.1.4). Malheureusement, l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est en général mal adapté pour appliquer des méthodes d'analyse fonctionnelle pour établir des résultats d'existence et d'unicité. Ceci peut se deviner en constatant que la formulation précédente est une formulation de type “intégrale” où il semble naturel d'imposer des conditions d'intégrabilité sur la solution et son gradient. Un bon cadre est donné par les espaces de Sobolev.

3.2 Espaces de Sobolev

Définition 3.2.1 (Espaces de Sobolev). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 1$. On dit que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et les dérivées distributionnelles jusqu'à l'ordre m satisfont $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m$. Autrement dit, il existe des fonctions $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha\varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g_\alpha\varphi\, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Si $p = 2$, on note $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Par convention, si $m = 0$, on pose $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Insistons sur le fait que les dérivées sont prises au sens des distributions. Il faut bien garder de croire que, par exemple, les fonction $W^{1,p}(\Omega)$ admettent des dérivées partielles au sens classique. Sauf en dimension $N = 1$, les fonctions $W^{1,p}(\Omega)$ ne sont même pas continues.

Exemple 3.2.2. Soit $\Omega =]-1, 1[^2$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = \Big(-\ln(\sqrt{x^2 + y^2})\Big)^\gamma$ avec $\gamma > 1$. Du fait de la singularité en $(0, 0)$, on a clairement que u n'est pas continue en $(0, 0)$ et même $u \notin L^\infty(\Omega)$. Cependant, on peut montrer que $u \in H^1(\Omega)$.

Les espaces de Sobolev possèdent de bonnes propriétés topologiques contrairement aux espaces de fonctions continûment différentiables sur un ouvert.

Proposition 3.2.3. *Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach lorsqu'on les munit de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\Big)^{1/p} & \text{si } 1 \le p < \infty, \\ \max_{0\le|\alpha|\le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\le|\alpha|\le m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx.$$

De plus,
- *si $1 \le p < \infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable ;*
- *si $1 < p < \infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.*

Une propriété utile est la densité des applications régulières dans les espaces de Sobolev.

Proposition 3.2.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Alors l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. Si de plus Ω est borné avec une frontière $\mathcal{C}^m$, alors l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ (la restriction à $\overline{\Omega}$ des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$) est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Comme nous l'avons observé, on associe toujours à une EDP posée sur un domaine borné une condition limite. Par exemple dans le cas d'une condition limite de Dirichlet, il est nécessaire de donner un sens à la valeur de la solution sur le bord du domaine. Comme les fonctions Sobolev sont définies comme des sous espaces des espaces de Lebesgue, elles sont stricto sensu définies comme des classes d'équivalence de fonctions définies presque partout. Or un ouvert à frontière régulière possède un bord de mesure nulle. Il n'est donc pas trivial de parler de la restriction d'une fonction Sobolev au bord. Une approche possible est la théorie des traces que nous n'évoquerons pas ici. Une autre approche est la suivante.

Définition 3.2.5. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \ge 1$. On définit $u \in W^{m,p}_0(\Omega)$ comme la fermeture dans $W^{m,p}(\Omega)$ de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Si $p = 2$, on note $H^m_0(\Omega) = W^{m,2}_0(\Omega)$.

Dire qu'une fonction $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, est une façon de dire que u est nulle sur $\partial\Omega$ comme limites de fonctions à support compact dans Ω. Le résultat suivant sera essentiel dans l'étude de problèmes aux limites avec une condition de Dirichlet homogène.

Théorème 3.2.6 (Inégalité de Poincaré). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Comme Ω est borné, il existe un $R > 0$ tel que $\Omega \subset]-R, R[^N$. On étend u par zéro sur $]-R, R[^N \setminus \Omega$. On a alors que pour tout $x \in \Omega$,

$$u(x) = \int_{-R}^{x_N} \partial_N u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\, dt.$$

On élève à la puissance p et on applique l'inégalité de Hölder, il vient que

$$|u(x)|^p \le (2R)^{p-1} \int_{-R}^{R} |\partial_N u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)|^p\, dt.$$

On intègre maintenant sur Ω, le théorème de Fubini montre alors que

$$\int_\Omega |u|^p\, dx \le (2R)^p \int_\Omega |\partial_N u|^p\, dx \le (2R)^p \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx.$$

On pose $C_\Omega = 2R$ (qui est indépendante de p) et on obtient la conclusion si $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Si maintenant $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Comme $u_n \to u$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)}$ et $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Par passage à la limite, on obtient donc l'inégalité de Poincaré pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Par définition, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^p(\Omega)$. Si l'ouvert Ω est borné, alors l'injection est en fait compacte.

Théorème 3.2.7 (Rellich). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $1 \le p \le \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^p(\Omega)$, i.e., si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^p(\Omega)$ telle que $u_{\sigma(n)} \to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$.*

Une conséquence de l'injection compacte de Rellich est l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, analogue de l'inégalité de Poincaré quand la fonction n'est pas nulle sur le bord.

Théorème 3.2.8 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, connexe et de classe $\mathcal{C}^1$. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \le C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

où $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\, dy$ est la moyenne de u sur Ω.

Démonstration. On démontre ce résultat par l'absurde en supposant l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$v_n := \frac{u_n - (u_n)_\Omega}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} \in W^{1,p}(\Omega),$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_\Omega v_n(y)\, dy = 0$, $\|v_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} \le \frac{1}{n}$. Par injection compacte de Rellich, on peut extraire une sous-suite (toujours notée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$ avec $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Par passage à la limite dans les propriétés précédentes, il vient $\int_\Omega v(y)\, dy = 0$, $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Par connexité de Ω, on en déduit que v est constante sur Ω et comme v est de moyenne nulle, on en déduit que $v = 0$ sur Ω, ce qui contredit le fait que $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$. □

3.3 Formulation faible

Revenons au problème aux limites (3.1.1). Les espaces de Sobolev permettent donc de donner un sens à cette formulation pour $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ et $u \in W^{1,1}_0(\Omega)$ car dans ce cas, les deux intégrales dans (3.1.4) sont bien définies. Notons que la condition limite "$u = 0$ sur $\partial\Omega$" est encodée dans l'indice 0 de l'espace $W^{1,1}_0(\Omega)$.

Pour montrer le caractère bien posé de ce problème, à se ramène au cadre du Théorème de Lax-Milgram.

Théorème 3.3.1 **(Lax-Milgram).** *Soit $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert, $L \in H'$ et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire*

— *continue : il existe $M > 0$ telle que $|a(u, v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H$ pour tout u, $v \in H$;*
— *coercive : il existe $\lambda > 0$ telle que $a(u, u) \geq \lambda\|u\|^2_H$ pour tout $u \in H$.*

Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \qquad \textit{pour tout } v \in H, \tag{3.3.1}$$

et

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda}\|L\|_{H'}.$$

Démonstration. Fixons $u \in H$ et définissons $L_u : H \to \mathbb{R}$ par $L_u(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in H$. La bilinéarité de a montre que L_u est linéaire, et la continuité de a implique que $|L_u(v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H$ pour tout $v \in H$. On en déduit que $L_u \in H'$ avec $\|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H$ et le théorème de Riesz assure l'existence et l'unicité d'un élement $Au \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$L_u(v) = \langle Au, v\rangle = a(u, v), \quad \|Au\|_H = \|L_u\|_{H'}.$$

De même, une nouvelle application du théorème de Riesz montre l'existence et l'unicité d'un $f \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$L(v) = \langle f, v\rangle, \quad \|f\|_H = \|L\|_{H'}.$$

On est donc ramené à démontrer l'existence et l'unicité d'un $u \in H$ tel que

$$Au = f. \tag{3.3.2}$$

Tout d'abord, l'application $A : H \to H$ est linéaire, et comme $\|Au\|_H = \|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H$, alors $A \in \mathcal{L}(H, H)$. Par ailleurs la coercivité de a implique que A est injective car si $Au = 0$, alors $0 = \langle Au, u\rangle = a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2_H$ ce qui implique que $u = 0$. Pour montrer la surjectivité, on établit d'abord que $\mathrm{Im}A$ est fermé dans H. Pour ce faire, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{Im}A$ telle que $v_n \to v$ dans H. Comme $v_n = Au_n$ pour un certain $u_n \in H$, on en déduit par coercivité de a que pour tout m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda\|u_n - u_m\|^2_H \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \langle Au_m - Au_n, u_m - u_m,\rangle \leq \|Au_m - Au_n\|_H\|u_m - u_n\|_H,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il s'ensuit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H, ce qui assure l'existence d'un $u \in H$ tel que $u_n \to u$. Par continuité de A, il vient $v = Au$ ce qui montre que $\mathrm{Im}A$ est un sous espace vectoriel fermé de H. On peut donc décomposer $H = \mathrm{Im}A \oplus \mathrm{Im}A^\perp$ et A sera surjective dès lors que $\mathrm{Im}A^\perp = \{0\}$. Or $u \in \mathrm{Im}A^\perp$ si et seulement si $\langle u, Av\rangle = 0$ pour tout $v \in H$. En particulier, le choix $v = u$ montre que $\lambda\|u\|^2_H \leq a(u, u) = \langle u, Au\rangle = 0$, soit $u = 0$. Ceci établit la bijectivité de l'opérateur $A : H \to H$ et donc l'existence et l'unicité d'un u satisfaisant (3.3.2). En effectuant le produit scalaire avec u, on obtient

$$\lambda\|u\|^2_H \leq a(u, u) = \langle Au, u\rangle = \langle f, u\rangle = L(u) \leq \|L\|_{H'}\|u\|_H,$$

ce qui montre l'estimation. □

Remarque 3.3.2. Si la forme bilinéaire a est de plus supposée symétrique, alors $a(\cdot,\cdot)$ définit sur H un nouveau produit scalaire équivalent à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et la conclusion du théorème de Lax-Milgram résulte d'une application directe du théorème de Riesz.

Dans le cas où a est de plus symétrique, le résultat suivant établit une caractérisation variationnelle de la solution de (3.3.1).

Proposition 3.3.3. *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, si l'on suppose de plus que a est symétrique, alors l'unique solution du problème* (3.3.1) *est aussi solution de*

$$\inf_{v\in H} J(v), \qquad \textit{avec} \ \ J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-L(v).$$

Démonstration. Soit $u\in H$, on écrit, pour tout $w\in H$

$$J(u+w)=J(u)+\frac{1}{2}a(w,w)+a(u,w)-L(w). \tag{3.3.3}$$

Si u est l'unique solution de (3.3.1), alors $a(u,w)=L(w)$ pour tout $w\in H$ et donc $J(u+w)>J(u)$ si $w\neq 0$. Réciproquement, si $J(u+w)\geq J(u)$ pour tout $w\in H$, on prend $w=tv$ avec $t>0$ dans (3.3.3), puis on fait tendre $t\to 0^+$, il vient alors $a(u,v)-L(v)\geq 0$, puis $a(u,v)-L(v)=0$ en changeant v en $-v$. $\square$

Le théorème de Lax-Milgram rentre dans un cadre Hilbertien. C'est la raison pour laquelle il convient de rechercher des solutions de (3.1.1) dans $H^1_0(\Omega)$ plutôt que $W^{1,1}_0(\Omega)$. Nous introduisons maintenant la *formulation faible*, ou encore *formulation variationnelle*, du problème aux limites (3.1.1).

Définition 3.3.4. Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f\in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). On dit que u est une solution faible de (3.1.1) si $u\in H^1_0(\Omega)$ et

$$\int_\Omega A\nabla u\ \cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f\varphi\,dx \qquad \text{pour tout} \ \ \varphi\in\mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

Remarque 3.3.5. Comme (par définition) $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$, on montre que u est une solution faible de (3.1.1) si $u\in H^1_0(\Omega)$ et

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v\,dx=\int_\Omega fv\,dx \qquad \text{pour tout} \ \ v\in H^1_0(\Omega).$$

En effet, si l'égalité précédente est satisfaite pour tout $v\in H^1_0(\Omega)$ elle l'est a fortiori pour tout $v\in\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ puisque $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)\subset H^1_0(\Omega)$. Réciproquement, si u est solution faible et $v\in H^1_0(\Omega)$ alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $\varphi_n\to v$ dans $H^1(\Omega)$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi_n\,dx=\int_\Omega f\varphi_n\,dx.$$

Comme $\varphi_n\to v$ dans $L^2(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_\Omega f\varphi_n\,dx-\int_\Omega fv\,dx\right|\leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\ \|\varphi_n-v\|_{L^2(\Omega)}\to 0,$$

ce qui montre que $\int_\Omega f\varphi_n\,dx\to\int_\Omega fv\,dx$. De même comme $\nabla\varphi_n\to\nabla v$ dans $L^2(\Omega)$, alors de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi_n\,dx-\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| &\leq\|A\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_n-\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_n-\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\to 0,\end{aligned}$$

d'où $\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, dx \to \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx$. Par passage à la limite, on obtient donc que

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous sommes à présent en mesure de montrer le caractère bien posé de la formulation faible.

Théorème 3.3.6. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \textit{pour tout} \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Par ailleurs, on a l'estimation

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\lambda} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3.4}$$

où $C_\Omega > 0$ est la constante de l'inégalité de Poincaré. Si de plus la matrice A est symétrique, alors u est aussi l'unique solution de

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v), \qquad \textit{avec} \;\; J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega A\nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx.$$

Démonstration. Soit $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{pour tout} \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors L est continue car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \;\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On définit également la forme bilinéaire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Alors, a est continue car, de nouveau, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u,v)| \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par ailleurs, a est coercive car d'après la propriété d'ellipticité (3.1.3) et l'inégalité de Poincaré, on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u,u) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2C_\Omega} \int_\Omega |u|^2 \, dx.$$

En posant $\alpha := \min(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2C_\Omega})$, on obtient que

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Nous somme donc en mesure d'appliquer le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'un $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = a(u,v) = L(v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \text{pour tout} \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

L'estimation (3.3.4) s'obtient en prenant $v = u$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, en utilisant la propriété d'ellipticité (3.1.3) de A et les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré.

Si de plus la matrice A est symétrique, alors pour tout $(u, v) \in H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega)$,

$$a(u, v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot A\nabla v \, dx = a(v, u)$$

ce qui montre que la forme bilinéaire a est symétrique. D'après la Proposition 3.3.3, on en déduit que u est également l'unique minimiseur de

$$v \mapsto J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega A\nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx$$

sur $H^1_0(\Omega)$. □

Remarque 3.3.7. En prenant comme fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, on a en fait montré que

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

Remarque 3.3.8. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on peut montrer que si $g = (g_1, \ldots, g_N)$ avec $g_i \in L^2(\Omega)$ pour tout $1 \le i \le N$, alors il existe une unique solution u au problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f + \mathrm{div} g & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H^1_0(\Omega). \end{cases}$$

3.4 Régularité des solutions

Nous avons montré que toute solution classique est une solution faible de (3.1.1). Par ailleurs, nous avons introduit un cadre Hilbertien qui assure l'existence et l'unicité d'une solution faible. Une question naturelle qui se pose alors, consiste à se demander si cette solution faible est une solution classique (quitte à rajouter des hypothèses sur les données du problème). Ce problème, difficile, rentre dans le cadre de la théorie de la régularité que nous développerons plus en détail dans le chapitre suivant.

Théorème 3.4.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Soit également $u \in H^1_0(\Omega)$ l'unique solution faible de (3.1.1). Si de plus $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \le i, j \le N$ et Ω est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $u \in H^2(\Omega)$. De plus, il existe une constante $C = C(\lambda, N, A, \Omega) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La démonstration de ce théorème est assez longue et délicate. Elle repose sur la *méthode des translations* due à Nirenberg. Etant donnés $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$, et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, on pose

$$\tau_h\varphi(x) = \varphi(x + h)$$

et

$$D_h\varphi(x) := \frac{\tau_h\varphi(x) - \varphi(x)}{|h|} = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|}.$$

Nous utiliserons la proposition suivante qui caractérise les fonctions Sobolev.

Proposition 3.4.2. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in L^2(\Omega)$. Alors $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ouvert ω avec $\overline{\omega} \subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$,*

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq C.$$

On a alors que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{N}$.

Démonstration. Commençons par supposer que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Soit $h \in \mathbb{R}^N$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $v(t) = u(x + th)$. On a alors $v'(t) = \nabla u(x + th) \cdot h$ et donc

$$u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\, dt = \int_0^1 \nabla u(x + th) \cdot h\, dt.$$

Par conséquent, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Fubini montrent que

$$\int_\omega |u(x + h) - u(x)|^2\, dx \leq |h|^2 \int_0^1 \int_\omega |\nabla u(x + th)|^2\, dx\, dt.$$

En effectuant le changement de variable $y = x + th$, il vient

$$\int_\omega |u(x + h) - u(x)|^2\, dx \leq |h|^2 \int_0^1 \int_{\omega + th} |\nabla u(y)|^2\, dy\, dt.$$

Si $|h| \leq \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$, alors $\omega + th \subset \Omega$, ce qui montre que

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, on peut trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier, on a que $D_h u_n \to D_h u$ dans $L^2(\omega)$ si $|h| \leq \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans

$$\|D_h u_n\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui conclut la preuve de la condition nécessaire.

Montrons maintenant la condition suffisante. On prend $h = \varepsilon u_i$ où $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$ et e_i est le i-ème vecteur de la base canonique. On pose $g_\varepsilon := D_{\varepsilon e_i} u$ de sorte que l'hypothèse montre que $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^2(\omega)$. On peut donc extraire une sous-suite et trouver $g^{(i)} \in L^2(\omega)$ tels que $g_\varepsilon \rightharpoonup g^{(i)}$ faiblement dans $L^2(\omega)$. Comme cette propriété est satisfaite pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, un argument d'extraction diagonale montre que la sous-suite peut être choisie indépendamment de ω et ainsi que $g^{(i)} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Or, par semi-continuité de la norme pour la convergence faible, on a que

$$\|g^{(i)}\|_{L^p(\omega)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \|D_{\varepsilon e_i} u\|_{L^p(\Omega)} \leq C,$$

où $C > 0$ est la constante de l'énoncé de la proposition, qui est indépendante de ω. Par conséquent, en prenant une suite d'ensembles $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui croît vers Ω, on obtient que $\|g^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, ce qui montre que $g^{(i)} \in L^2(\Omega)$.

Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et ω un ouvert tels que $\overline{\omega} \subset \Omega$ et $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \omega$. Pour tout $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$, on a

$$\int_\Omega (D_{\varepsilon e_i} u(x))\varphi(x)\, dx = \int_\Omega \frac{u(x+\varepsilon e_i) - u(x)}{\varepsilon}\varphi(x)\, dx$$
$$= -\int_\Omega u(y)\frac{\varphi(y) - \varphi(y-\varepsilon e_i)}{\varepsilon}\, dy = -\int_\Omega u(y) D_{-\varepsilon e_i}\varphi(y)\, dy.$$

Par ailleurs comme $D_{-\varepsilon e_i}\varphi(y) \to \partial_i \varphi(y)$ pour tout $y \in \Omega$, d'après le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$\int_\Omega g^{(i)}\varphi\, dx = -\int_\Omega u\partial_i\varphi\, dx,$$

ce qui montre $u \in H^1(\Omega)$ avec $\partial_i u = g^{(i)}$ et

$$\int_\Omega |\partial_i u|^2\, dx \leq C,$$

où $C > 0$ est la constante de l'énoncé. □

Remarque 3.4.3. La Proposition 3.4.2 reste vraie dans $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Par ailleurs, la démonstration de la condition suffisante montre de façon plus générale la propriété suivante : s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ouvert ω avec $\overline{\omega} \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$,

$$\|D_{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\omega)} \leq C,$$

alors $\partial_i u \in L^2(\Omega)$.

Lemme 3.4.4 (Estimations à l'intérieur). *Pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, on a $u \in H^2(\omega)$. De plus, il existe une constante $K_1 = K_1(N, \lambda, A, \Omega, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \leq K_1\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $h \in \mathbb{R}^N$, avec $|2h| < \mathrm{dist}(\mathrm{Supp}(\varphi), \Omega^c)$. Comme $D_{-h}\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, il vient d'après la formulation variationnelle,

$$\int_\Omega D_h(A\nabla u)\cdot\nabla\varphi\, dx = -\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla(D_{-h}\varphi)\, dx = -\int_\Omega f D_{-h}\varphi\, dx.$$

Comme $D_h(A\nabla u) = (\tau_h A)(D_h\nabla u) + (D_h A)\nabla u$, on obtient

$$\int_\Omega (\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\, dx = -\int_\Omega \big((D_h A)\nabla u\cdot\nabla\varphi + f D_{-h}\varphi\big)\, dx.$$

D'après la Proposition 3.4.2, on peut estimer l'expression précédente par

$$\int_\Omega (\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\, dx \leq \big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par densité, l'expression précédente reste vraie pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. On pose alors $\varphi = \eta^2 D_h u$ où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est telle que $0 \leq \eta \leq 1$. Notons que, pour h assez petit φ est bien définie et

$\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\nabla\varphi = 2\eta\nabla\eta(D_h u) + \eta^2\nabla(D_h u)$. En reportant dans l'estimation précédente et en utilisant la propriété d'ellipticité (3.1.3) satisfaite par la matrice A, il vient

$$\begin{aligned}
\lambda \int_\Omega |\eta\nabla(D_h u)|^2\,dx &\le \int_\Omega \eta^2(\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla(D_h u)\,dx \\
&= \int_\Omega (\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\,dx - 2\int_\Omega \eta(D_h u)(\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\eta\,dx \\
&\le \big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)(2\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta\nabla(D_h u)\|_{L^2(\Omega)}) \\
&\qquad + 2\|A\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|\eta\nabla(D_h u)\|_{L^2(\Omega)}\|(D_h u)\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young ($ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ pour tout a et $b \ge 0$), on obtient que

$$\begin{aligned}
\lambda\|\eta\nabla(D_h u)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le 2\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\nabla(D_h u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)^2 \\
&\qquad + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\nabla(D_h u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\varepsilon}\|A\|^2_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|(D_h u)\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$, il vient

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2}\|\eta D_h(\nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le 2\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{1}{\lambda}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)^2 + \frac{4}{\lambda}\|A\|^2_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|(D_h u)\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Soit ω un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, on choisit η de sorte que $\eta = 1$ sur ω, $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $0 \le \eta \le 1$. En notant $d = \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$, on a que $\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)} \le 2/d$. Il vient alors que

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda}{2}\|D_h(\nabla u)\|^2_{L^2(\omega)} &\le \frac{4}{d}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\
&\quad + \frac{1}{\lambda}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)^2 + \frac{16}{\lambda d^2}\|A\|^2_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'après la Proposition 3.4.2, on en déduit que $\nabla u \in H^1(\omega)$, soit $u \in H^2(\omega)$ pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. De plus en utilisant l'estimation (3.3.4), on obtient que

$$\|D^2 u\|_{L^2(\omega)} \le K_1\|f\|_{L^2(\omega)},$$

où $K_1 = K_1(N, \lambda, d, A, \Omega) > 0$. □

Lemme 3.4.5 (Estimations au voisinage du bord). *Pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un ouvert U tel que $x_0 \in U$ et $u \in H^2(\Omega \cap U)$. De plus, il existe une constante $K_2 = K_2(N, \lambda, A, U, \Omega) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega\cap U)} \le K_2\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.4.1}$$

Démonstration. **Etape 1 : Changement de variable pour se ramener à un bord plat.** Comme $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$, pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, on peut trouver un cube Q centré en x_0, une base $\{e_1, \dots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$ et une fonction $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tels que

$$\Omega \cap Q = \{x \in Q : x_N < \gamma(x')\}, \quad \partial\Omega \cap Q = \{x \in Q : x_N = \gamma(x')\}.$$

Soit $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la fonction définie par $\Phi(x) = (x', x_N - \gamma(x'))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. La fonction Φ est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$ ainsi que son inverse donnée par $\Psi(y) = \Phi^{-1}(y) = (y', y_N + \gamma(y'))$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$. De plus,

$$\Phi(Q \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^N_- := \{y \in \mathbb{R}^N : y_N < 0\}, \quad \Phi(Q \cap \partial\Omega) \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}.$$

Comme $V := \Phi(Q)$ est un ouvert tel que $V \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$, il existe une boule ouverte B centrée en un point de l'hyperplan $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ telle que $B \subset V$. On note enfin $U := \Psi(B)$ et $B^- := B \cap \mathbb{R}^N_- \subset V \cap \mathbb{R}^N_-$ de sorte que

$$\Omega \cap U = \Psi(B^-).$$

Notons $\tilde{u} = u \circ \Psi$ et montrons que $\tilde{u} \in H^1(B^-)$. En effet, comme $u \in H^1_0(\Omega)$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\tilde{u}_n = u_n \circ \Psi$. La fonction $\tilde{u}_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur B^-. D'après la formule de changement de variables, on a

$$\int_{B^-} |\tilde{u}_n(y) - \tilde{u}(y)|^2 \, dy = \int_{\Omega\cap U} |u_n(x) - u(x)|^2 |\det(\nabla\Phi(x))| \, dx \ \leq C\|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega\cap U)} \to 0,$$

ce qui montre que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $L^2(B^-)$. Un argument similaire montre que pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\partial_i \tilde{u}_n = (\nabla u_n \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi \to (\nabla u \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi \quad \text{dans} \ \ L^2(B^-).$$

On en déduit alors que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$

$$\int_{B^-} (\partial_i \tilde{u}_n)\varphi \, dy \to \int_{B^-} (\nabla u \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi \, \varphi \, dy,$$

ce qui montre que $\tilde{u} \in H^1(B^-)$ et $\nabla\tilde{u} = (\nabla\Psi)^T(\nabla u \circ \Psi)$. Comme la matrice $(\nabla\Psi)$ est inversible d'inverse $\nabla\Phi \circ \Psi$, on en déduit que

$$\nabla u \circ \Psi = (\nabla\Phi \circ \Psi)^T(\nabla\tilde{u}). \tag{3.4.2}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$, alors $\phi = \varphi \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega \cap U) \subset \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ et donc d'après la formulation variationnelle,

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\phi \, dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij} \partial_j u \partial_i \phi \, dx = \int_\Omega f\phi \, dx.$$

Comme $\partial_i \phi = \sum_{k=1}^N (\partial_k \varphi \circ \Phi)\partial_i \Phi_k$, il vient

$$\sum_{i,j,k=1}^N \int_\Omega a_{ij} \partial_j u \, (\partial_k \varphi \circ \Phi)\partial_i \Phi_k \, dx = \int_\Omega f(\varphi \circ \Phi) \, dx.$$

En changeant de variables $x = \Psi(y)$, il vient

$$\sum_{i,j,k=1}^N \int_{B^-} (a_{ij} \circ \Psi)(\partial_i \Phi_k \circ \Psi)|\det(\nabla\Psi)|(\partial_j u \circ \Psi)\partial_k \varphi \, dy = \int_{B^-} (f \circ \Psi)|\det(\nabla\Psi)|\varphi \, dy.$$

En posant $\tilde{A} = (\tilde{a}_{kl})_{1\leq k,l\leq N}$ où

$$\tilde{a}_{kl} := \sum_{i,j=1}^N |\det(\nabla\Psi)| \, (a_{ij} \circ \Psi)(\partial_i \Phi_k \circ \Psi)(\partial_j \Phi_l \circ \Psi), \quad \tilde{f} = |\det(\nabla\Psi)| \, (f \circ \Psi)$$

et en utilisant (3.4.2), il vient

$$\int_{B^-} \tilde{A}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\varphi\,dy = \int_{B^-} \tilde{f}\varphi\,dy. \tag{3.4.3}$$

On a clairement que $\tilde{f} \in L^2(B^-)$ avec $\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega\cap U)}$. De plus, pour tout $1 \leq k, l \leq N$, $\tilde{a}_{kl} \in \mathcal{C}^1(\overline{B^-})$ et la matrice $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{kl}(y))_{1\leq k,l\leq N}$ satisfait $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})} \leq C\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega\cap U})}$ ainsi que la condition d'ellipticité. En effet, d'après (3.1.3), pour tout $y \in B^-$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}(y)\xi\cdot\xi = \sum_{i,j,k,l=1}^{N} &|\det(\nabla\Psi(y))|\,(a_{ij}(\Psi(y))\partial_i\Phi_k(\Psi(y))\partial_j\Phi_l(\Psi(y))\xi_k\xi_l \\ &= \sum_{i,jl=1}^{N} |\det(\nabla\Psi(y))|\,(a_{ij}(\Psi(y))\eta_i\eta_j \geq \lambda|\det(\nabla\Psi(y))||\eta|^2,\end{aligned}$$

où $\eta = \nabla\Phi(\Psi(y))^T\xi$. Comme $\xi = \nabla\Psi(y)^T\eta$, on en déduit que $|\xi|^2 \leq C|\eta|^2$ où $C = \|\nabla\Psi\|_{L^\infty(B^-)}$. Par ailleurs, $\det(\nabla\Psi) = \sqrt{1+|\nabla\gamma|^2} \geq 1$, ce qui montre que

$$\tilde{A}(y)\xi\cdot\xi \geq \frac{\lambda}{C}|\xi|^2 \quad \text{pour tout } y \in B^- \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4.4}$$

Etape 2 : Estimation dans un demi plan. En utilisant la nouvelle formulation variationnelle (3.4.3), on peut procéder exactement comme dans les estimations intérieures en faisant cette fois des translations tangentielles, i.e., de la forme $h = te_k$ où $1 \leq k \leq N-1$. En effet, en prenant $D_{-h}\varphi$ comme fonction test dans (3.4.3) (où $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B^-)$), on obtient que

$$\int_{B^-} (\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla\varphi\,dx \leq \big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)\|\nabla\varphi\|_{L^2(B^-)}.$$

Par suite, on prend $\varphi = \eta^2 D_h\tilde{u}_n$ où $\tilde{u}_n = u_n\circ\Psi$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$. Comme $\tilde{u}_n = 0$ dans un voisinage de l'hyperplane $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, du fait que $h = te_k$ avec $1 \leq k \leq N-1$, alors $D_h\tilde{u}_n = 0$ dans un voisinage de $\mathbb{R}^{N-1}\times\{0\}$ (c'est ici qu'on utilise le fait que les translations doivent être tangentielles au bord). Par conséquent, le produit $\eta^2 D_h\tilde{u}_n$ est bien à support compact dans B^-. Il vient alors

$$\begin{aligned}&\int_{B^-} \eta^2(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla(D_h\tilde{u}_n)\,dx \\ &\qquad = \int_{B^-}(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla\varphi\,dx - 2\int_{B^-}\eta(D_h\tilde{u}_n)(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla\eta\,dx \\ &\leq \big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)\big(2\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B^-)}\|\nabla\tilde{u}_n\|_{L^2(B^-)} + \|\eta\nabla(D_h\tilde{u}_n)\|_{L^2(B^-)}\big) \\ &\qquad + 2\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^0(\overline{B^-})}\|\eta\nabla(D_h\tilde{u}_n)\|_{L^2(B^-)}\|(D_h\tilde{u}_n)\nabla\eta\|_{L^2(B^-)}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n\to\infty$, comme $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H^1(B^-)$, on obtient que

$$\begin{aligned}&\frac{\lambda}{C}\int_{B^-}|\eta\nabla(D_h\tilde{u})|^2\,dx \leq \int_{B^-}\eta^2(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla(D_h\tilde{u})\,dx \\ &\quad \leq \big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)\big(2\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B^-)}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\eta\nabla(D_h\tilde{u})\|_{L^2(B^-)}\big) \\ &\qquad + 2\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^0(\overline{B^-})}\|\eta\nabla(D_h\tilde{u})\|_{L^2(B^-)}\|(D_h\tilde{u})\nabla\eta\|_{L^2(B^-)},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété d'ellipticité (3.4.4) satisfaite par la matrice $\tilde{A}$. En utilisant l'inégalité de Young avec $\varepsilon = \frac{\lambda}{2C}$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2C}\|\eta D_h(\nabla\tilde{u})\|^2_{L^2(B^-)} &\leq 2\big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B^-)}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\\ &\quad + \frac{C}{\lambda}\big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)^2 + \frac{4C}{\lambda}\|\tilde{A}\|^2_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|(D_h\tilde{u})\nabla\eta\|^2_{L^2(B^-)}.\end{aligned}$$

En raisonnant comme dans l'estimation à l'intérieur et en utilisant la Remarque 3.4.3, on en déduit que pour tout $(k,l) \neq (N,N)$, $\partial^2_{kl}\tilde{u} \in L^2(B^-)$. De plus, il existe une constante $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(N,\lambda,\Omega,A) > 0$ telle que

$$\|\partial^2_{kl}\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} \leq \tilde{C}_1\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right). \tag{3.4.5}$$

Pour montrer que $\tilde{u} \in H^2(B^-)$, il reste à montrer que $\partial^2_{NN}\tilde{u} \in L^2(\Omega)$. Pour ce faire, on considère $\varphi = \frac{1}{\tilde{a}_{NN}}\psi$ (où $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$ comme fonction test dans (3.4.3). Notons que $\tilde{a}_{NN}(y) = \tilde{A}(y)e_N \cdot e_N \geq \frac{\lambda}{C} > 0$ pour tout $y \in B^-$ de sorte que $\frac{1}{\tilde{a}_{NN}} \in \mathcal{C}^1(\overline{B^-})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B^-)$. Il vient alors que

$$\int_{B^-}\tilde{a}_{NN}(\partial_N\tilde{u})\partial_N\left(\frac{1}{\tilde{a}_{NN}}\psi\right)dy = \int_{B^-}\left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{a}_{NN}}\psi - \sum_{(k,l)\ \neq(N,N)}\tilde{a}_{kl}(\partial_l\tilde{u})\partial_k\left(\frac{1}{\tilde{a}_{NN}}\psi\right)\right)dy.$$

Soit $(k,l) \neq (N,N)$. Comme $\tilde{a}_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\overline{B^-})$ et $\partial_{kl}\tilde{u} \in L^2(B^-)$, on en déduit que $\tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u}$ admet une dérivée distributionnelle par rapport à x_k dans $L^2(B^-)$ donnée par $(\partial_k\tilde{a}_{kl})\partial_l\tilde{u} + \tilde{a}_{kl}\partial^2_{kl}\tilde{u}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy &= \int_{B^-}\frac{1}{\tilde{a}_{NN}}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\tilde{a}_{NN})\psi\,dy\\ &\quad + \int_{B^-}\left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{a}_{NN}}\psi + \sum_{(k,l)\ \neq(N,N)}\frac{\partial_k\tilde{a}_{kl}}{\tilde{a}_{NN}}(\partial_l\tilde{u})\psi + \sum_{(k,l)\ \neq(N,N)}\frac{\tilde{a}_{kl}}{\tilde{a}_{NN}}(\partial^2_{kl}\tilde{u})\psi\right)dy.\end{aligned}$$

En utilisant (3.4.5), on obtient que pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$,

$$\left|\int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy\right| \leq \tilde{C}_2\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right)\|\psi\|_{L^2(B^-)},$$

où $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(A,\Omega,\tilde{K}_2) > 0$. Comme $\mathcal{C}^\infty_c(B^-)$ est dense dans $L^2(B^-)$, la forme linéaire $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-) \mapsto \int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy$ s'étend de façon unique en une forme linéaire continue sur $L^2(B^-)$. Le Théorème de Représentation de Riesz montre alors l'existence d'une fonction $g \in L^2(B^-)$ telle que

$$\int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy = -\int_{B^-}g\psi\,dy \quad \text{pour tout } \ \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-),$$

et

$$\|g\|_{L^2(B^-)} \leq \tilde{C}_2\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right). \tag{3.4.6}$$

Ceci montre que $\partial^2_{NN}\tilde{u} = g \in L^2(B^-)$ et donc que $\tilde{u} \in H^2(B^-)$. Par ailleurs, en regroupant (3.4.5) et (3.4.6), on obtient que pour tout $1 \leq k,l \leq N$,

$$\|\partial^2_{kl}\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} \leq \tilde{C}_3\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right), \tag{3.4.7}$$

où $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_3(N, \lambda, \Omega, A) > 0$.

Comme $\nabla\tilde{u} \in H^1(B^-)$, on obtient que $\nabla\tilde{u} \circ \Phi \in H^1(\Omega \cap U)$ et, d'après (3.4.2), que $\nabla u = \nabla\Phi(\nabla\tilde{u} \circ \Phi) \in H^1(\Omega \cap U)$. Par conséquent $u \in H^2(\Omega \cap U)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega\cap U)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega\cap U)} + \|u\|_{H^1(\Omega\cap U)}\right),$$

où $C = C(N, \lambda, \Omega, A, U) > 0$. D'après l'inégalité de Poincaré et (3.3.4), on a que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, d'où $\|u\|_{H^2(\Omega\cap U)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. □

Nous sommes à présent en mesure de donner la preuve du Théorème 3.4.1

Démonstration du Théorème 3.4.1. Comme $\partial\Omega$ est compact, d'après le Lemme 3.4.5, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $U_1, \ldots, U_m$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq m$, $u \in H^2(\Omega \cap U_i)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega\cap U_i)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit maintenant U_0 un ouvert tel que $\overline{U}_0 \subset \Omega$ et $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$. D'après le Lemme 3.4.4, on a que $u \in H^2(U_0)$ et

$$\|u\|_{H^2(U_0)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On considère une partition de l'unité $\theta_0, \ldots, \theta_m$ subordonnée au recouvrement $\{U_0, \ldots, U_m\}$ de $\overline{\Omega}$, i.e.,

— pour tout $0 \leq i \leq m$, $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(U_i)$ et $0 \leq \theta_i \leq 1$;

— $\sum_{i=0}^m \theta_i = 1$ sur $\overline{\Omega}$.

On a alors que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ et $\|\theta_i u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^2(\Omega\cap U_i)}$ pour tout $0 \leq i \leq m$ et comme $u = \sum_{i=0}^m \theta_i u$, il vient que $u \in H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

La régularité de la solution faible permet de définir une notion plus précise de solution.

Définition 3.4.6. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. On dit que u est une *solution forte* de (3.1.1) si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

On peut alors montrer l'existence de solutions fortes.

Théorème 3.4.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. Alors l'unique solution faible de (3.1.1) est également l'unique solution forte.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.4.1, l'unique solution faible u de (3.1.1) appartient à l'espace $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. En particulier, comme les coefficients de la matrice A sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$, alors $A\nabla u \in H^1(\Omega)$ et donc $\mathrm{div}(A\nabla u) \in L^2(\Omega)$. Par définition de la formulation faible et de la dérivée au sens des distributions, on a donc que

$$\int_\Omega f\varphi\, dx = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = -\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u)\varphi\, dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. On en déduit alors que $f = -\mathrm{div}(A\nabla u)$ p.p. sur Ω. L'unicité de la solution forte vient du fait que toute solution forte est une solution faible et de l'unicité de cette dernière. □

Il est encore possible d'aller plus loin et de montrer que, si les données sont assez régulières, alors on retrouve bien une solution classique. Tout d'abord, une récurrence relativement immédiate permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.4.8. *Soit $m \in \mathbb{N}$. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^{m+2}$, $f \in H^m(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. Alors l'unique solution faible u de (3.1.1) appartient à $H^{m+2}(\Omega)$.*

On peut même retrouver des solutions classiques quand les données sont très régulières. Pour ce faire, il convient d'utiliser une version des injections de Sobolev que nous admettrons (voir par exemple [3, Lemma 6.45]).

Théorème 3.4.9 (Injection de Sobolev). *Soient $m > k + \frac{N}{2}$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^m$. Alors $H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ et il existe une constante $C = C(m, k, N, \Omega)$ telle que*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^m(\Omega)} \quad \text{pour tout } u \in H^m(\Omega).$$

Une conséquence immédiate du Théorème 3.4.8 et de l'injection de Sobolev est que si $m > \frac{N}{2}$, alors la solution $u \in H^{m+2}(\Omega)$ est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{\Omega}$. Par conséquent, l'égalité $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ p.p. sur Ω a en fait lieu partout sur Ω, ce qui montre que u est une solution classique de (3.1.1).

On a finalement le résultat suivant de régularité.

Théorème 3.4.10. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. Alors l'unique solution faible u de (3.1.1) appartient à $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.4.8, on a que $u \in H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'injection de Sobolev montre que $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. $\square$

Chapitre 4

Résultats de régularité

D'après le Théorème 3.4.8 il est naturel de se demander si l'on peut obtenir de la régularité des solutions de $-\Delta u = f$ dans Ω quand f a un degré de différentiabilité donné. On pourrait naïvement penser que si $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ alors $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Malheureusement ceci est faux en général excepté dans le cas de la dimension $N = 1$.

Exemple 4.0.1 (Weierstrass). En dimension $N \geq 2$, on considère la boule $B = B_{1/2}(0)$ centré à l'origine et de rayon $1/2$. Pour tout $x \in B$, on pose

$$v(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)\sqrt{-\ln|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2}\left(\frac{4}{\sqrt{-\ln|x|}} + \frac{1}{2(\sqrt{-\ln|x|})^3}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On peut vérifier que $f \in \mathcal{C}(B)$, $v \in \mathcal{C}(B) \cap \mathcal{C}^2(B \setminus \{0\})$ et $\Delta v(x) = f(x)$ pour tout $x \in B \setminus \{0\}$. Si $u \in \mathcal{C}^2(B)$ est une solution de $\Delta u = f$ dans B, alors $v - u$ est harmonique dans $B \setminus \{0\}$ et $v - u$ est continue sur toute la boule B. Le principe des singularités artificielles montre que $v - u$ est en fait harmonique sur toute la boule B. Par conséquent, $v - u \in \mathcal{C}^\infty(B)$ et donc $v = (v - u) + u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur B ce qui est absurde.

En revanche, des résultats analogues sont valides si on remplace $\mathcal{C}^m(\Omega)$ par des espaces fonctionnels plus sophistiqués. Nous avons déjà vu dans le Théorème 3.4.8 que ceci est vrai dans les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$. Nous allons considérer d'autres situations dans le cadre des espaces de Hölder $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ et de Sobolev du type $W^{1,p}(\Omega)$.

4.1 Estimations de Schauder

Rappelons tout d'abord la définition des espaces de Hölder.

Définition 4.1.1 (Espaces de Hölder). Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact. On définit l'*espace de Hölder* $\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}^0(K)$ satisfaisant la propriété suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \text{pour tout } x, y \in K.$$

La plus petite constante $C > 0$ dans l'expression précédente est notée $[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)}$ et elle satisfait

$$[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} = \max_{x,y \in K, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)} := \|u\|_{\mathcal{C}^0(K)} + [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)}.$$

Si $k \in \mathbb{N}$, on définit l'espace $\mathcal{C}^{k,\alpha}(K)$ comme l'ensemble des fonctions u de classe $\mathcal{C}^k$ dans un voisinage ouvert de K et telles que, pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^N$ avec $|\beta| = k$, on a $\partial^\beta u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$. Il s'agit de nouveau d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(K)} := \|u\|_{\mathcal{C}^k(K)} + \max_{|\beta|=k} [\partial^\beta u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)}.$$

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert, on définit (l'espace de Fréchet) $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ telles que $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\omega})$ pour tout ouvert borné $\omega \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$.

Définition 4.1.2 (Espaces de Campanato). Soient $1 \leq p < \infty$, $\lambda \geq 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On définit l'*espace de Campanato* $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions $u \in L^p(\Omega)$ telles que

$$[u]_{p,\lambda}^p := \sup_{x_0 \in \Omega, \rho > 0} \rho^{-\lambda} \int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^p \, dx < +\infty,$$

où $u_{x_0,\rho} := \frac{1}{|\Omega \cap B_\rho(x_0)|} \int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} u(y)\, dy$. Il s'agit d'un espace de Banach pour la norme

$$\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{p,\lambda}.$$

Remarque 4.1.3. Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ pour $\lambda = \alpha p + N$. En effet, soient $x_0 \in \Omega$ et $\rho > 0$. Pour tout x et $y \in \Omega \cap B_\rho(x_0)$, on a $|u(x) - u(y)| \leq [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} |x - y|^\alpha \leq [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} (2\rho)^\alpha$. On en déduit que $|u(x) - u_{x_0,\rho}| \leq [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} (2\rho)^\alpha$, puis

$$\int_{\Omega \cap B_\rho(x_0)} |u(x) - u_{x_0,\rho}|^p \, dx \leq \omega_N 2^{\alpha p} [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}^p \rho^{\alpha p + N},$$

ce qui montre que $u \in \mathcal{L}^{p,\alpha p + N}(\Omega)$ avec

$$[u]_{p,\alpha p + N} \leq \omega_N^{1/p} 2^\alpha [u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

De plus, d'après l'inégalité de Hölder, on a également que $\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq |\Omega|^{1-1/p} \|u\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}$, ce qui montre que $\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\alpha p+N}(\Omega)} \leq C \|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$. Nous allons voir que si Ω est assez régulier, les espaces $\mathcal{L}^{p,\alpha p + N}(\Omega)$ et $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ sont en fait isomorphes.

Avant cela, nous rappelons un résultat d'intégration dont la démonstration se trouve par exemple dans [4, Theorem 3.21].

Théorème 4.1.4 (de différentiation de Lebesgue). *Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\omega_N \rho^N} \int_{B_\rho(x)} f(y)\, dy = f(x).$$

Théorème 4.1.5 (Campanato). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Si $N < \lambda \leq N + p$ et $\alpha = \frac{\lambda - N}{p}$, les espaces $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ et $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ sont isomorphes. De plus, les quantités $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}$ et $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ sont équivalentes.*

Démonstration. Nous avons déjà vu dans la Remarque 4.1.3 que si $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ pour $\lambda = \alpha p + N$ et, de plus,

$$\|u\|_{p,\lambda} \leq C\|u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Supposons maintenant que $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$. Montrons tout d'abord qu'il existe une constante $C = C(N, \lambda, p, \Omega) > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \Omega$ et $R > 0$, on a

$$|u_{x_0,2^{-k}R} - u_{x_0,2^{-l}R}| \leq C[u]_{p,\lambda}(2^{-k}R)^{\frac{\lambda-N}{p}} \qquad \text{pour tout } k < l. \tag{4.1.1}$$

Comme Ω est de classe $\mathcal{C}^1$, il existe une constante $A > 0$ telle que pour tout $x_0 \in \Omega$ et $\rho < \operatorname{diam}(\Omega)$, on a $|\Omega \cap B_\rho(x_0)| \geq A\rho^N$. Si x, $x_0 \in \Omega$ et $0 < r < R$, on a

$$|u_{x_0,r} - u_{x_0,R}|^p \leq 2^{p-1}(|u_{x_0,r} - u(x)|^p + |u(x) - u_{x_0,R}|^p).$$

En intégrant par rapport à $x \in \Omega \cap B_r(x_0)$, il vient

$$\begin{aligned}|u_{x_0,r} - u_{x_0,R}|^p \leq \frac{2^{p-1}}{Ar^N}\left(\int_{\Omega\cap B_r(x_0)} |u_{x_0,r} - u(x)|^p\,dx + \int_{\Omega\cap B_R(x_0)} |u(x) - u_{x_0,R}|^p\,dx\right)\\ \leq \frac{2^{p-1}}{Ar^N}[u]^p_{p,\lambda}(r^\lambda + R^\lambda) \leq \frac{2^p}{Ar^N}[u]^p_{p,\lambda}R^\lambda,\end{aligned}$$

d'où, $|u_{x_0,r} - u_{x_0,R}| \leq \frac{2}{A^{1/p}}[u]_{p,\lambda}R^{\lambda/p}r^{-N/p}$. Posons $R_j = 2^{-j}R$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, alors

$$|u_{x_0,R_j} - u_{x_0,R_{j+1}}| \leq \frac{2}{A^{1/p}}[u]_{p,\lambda}R^{\frac{\lambda-N}{p}}2^{\frac{j(N-\lambda)}{p}+\frac{N}{p}}.$$

En sommant pour $j = k, \ldots, l-1$, il vient

$$|u_{x_0,R_l} - u_{x_0,R_k}| \leq C[u]_{p,\lambda}R_k^{\frac{\lambda-N}{p}},$$

avec $C = C(N, p, \lambda, A) > 0$.

On en déduit que la suite $(u_{x_0,R_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une limite, notée $\tilde{u}(x_0)$. Par passage à la limite quand $l \to +\infty$ dans (4.1.1), on en déduit que pour tout $R > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|u_{x_0,R_k} - \tilde{u}(x_0)| \leq C[u]_{p,\lambda}(2^{-k}R)^{\frac{\lambda-N}{p}}, \tag{4.1.2}$$

ce qui montre que cette limite est en fait uniforme sur Ω. Comme la fonction $x_0 \mapsto u_{x_0,R_k}$ est continue, on en déduit que $\tilde{u}$ est continue. Par ailleurs, le théorème de différentiation de Lebesgue assure que $u_{x_0,R} \to u(x_0)$ pour presque tout $x_0 \in \Omega$. Par conséquent, $u = \tilde{u}$ presque partout sur Ω et on peut donc supposer que u est continue sur Ω.

D'après (4.1.2) avec $k = 0$ et en remplaçant R par $2R$, on a pour tout $x \in \Omega$,

$$|u(x) - u_{x,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda}R^{\frac{\lambda-N}{p}}. \tag{4.1.3}$$

Soient maintenant x et $y \in \Omega$, et posons $R = |x - y|$, alors

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{x,2R}| + |u_{x,2R} - u_{y,2R}| + |u_{y,2R} - u(y)|.$$

On a tout d'abord que

$$|u(x) - u_{x,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda}|x-y|^{\frac{\lambda-N}{p}}, \quad |u(y) - u_{y,2R}| \leq C[u]_{p,\lambda}|x-y|^{\frac{\lambda-N}{p}}.$$

Par ailleurs, si $z \in \Omega \cap B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$,

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq |u_{x,2R} - u(z)| + |u(z) - u_{y,2R}|$$

et comme $B_R(x) \cup B_R(y) \subset B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$, on en déduit, en intégrant sur $\Omega \cap B_{2R}(x) \cap B_{2R}(y)$, que

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq \frac{1}{|\Omega \cap B_R(x)|} \int_{\Omega \cap B_R(x)} |u_{x,2R} - u(z)|\, dz + \frac{1}{|\Omega \cap B_R(y)|} \int_{\Omega \cap B_R(y)} |u(z) - u_{y,2R}|\, dz.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et le fait que Ω est de classe $\mathcal{C}^1$, il vient que

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq \frac{2}{AR^N} (\omega_N R^N)^{1-1/p} (2R)^{\lambda/p} [u]_{p,\lambda} = C[u]_{p,\lambda} |x-y|^{\frac{\lambda - N}{p}}.$$

On a donc montré que $|u(x) - u(y)| \leq C[u]_{p,\lambda}|x-y|^\alpha$, ce qui établit que $[u]_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C[u]_{p,\lambda}$.

Enfin, on montre que la fonction u est bornée sur $\overline{\Omega}$. En effet, en posant $2R = \mathrm{diam}(\Omega)$ dans (4.1.3), on en déduit que pour tout $x \in \Omega$,

$$|u(x)| \leq |u_{x,2R}| + |u(x) - u_{x,2R}| \leq (\omega_N \mathrm{diam}(\Omega))^{-1/p} \|u\|_{L^p(\Omega)} + C[u]_{p,\lambda} \mathrm{diam}(\Omega)^{\frac{\lambda - N}{p}},$$

ce qui montre que $\|u\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)}$. □

Théorème 4.1.6 (Schauder). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ où $0 < \alpha < 1$. Si u est une distribution solution de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$. De plus, pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, il existe une constante $C = C(N, \alpha, \Omega, \omega)$ telle que*

$$\|D^2 u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\omega})} \leq C\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

Nous allons d'abord montrer que la solution distributionnelle est en fait une solution forte.

Lemme 4.1.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ où $0 < \alpha < 1$. Si u est une distribution solution de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega)$.*

Démonstration. On remarque tout d'abord que, du fait que $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, alors par régularité elliptique on a que $u \in H^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Nous allons à présent montrer que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pour ce faire, on considère un ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $\phi = 1$ sur ω. On pose $\tilde{f} = \phi f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ de sorte que le Théorème 2.2.4 assure que $-\Delta(\tilde{f} * G) = \tilde{f} = \phi f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Comme $\tilde{f} = f$ sur ω, on en déduit que $-\Delta(\tilde{f} * G) = f$ dans $\mathcal{D}'(\omega)$. Par conséquent $u - (\tilde{f} * G)$ est harmonique sur ω, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ω. Comme ω est arbitraire, on en déduit que $u - (\tilde{f} * G) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Il reste à établir que le potentiel Newtonien $\tilde{f} * G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \ln(|x|^2 + \varepsilon^2) & \text{si } N = 2, \\ \frac{(|x|^2+\varepsilon^2)^{(2-N)/2}}{N(N-2)\omega_N} & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Notons que $G_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et d'après les propriétés classiques de la convolution, on a également que $\tilde{f} * G_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a déjà vu dans la démonstration du Théorème 2.2.1 que $G_\varepsilon \to G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|\tilde{f} * G_\varepsilon(x) - \tilde{f} * G(x)| \leq \|G_\varepsilon - G\|_{L^1(\Omega - \Omega)} \|\tilde{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},$$

ce qui montre que $\tilde{f} * G_\varepsilon \to \tilde{f} * G$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$, et donc que $\tilde{f} * G$ est continue sur $\mathbb{R}^N$.

Pour tout $1 \leq j \leq N$, on a

$$\partial_j G_\varepsilon(x) = -\frac{1}{N\omega_N} \frac{x_j}{(|x|^2 + \varepsilon^2)^{N/2}},$$

et $\partial_j G_\varepsilon(x) \to \partial_j G(x) = \frac{1}{N\omega_N} \frac{x_j}{|x|^N}$ pour tout $x \neq 0$. Comme de plus $|\partial_j G_\varepsilon| \leq |\partial_j G| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ on en déduit par convergence dominée que $\partial_j G_\varepsilon \to \partial_j G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Le même argument que précédemment montre que $\partial_j(\tilde{f} * G_\varepsilon) = \tilde{f} * (\partial_j G_\varepsilon) \to \tilde{f} * (\partial_j G)$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$. Comme par ailleurs, $\partial_j(\tilde{f} * G_\varepsilon) \rightharpoonup \partial_j(\tilde{f} * G)$ faible* dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que $\partial_j(\tilde{f} * G) = \tilde{f} * (\partial_j G)$ est continue sur $\mathbb{R}^N$ et donc que $\tilde{f} * G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Il reste à montrer que $D^2 u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ ainsi que l'estimation. Pour ce faire, nous allons montrer que $D^2 u \in \mathcal{L}^{2,2\alpha+N}(\omega)$ en supposant, sans restreindre la généralité, que ω est de classe $\mathcal{C}^1$ (sinon on peut toujours trouver un ouvert ω' tel que $\overline{\omega} \subset \omega' \subset \overline{\omega'} \subset \Omega$). En dérivant l'équation on a $-\Delta \partial_k u = \partial_k f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Soit $x_0 \in \omega$ et $0 < R_0 := \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega)/2$ tel que $\overline{B_{R_0}(x_0)} \subset \Omega$. Pour tout $R < R_0$, on considère une solution faible $w \in H^1_0(B_R(x_0))$ de

$$\begin{cases} -\Delta w = \partial_k f & \text{dans } B_R(x_0), \\ w = 0 & \text{sur } \partial B_R(x_0). \end{cases}$$

i.e.,

$$\int_{B_R(x_0)} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = -\int_{B_R(x_0)} f \partial_k \varphi \, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in H^1_0(B_R(x_0)). \tag{4.1.4}$$

Le théorème de Lax-Milgram assure l'existence et l'unicité d'un tel w. On pose ensuite $z = \partial_k u - w$ de sorte que $\Delta z = 0$ dans $\mathcal{D}'(B_R(x_0))$ ce qui montre que $z \in \mathcal{C}^\infty(B_R(x_0))$.

Démonstration du Théorème 4.1.6. D'après le Corollaire 2.1.16 appliqué à la fonction harmonique ∇z dans $B_R(x_0)$, pour tout $0 < \rho < R$, on a

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,\rho}|^2 \, dx \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,R}|^2 \, dx,$$

ou encore,

$$\begin{aligned} &\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla \partial_k u - (\nabla \partial_k u)_{x_0,\rho}|^2 \, dx \\ &\qquad \leq 2 \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,\rho}|^2 \, dx + 2 \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla w - (\nabla w)_{x_0,\rho}|^2 \, dx \\ &\qquad \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla z - (\nabla z)_{x_0,R}|^2 \, dx + C' \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla w|^2 \, dx \\ &\qquad \leq C \left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla \partial_k u - (\nabla \partial_k u)_{x_0,R}|^2 \, dx + C'' \int_{B_R(x_0)} |\nabla w|^2 \, dx. \end{aligned}$$

En prenant $\varphi = w$ dans la formulation variationnelle (4.1.4) satisfaite par w, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} |\nabla w|^2 \, dx &= -\int_{B_R(x_0)} f \partial_k w \, dx \\ &= -\int_{B_R(x_0)} (f - f_{x_0,R}) \partial_k w \, dx \leq \|f - f_{x_0,R}\|_{L^2(B_R(x_0))} \|\nabla w\|_{L^2(B_R(x_0))}, \end{aligned}$$

ce qui montre, d'après la Remarque 4.1.3, que

$$\int_{B_R(x_0)} |\nabla w|^2\,dx \le \int_{B_R(x_0)} |f - f_{x_0,R}|^2\,dx \le C[f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} R^{2\alpha+N}.$$

Par conséquent, on a

$$\Phi(\rho) := \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}|^2\,dx \le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2}\Phi(R) + C'''[f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} R^{2\alpha+N}.$$

En remarquant que la quantité $c \mapsto \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla\partial_k u - c|^2\,dx$ est minimale précisément pour $c = (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}$, on en déduit que Φ est une fonction croissante. Le Lemme 4.1.8 implique alors que

$$\Phi(\rho) \le C\rho^{2\alpha+N}\left(\frac{\Phi(R)}{R^{2\alpha+N}} + [f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right)$$

soit, pour tout $\rho \le R_0$

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}|^2\,dx &\le C_{R_0}\rho^{2\alpha+N}\left(\|D^2u\|_{L^2(B_{R_0}(x_0))} + [f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right)\\ &\le C_{R_0}\rho^{2\alpha+N}\left(\|f\|_{L^2(B_{R_0}(x_0))} + [f]^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}\right) \le C_{R_0}\rho^{2\alpha+N}\|f\|^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.\end{aligned}$$

Si à présent $\rho \ge R_0$, alors par régularité elliptique et la Remarque 4.1.3,

$$\begin{aligned}\rho^{-2\alpha-N}\int_{B_\rho(x_0)\cap\omega} |\nabla\partial_k u - (\nabla\partial_k u)_{x_0,\rho}|^2\,dx &\le 2R_0^{-2\alpha-N}\int_{B_\rho(x_0)\cap\omega} |\nabla\partial_k u|^2\,dx\\ &\le C_{R_0}\int_\omega |D^2u|^2\,dx \le C_{R_0}\int_\omega |f|^2\,dx \le C_{R_0}\|f\|^2_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.\end{aligned}$$

Ceci implique que $D^2u \in \mathcal{L}^{2,2\alpha+N}(\omega)$ et d'après le théorème de Campanato, $D^2u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\omega})$, soit $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\omega})$, avec

$$\|D^2u\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\omega})} \le C\|f\|_{\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

ce qui conclut la preuve du théorème de Schauder. □

Lemme 4.1.8. *Soit $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante telle que pour tout $0 < \rho \le R$,*

$$\Phi(\rho) \le A\left(\frac{\rho}{R}\right)^a \Phi(R) + BR^b,$$

où A, B, a, $b > 0$ et $a > b$. Alors il existe $c = c(A,a,b)$ tel que pour tout $0 < \rho \le R$

$$\Phi(\rho) \le c\left(\frac{\Phi(R)}{R^b} + B\right)\rho^b.$$

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $A > 1$. Soit $\gamma = (a+b)/2$, on peut alors trouver $\tau \in (0,1)$ tel que $A\tau^a = \tau^\gamma$. Posons alors $\rho = \tau R$ de sorte que

$$\Phi(\tau R) \le A\tau^a\Phi(R) + BR^b = \tau^\gamma\Phi(R) + BR^b.$$

En itérant l'inégalité précédente, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau^k R) &\leq \tau^\gamma \Phi(\tau^{k-1} R) + B\tau^{(k-1)b} R^b \\
&\leq \tau^{k\gamma}\Phi(R) + B\tau^{(k-1)b} R^b \sum_{j=0}^{k-1} \tau^{j(\gamma-b)} \\
&\leq \left(\tau^{-b} + \tau^{-2b} \sum_{j=0}^{\infty} \tau^{j(\gamma-b)}\right) \tau^{(k+1)b}(\Phi(R) + BR^b) \\
&= c\tau^{(k+1)b}(\Phi(R) + BR^b),
\end{aligned}$$

où $c = c(A, a, b)$. Pour tout $0 < \rho < R$, on peut trouver $k \in \mathbb{N}$ tel que $\tau^{k+1} R \leq \rho \leq \tau^k R$. Comme $\tau^{k+1} \leq \rho/R$, on en déduit que

$$\Phi(\rho) \leq \Phi(\tau^k R) \leq c\tau^{(k+1)b}(\Phi(R) + BR^b) \leq c\left(\frac{\rho}{R}\right)^b (\Phi(R) + BR^b).$$

□

Le Théorème 4.1.6 s'étend en une estimation globale pour les solutions d'une EDP elliptique du second ordre sous forme divergence avec des coefficients assez réguliers. A l'aide de résultats d'approximation, on peut également montrer l'existence et l'unicité de solutions dans le cadre des espaces de Hölder (voir le Theorem 6.8 dans [6])

Théorème 4.1.9. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), $f \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. Alors il existe une unique solution classique $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que*

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

4.2 Estimations de Calderon-Zygmund

Théorème 4.2.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in L^p(\Omega)$ où $1 < p < \infty$. Si u est une distribution solution de $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors $u \in W^{2,p}_{\text{loc}}(\Omega)$. De plus, pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, il existe une constante $C = C(N, p, \Omega, \omega)$ telle que*

$$\|D^2 u\|_{L^p(\omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right).$$

Tout comme pour les estimations de Schauder, nous allons ramener le problème au contrôle dans $W^{2,p}$ d'une fonction harmonique et du potentiel Newtonien d'une fonction L^p. Pour ce faire, on étend f par zéro sur $\mathbb{R}^N$ et on continue à noter f cette extension. On pose alors

$$u = v + w$$

où $v := u - (G * f)$ et $w = G * f$. Comme f est à support compact (car Ω est borné), le Théorème 2.2.4 assure que $-\Delta w = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Par conséquent v est harmonique sur Ω, et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. On commence par montrer une estimation $W^{2,p}$ de la fonction harmonique v.

Lemme 4.2.2. *La fonction $v := u - G * f$ satisfait*

$$\|D^2 v\|_{L^p(\omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend que de N, p et $\operatorname{dist}(\omega, \partial\Omega)$.

Démonstration. Soit ω' un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \omega' \subset \overline{\omega'} \subset \Omega$. Comme $\partial_i v$ est harmonique sur Ω, on en déduit par la propriété de la moyenne et la formule de Green que si $x \in \omega'$ et $2r = d = \mathrm{dist}(\omega', \partial\Omega)$ de sorte que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$,

$$\omega_N r^N \partial_i v(x) = \int_{B_r(x)} \partial_i v(y)\, dy = \int_{\partial B_r(x)} v(y)\nu_i(y)\, d\sigma(y).$$

Par conséquent, en intégrant effectuant le changement de variable $y = x + rz$ dans l'intégrale de surface, on obtient que

$$|\partial_i v(x)| \le \frac{1}{\omega_N r} \int_{\partial B_1} |v(x+rz)|\, d\sigma(z).$$

On élève l'inégalité précédente à la puissance p puis on intègre par rapport à $x \in \omega'$. L'inégalité de Hölder et le Théorème de Fubini montrent alors que

$$\begin{aligned}\|\partial_i v\|^p_{L^p(\omega')} &\le \frac{1}{(\omega_N r)^p}(N\omega_N)^{p-1} \int_{\omega'} \left(\int_{\partial B_1} |v(x+rz)|^p\, d\sigma(z) \right) dx \\ &= \frac{1}{(\omega_N r)^p}(N\omega_N)^{p-1} \int_{\partial B_1} \left(\int_{\omega'} |v(x+rz)|^p\, dx \right) d\sigma(z) \le \frac{(N\omega_N)^p}{(\omega_N r)^p} \|v\|^p_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

Le même argument appliqué à la fonction harmonique $\partial^2_{ij} v$ montre que $\|\partial^2_{ij} v\|_{L^p(\omega)} \le C\|\partial_i v\|_{L^p(\omega')}$, ce qui implique que

$$\|D^2 v\|_{L^p(\omega)} \le C\|v\|_{L^p(\Omega)},$$

où $C = C(N, p, \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega)) > 0$. Or

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|G * f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Comme Ω est borné, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{\Omega}$ et $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on obtient que $\|G*f\|_{L^p(\Omega)} \le \|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)}\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Il vient finalement que $\|v\|_{L^p(\Omega)} \le C(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)})$ et donc que

$$\|D^2 v\|_{L^p(\omega)} \le C\left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}\right),$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Le reste de la preuve consiste à montrer que le potentiel Newtonien $w \in W^{2,p}(\Omega)$. Commençons par établir que $w \in W^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 4.2.3. *La fonction w appartient à $W^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. Comme $w = G * f$ avec $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{\Omega}$, une estimation du produit de convolution montre que $\|w\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)}$, soit $w \in L^p(\Omega)$.

Pour montrer que $\partial_j w \in L^p(\Omega)$ pour tout $1 \le j \le N$, il suffit d'établir que $\partial_j w = (\partial_j G) * f$ car, du fait que $\partial_j G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on en déduira que $\|\partial_j w\|_{L^p(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|\partial_j G\|_{L^1(\Omega-\Omega)}$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, alors d'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_\Omega w(x)\partial_j\varphi(x)\, dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega G(x-y)f(y)\, dy \right) \partial_j\varphi(x) dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega G(x-y)\partial_j\varphi(x)\, dx \right) f(y) dy.$$

Fixons $y \in \Omega$, et considérons $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon(y) \subset \Omega$. Alors

$$\int_\Omega G(x-y)\partial_j\varphi(x)\, dx = \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\, dx + \int_{B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\, dx.$$

D'après la formule de Green, il vient que

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon(y)} \partial_j G(x-y)\varphi(x))\,dx - \int_{\partial B_\varepsilon(y)} G(x-y)\varphi(x)\nu_j(x)\,d\sigma(x),$$

et

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} G(x-y)\varphi(x)\nu_j(x)\,d\sigma(x)\right| \le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\partial B_\varepsilon}|G(z)|\,d\sigma(z)\to 0$$

quand $\varepsilon\to 0$. Par ailleurs, comme G et $\partial_j G\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_\varepsilon(y)} G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx\right| + \left|\int_{B_\varepsilon(y)}\partial_j G(x-y)\varphi(x)\,dx\right| \\ \le \|\partial_j\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{B_\varepsilon}|G(z)|\,dz + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{B_\varepsilon}|\partial_j G(z)|\,dz\to 0.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\int_\Omega G(x-y)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega \partial_j G(x-y)\varphi(x)\,dx,$$

ce qui implique, en utilisant de nouveau le théorème de Fubini que

$$\int_\Omega w(x)\partial_j\varphi(x)\,dx = -\int_\Omega(\partial_j G * f)(x)\varphi(x)\,dx.$$

Il vient alors que $\partial_j w = \partial_j G * f$ et donc que $\partial_j w\in L^p(\Omega)$. □

Il reste donc à établir que $D^2 w\in L^p(\Omega)$. Le cas $p=2$ est une conséquence directe de la formule de Green.

Lemme 4.2.4. *Si $f\in L^2(\Omega)$, alors le potentiel Newtonien $G*f\in H^2(\Omega)$, $-\Delta(G*f)=f$ p.p. sur Ω et*

$$\|D^2(G*g)\|_{L^2(\Omega)}\le\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, l'application $T: L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ donnée par

$$Tf = \partial^2_{ij}(G*f)$$

est une application linéaire continue sur $L^2(\Omega)$.

Démonstration. On suppose d'abord que $f\in\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. D'après le Théorème 2.2.2, on a que $w := G*f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $-\Delta w = f$ dans $\mathbb{R}^N$. Soit $R>0$ tel que $\text{supp}(f)\subset\Omega\subset B_{R/2}$. Alors

$$\int_\Omega |f|^2\,dx = \int_{B_R}|f|^2\,dx = \int_{B_R}|\Delta w|^2\,dx = \sum_{i,j=1}^N\int_{B_R}(\partial^2_{ii}w)(\partial^2_{jj}w)\,dx.$$

En utilisant deux fois la formule de Green, il vient que

$$\int_\Omega|f|^2\,dx = \sum_{i,j=1}^N\int_{B_R}(\partial^2_{ij}w)(\partial^2_{ij}w)\,dx + \sum_{i,j=1}^N\int_{\partial B_R}\left[(\partial^2_{jj}w)(\partial_i w)\nu_i - (\partial_i w)(\partial^2_{ij}w)\nu_j\right]d\sigma.$$

Montrons que l'intégrale de surface tend vers zéro quand $R \to +\infty$. Si $x \in \partial B_R$ et $y \in \mathrm{supp}(f) \subset B_{R/2}$ alors $|x-y| \geq R/2 > 0$ de sorte que les applications $y \mapsto G(x-y)$, $y \mapsto \nabla G(x-y)$ et $y \mapsto D^2 G(x-y)$ appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\overline{B_{R/2}})$. Par conséquent, pour tout $x \in \partial B_R$,

$$\partial_i w(x) = \int_\Omega \partial_i G(x-y) f(y)\, dy, \quad \partial^2_{ij} w(x) = \int_\Omega \partial^2_{ij} G(x-y) f(y)\, dy.$$

Comme $|\partial_i G(x-y)| \leq \frac{1}{\omega_N |x-y|^{N-1}} \leq \frac{2^N}{\omega_N R^{N-1}}$ et $|\partial^2_{ij} G(x-y)| \leq \frac{N}{\omega_N |x-y|^N} \leq \frac{N 2^N}{\omega_N R^N}$, on en déduit que

$$\left| \int_{\partial B_R} \left[(\partial^2_{jj} w)(\partial_i w)\nu_i - (\partial_i w)(\partial^2_{ij} w)\nu_j \right] d\sigma \right| \leq C_N R^{1-N} R^{-N} R^{N-1} \to 0$$

quand $R \to +\infty$. Par conséquent,

$$\int_\Omega |f|^2\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{B_R} |D^2 w|^2\, dx \geq \int_\Omega |D^2 w|^2\, dx. \tag{4.2.1}$$

Si $f \in L^2(\Omega)$, on sait déjà que $w = G * f \in H^1(\Omega)$. Par densité, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ dans $L^2(\Omega)$. En notant $w_n := G * f_n$, comme Ω est borné et $G \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, on en déduit que

$$\begin{cases} \|w_n - w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|G\|_{L^1(\Omega-\Omega)} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \\ \|\partial_j w_n - \partial_j w\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_j G\|_{L^1(\Omega-\Omega)} \|f_n - f\|_{L^2(\Omega)} \to 0, \end{cases}$$

ce qui montre que $w_n \to w$ dans $H^1(\Omega)$. Par ailleurs, l'estimation (4.2.1) implique que $\|D^2 w_n - D^2 w_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)}$, ce qui montre que $(D^2 w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ qui est complet. La suite $(D^2 w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet donc une limite dans $L^2(\Omega)$ qui doit coïncider avec $D^2 w$. En particulier, $w \in H^2(\Omega)$ et, par passage à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité

$$\int_\Omega |D^2 w_n|^2\, dx \leq \int_\Omega |f_n|^2\, dx,$$

il vient

$$\int_\Omega |D^2 w|^2\, dx \leq \int_\Omega |f|^2\, dx.$$

Enfin, comme $-\Delta w_n = f_n$ dans Ω, on obtient que $-\Delta w = f$ p.p. dans Ω. □

Malheureusement, l'argument précédent ne s'adapte pas pour $p \neq 2$. Pour $p = 1$, nous allons montrer une version affaiblie qui repose sur la décomposition de Calderon-Zygmund d'une fonction intégrable f en une partie "good" notée g, où celle ci-est "essentiellement petite" et une autre "bad", noté b où elle peut prendre de grandes valeurs mais"oscille peu".

Théorème 4.2.5 (Decomposition de Calderon-Zygmund). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $t > 0$. Alors il existe une suite de cubes $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs deux à deux disjoints tels que*

1. $|f(x)| \leq t$ *p.p. tout* $x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j \right)$;
2. *pour tout* $j \in \mathbb{N}$, *on a*
$$t < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |f(x)|\, dx \leq 2^N t.$$
3. $\sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| \leq t^{-1} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$.

On peut alors décomposer f en

$$f = g + b$$

où

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right), \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy & \text{si } x \in Q_j. \end{cases}$$

qui satisfont

1. $|g| \leq 2^N t$ *p.p. sur* $\mathbb{R}^N$ *;*
2. $b = 0$ *p.p. sur* $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right)$ *;*
3. $\int_{Q_j} b(y)\,dy = 0$.

Démonstration du Théorème 4.2.5. Soit $l \in \mathbb{N}$ assez grand tel que

$$\frac{1}{l^N}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx \leq t.$$

On recouvre $\mathbb{R}^N$ par des cubes d'intérieurs deux à deux disjoints et dont les côtés sont de longueur l (la mesure de tels cubes est donc l^N). On décompose chacun de ces cubes Q en 2^N sous-cubes d'intérieurs deux à deux disjoints de longueur $l/2$. Les sous-cubes C qui satisfont

$$\frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|\,dx \leq t$$

sont de nouveau décomposés de la même manière et le procédé est répété indéfiniment. Notons $\mathcal{F} = \{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ la famille des cubes qui satisfont

$$\frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx > t.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit C l'unique cube dont la subdivision donne Q_j. On a alors nécessairement que $\frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|\,dx \leq t$ (puisque ce cube a été décomposé) et comme $|C|/|Q_j| = 2^N$, on a

$$t < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \leq 2^N \frac{1}{|C|}\int_C |f(x)|\,dx \leq 2^N t.$$

Par définition de Q_j, on a que $|Q_j| < t^{-1}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx$. Comme les cubes sont d'intérieurs deux à deux disjoints et que l'intersection des frontières de cubes est de mesure nulle, il vient que $\sum_{j\in\mathbb{N}} |Q_j| \leq t^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\,dx$.

Soit enfin $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ un point de Lebesgue de f. On peut alors trouver une suite décroissante de cubes ouverts $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant x_0 et dont le diamètre tend vers zéro quand $n \to +\infty$ satisfaisant

$$\frac{1}{|C_n|}\int_{C_n} |f(x)|\,dx \leq t \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En notant $C_n = x_n + (-l_n, l_n)^N$ où $x_n \in \mathbb{R}^N$ est le centre et $l_n > 0$ est la longueur des côtés du cube C_n, on en déduit que $C_n \subset B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)$. Par conséquent, d'après le théorème de différentiation de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{|C_n|}\int_{C_n} |f(x) - f(x_0)|\,dx &\leq \frac{|B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)|}{|C_n|}\frac{1}{|B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)|}\int_{B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\,dx \\ &= \omega_N N^{N/2}\frac{1}{|B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)|}\int_{B_{\sqrt{N}2l_n}(x_0)} |f(x) - f(x_0)|\,dx \to 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$|f(x_0)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{|C_n|}\int_{C_n} |f(x)|\,dx \leq t.$$

Posons alors

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right), \\ \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy & \text{si } x \in Q_j. \end{cases}$$

et $b = f - g$. Par construction, $b = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right)$ et $b = f - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f(y)\,dy$ p.p. sur Q_j de sorte que $\int_{Q_j} b(y)\,dy = 0$. Par ailleurs, on sait déjà que $|g| = |f| \leq t$ p.p. sur $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j\right)$ et, par construction des cubes Q_j, $|g| \leq \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \leq 2^N t$ sur Q_j. On a ainsi montré que $|g| \leq 2^N t$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. □

L'application linéaire $f \in L^2(\Omega) \mapsto Tf = \partial^2_{ij}(G * f)$ n'est en général pas continue sur $L^1(\Omega)$. Nous avons toutefois le résultat plus faible suivant.

Lemme 4.2.6. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de N telle que*

$$t|\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq C\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Démonstration. On étend f par zéro à tout $\mathbb{R}^N$ et on continue à noter f cette extension. D'après la décomposition de Calderon-Zygmund, on peut décomposer f sous la forme $f = g + b$ où g et b satisfont les conclusions du Théorème 4.2.5. Comme de plus $f \in L^2(\Omega)$, on en déduit que g et $b \in L^2(\Omega)$ ce qui montre que Tg et Tb sont bien définis. Par linéarité de T, $Tf = Tg + Tb$ et, pour tout $t > 0$, on a

$$\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\} \subset \{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\} \cup \{x \in \Omega : |Tb(x)| > t/2\},$$

d'où, en passant à la mesure

$$|\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq |\{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\}| + |\{x \in \Omega : |Tb(x)| > t/2\}|. \tag{4.2.2}$$

Estimation de Tg : D'après l'inégalité de Chebychev et le Lemme 4.2.4,

$$|\{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\}| \leq \frac{4}{t^2}\int_\Omega |Tg|^2\,dx \leq \frac{4}{t^2}\int_\Omega |g|^2\,dx \leq \frac{2^{2+N}}{t}\int_\Omega |g|\,dx,$$

car $|g| \leq 2^N t$ p.p. sur Ω, puis comme $\int_\Omega |g|\,dx \leq \int_\Omega |f|\,dx$,

$$|\{x \in \Omega : |Tg(x)| > t/2\}| \leq \frac{2^{2+N}}{t}\|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.2.3}$$

Estimation de Tb : On pose $b_k := b\chi_{Q_k}$ de sorte que $b = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ p.p. sur $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ et p.p. tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\left|\sum_{k=1}^n b_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |b|\,\chi_{Q_k} \leq \sum_{k=1}^n (2^N t + |f|)\,\chi_{Q_k} \leq 2^N t \chi_{\bigcup_{k=1}^{+\infty} Q_k} + |f| \in L^2(\mathbb{R}^N)$$

ce qui montre, par convergence dominée que $b = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ dans $L^2(\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, comme T est une application linéaire continue sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, il vient que

$$Tb = \sum_{k=0}^{+\infty} Tb_k \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

Soit y_k le centre du cube Q_k et $\delta_k = \operatorname{diam}(Q_k)$ de sorte que $\overline{Q}_k \subset B_k = B_{\delta_k}(y_k)$. Comme $\int_{Q_k} b_k(y)\, dy = 0$, pour tout $x \notin B_k$, on a

$$Tb_k(x) = \int_{Q_k} \partial^2_{ij} G(x-y) b_k(y)\, dy = \int_{Q_k} [\partial^2_{ij} G(x-y) - \partial^2_{ij} G(x-y_k)] b_k(y)\, dy.$$

Comme $x \notin B_k$, l'application $y \mapsto \partial^2_{ij} G(x-y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le cube Q_k. Pour tout $y \in Q_k$, le théorème des accroissements finis montre alors l'existence un $\hat{y}_k \in [y, y_k]$ tel que

$$|\partial^2_{ij} G(x-y) - \partial^2_{ij} G(x-y_k)| \leq |\nabla \partial^2_{ij} G(x-\hat{y}_k)|\ |y-y_k| \leq \frac{C_N}{|x-\hat{y}_k|^{N+1}}\ |y-y_k|.$$

Or comme Q_k est convexe, $\hat{y}_k \in Q_k$ et donc $|x-\hat{y}_k| \geq \operatorname{dist}(x, Q_k)$. On obtient finalement que

$$|Tb_k(x)| \leq \frac{C_N \delta_k}{\operatorname{dist}(x, Q_k)^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy,$$

et il vient alors que

$$\int_{\Omega \setminus B_k} |Tb_k(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_k} |Tb_k(x)|\, dx \ \leq C_N \delta_k \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_k} \frac{dx}{\operatorname{dist}(x, Q_k)^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy.$$

Or si $x \notin B_k$ et $z \in Q_k$, on a que $|x-y_k| \geq \delta_k$ et $|z-y_k| \leq \delta_k/2 \leq |x-y_k|/2$. Par conséquent, $|x-z| \geq |x-y_k| - |y_k - z| \geq |x-y_k|/2$ et donc $\operatorname{dist}(x, Q_k) \geq |x-y_k|/2$. D'après la formule de changement de variables en coordonnées polaires, il vient

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \setminus B_k} |Tb_k(x)|\, dx \ &\leq C_N \delta_k \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_k} \frac{dx}{|x-y_k|^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy \\ &= C_N \delta_k \int_{\delta_k}^{+\infty} \frac{r^{N-1}}{r^{N+1}}\, dr \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy \leq C_N \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy.\end{aligned}$$

En notant $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ et $G = \Omega \setminus F$, on obtient après sommation en $k \in \mathbb{N}$ que

$$\int_G |Tb|\, dx \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_G |Tb_k|\, dx \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{\Omega \setminus B_k} |Tb_k|\, dx \leq C_N \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{Q_k} |b_k|\, dx = C_N \int_\Omega |b|\, dx.$$

Mais comme $b = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ et $b = f - \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(y)\, dy$ p.p. sur Q_k, on en déduit que

$$\int_\Omega |b|\, dx \leq 2 \int_\Omega |f|\, dx,$$

ce qui montre que

$$\int_G |Tb|\, dx \leq C_N \int_\Omega |f|\, dx.$$

Or comme,

$$|\{x \in G : |Tb(x)| > t/2\}| \ \leq \frac{2}{t} \int_G |Tb| \, dx \leq \frac{C}{t} \int_\Omega |f| \, dx,$$

et $|B_k| = C_N |Q_k|$,

$$|F| \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |B_k| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega_N \delta_k^N = C_N \sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| \leq \frac{C_N}{t} \int_\Omega |f| \, dx,$$

il vient finalement que

$$|\{x \in \Omega : |Tb(x)| > t/2\}| \ \leq \frac{C}{t} \int_\Omega |f| \, dx. \tag{4.2.4}$$

En regroupant (4.2.2), (4.2.3) et (4.2.4), on obtient le résultat annoncé. □

Le résultat général dans le cas $1 < p < 2$ repose sur le théorème suivant d'interpolation de Marcinkiewicz et un argument de dualité quand $p > 2$.

Théorème 4.2.7 (Interpolation de Marcinkiewicz). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $1 \leq q < r < \infty$ des exposants et $T : L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega) \to L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ une application linéaire. Supposons qu'il existe des constantes K_1 et $K_2 > 0$ telles que*

$$|\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq \left(\frac{K_1 \|f\|_{L^q(\Omega)}}{t}\right)^q, \quad |\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \leq \left(\frac{K_2 \|f\|_{L^r(\Omega)}}{t}\right)^r$$

pour tout $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et tout $t > 0$. Alors T s'étend en une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$ pour tout $q < p < r$ et

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \ \leq C K_1^\theta K_2^{1-\theta} \|f\|_{L^p(\Omega)}$$

pour tout $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ où

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{r}$$

et $C > 0$ ne dépend que de p, q et r.

Avant de démontrer ce théorème, rappelons un résultat d'intégration.

Lemme 4.2.8. *Pour tout $p \geq 1$ et $f \in L^p(\Omega)$, on a*

$$\mu(t) := |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}| \ \leq \frac{1}{t^p} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx$$

et

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} \mu(t) \, dt.$$

Démonstration. La première inégalité (dite de Chebychev) est une conséquence de

$$t^p \mu(t) \leq \int_{\{|f|>t\}} |f|^p \, dx \leq \int_\Omega |f|^p \, dx.$$

Par ailleurs, si $f \in L^1(\Omega)$, en notant $A = \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ : |f(x)| > t\}$, le Théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)| \, dx = \int_\Omega \int_0^{|f(x)|} dt \, dx = \int_{\Omega\times\mathbb{R}^+} \chi_A(x,t) \, dx \, dt \\ = \int_{\mathbb{R}^+} \int_\Omega \chi_{\{x\in\Omega:|f(x)|>t\}} \, dx \, dt = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(t) \, dt.\end{aligned}$$

Si $p > 1$, on applique le cas précédent à la fonction $|f|^p \in L^1(\Omega)$, puis on effectue le changement de variables $t = s^p$. Il vient alors

$$\int_\Omega |f(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}+} |\{x \in \Omega : |f(x)|^p > t\}| \, dt = \int_{\mathbb{R}+} |\{x \in \Omega : |f(x)| > s\}| \, ps^{p-1} \, ds,$$

ce qui montre l'égalité désirée. □

Venons en à la preuve du Théorème de Marcinkiewicz.

Démonstration du Théorème 4.2.7. Pour $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $A > 0$ et $t > 0$, on écrit

$$f = f_1 + f_2$$

où

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| > A^{-1}t, \\ 0 & \text{si } |f(x)| \le A^{-1}t, \end{cases}$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| > A^{-1}t, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \le A^{-1}t. \end{cases}$$

Par linéarité de T, on a $|Tf| \le |Tf_1| + |Tf_2|$ et donc

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| &\le |\{x \in \Omega : |Tf_1(x)| > t/2\}| + |\{x \in \Omega : |Tf_2(x)| > t/2\}| \\ &\le \left(\frac{2K_1}{t}\right)^q \int_\Omega |f_1|^q \, dx + \left(\frac{2K_2}{t}\right)^r \int_\Omega |f_2|^r \, dx. \end{aligned}$$

Par suite, le Lemme 4.2.8 implique que

$$\int_\Omega |Tf|^p \, dx = p \int_{\mathbb{R}+} t^{p-1} |\{x \in \Omega : |Tf(x)| > t\}| \, dt$$

$$\le p(2K_1)^q \int_{\mathbb{R}+} t^{p-1-q} \left(\int_{\{|f| > A^{-1}t\}} |f|^q \, dx \right) dt + p(2K_2)^r \int_{\mathbb{R}+} t^{p-1-r} \left(\int_{\{|f| \le A^{-1}t\}} |f|^r \, dx \right) dt.$$

On pose $t = As$ où $A > 0$ sera déterminé ultérieurement. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Tf|^p \, dx \le p(2K_1)^q A^{p-q} \int_{\mathbb{R}+} s^{p-1-q} \left(\int_{\{|f| > s\}} |f|^q \, dx \right) ds \\ + p(2K_2)^r A^{p-r} \int_{\mathbb{R}+} s^{p-1-r} \left(\int_{\{|f| \le s\}} |f|^r \, dx \right) ds. \end{aligned}$$

Or, le Théorème de Fubini donne

$$\int_{\mathbb{R}+} s^{p-1-q} \left(\int_{\{|f| > s\}} |f(x)|^q \, dx \right) ds = \int_\Omega |f(x)|^q \left(\int_0^{|f(x)|} s^{p-1-q} \, ds \right) dx = \frac{1}{p-q} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx$$

et de même

$$\int_{\mathbb{R}+} s^{p-1-r} \left(\int_{\{|f| \le s\}} |f(x)|^r \, dx \right) ds = \int_\Omega |f(x)|^r \left(\int_{|f(x)|}^{+\infty} s^{p-1-r} \, ds \right) dx = \frac{1}{r-p} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx.$$

En regroupant les estimations précédentes, on obtient que

$$\int_\Omega |Tf|^p\,dx \le \left\{ \frac{p}{p-q}(2K_1)^q A^{p-q} + \frac{p}{r-p}(2K_2)^r A^{p-r} \right\} \int_\Omega |f(x)|^p\,dx$$

pour tout $A > 0$. En prenant la valeur de A qui minimise l'expression entre accolades, i.e.

$$A = 2K_1^{q/(r-q)} K_2^{r/(r-q)},$$

on obtient

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} \le 2\left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-p}\right)^{1/p} K_1^\theta K_2^{1-\theta} \|f\|_{L^p(\Omega)},$$

comme attendu. □

Lemme 4.2.9. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $f \in L^p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$. Alors le potentiel Newtonien $G * f \in W^{2,p}(\Omega)$, $-\Delta(G * f) = f$ p.p. sur Ω et il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que de N et p telle que*

$$\|D^2(G * g)\|_{L^p(\Omega)} \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier, l'application $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ donnée par

$$Tf = \partial^2_{ij}(G * f)$$

est une application linéaire continue sur $L^p(\Omega)$.

Démonstration. Le cas $p = 2$ a déjà été traité dans le Lemme 4.2.4. Si $1 < p < 2$, il suffit d'appliquer les Lemmes 4.2.4, 4.2.6 et le Théorème 4.2.7 d'interpolation de Marcinkiewicz avec $q = 1$ et $r = 2$. Il reste à traiter le cas $p > 2$ qui repose sur un argument de dualité. En effet, en posant $q = p/(p-1) \in]1, 2[$, si f et $g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$, alors une intégration par parties et le Théorème de Fubini montrent que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (Tf)g\,dx &= \int_\Omega \partial^2_{ij}(G * f)g\,dx = \int_\Omega (G * f)\partial^2_{ij} g\,dx \\ &= \int_\Omega\int_\Omega G(x-y)f(y)\partial^2_{ij}g(x)\,dy\,dx = \int_\Omega f(Tg)\,dy \le \|f\|_{L^p(\Omega)}\|Tg\|_{L^q(\Omega)}.\end{aligned}$$

Comme $1 < q < 2$, on a que $\|Tg\|_{L^q(\Omega)} \le C\|g\|_{L^q(\Omega)}$ et donc

$$\int_\Omega (Tf)g\,dx \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)},$$

d'où

$$\|Tf\|_{L^p(\Omega)} = \sup\left\{ \int_\Omega (Tf)g\,dx : g \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega), \|g\|_{L^q(\Omega)} \le 1 \right\} \le C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Par conséquent, T s'étend en une forme linéaire continue sur $L^p(\Omega)$. □

Le Théorème 4.2.1 est maintenant une conséquence immédiate des Lemmes 4.2.2 et 4.2.9.

Les estimations de Calderon-Zygmund sont fausses dans les cas critiques $p = 1$ et $p = \infty$.

Exemple 4.2.10. Supposons $N = 2$ et $D = B_1(0)$. On peut vérifier facilement les calculs suivants :

— si, pour tout $x \in D \setminus \{0\}$, on a $u(x) = \ln\ln(e|x|^{-1})$, alors $\Delta u(x) = -\frac{1}{|x|^2 \ln^2(e|x|^{-1})}$. On montre dans ce cas que $D^2u \notin L^1(D)$ mais que $\Delta u \in L^1(D)$;
— si, pour tout $(r,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[$, on a en coordonnées polaires $u(r,\theta) = r^2 \ln r \cos(2\theta)$, alors $\Delta u(r,\theta) = 4\cos(2\theta)$. On montre alors que $\Delta u \in L^\infty(D)$ mais $D^2u \notin L^\infty(D)$.

Remarque 4.2.11. On peut en fait montrer, à l'aide de techniques d'analyse harmonique qui dépassent le cadre de ce cours, que
— si $f \in L^1(\Omega)$, alors D^2u appartient à l'espace de Lorentz $L^{1,\infty}(\Omega)$, ce qui signifie (voir le Lemme 4.2.6) que
$$\sup_{t>0} t|\{x \in \Omega : |D^2u(x)| > t\}| < +\infty;$$
— si $f \in L^\infty(\Omega)$, alors $D^2u \in BMO(\Omega)$ qui est un espace isomorphe à l'espace de Campanato $\mathcal{L}^{1,N}(\Omega)$.

De plus, si f appartient à l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(\Omega)$ (qui peut être identifié au dual de $BMO(\Omega)$), alors $u \in W^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Les estimations de Calderon-Zygmund se généralisent en des estimations globales pour les solution d'une équation elliptique du second ordre sous forme divergence. A l'aide de techniques d'approximation, elles permettent également de montrer l'existence et l'unicité d'une solution forte pour un second membre $f \in L^p(\Omega)$ (voir par exemple le Theorem 9.15 dans [6]).

Théorème 4.2.12. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in L^p(\Omega)$ avec $1 < p < \infty$ et A une matrice satisfaisant la condition d'ellipticité (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i,j \leq N$. Alors il existe une unique solution $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ telle que*
$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \quad \textit{presque partout dans } \Omega.$$
De plus, il existe une constante $C > 0$ dépendant de N, p, λ, A et Ω telle que
$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

4.3 Autres résultats de régularité

Nous terminons ce chapitre par un exposé de quelques autres résultats de régularité. Contrairement aux résultats décrits jusqu'ici, les résultats suivants ont la particularité d'être valables sans aucune hypothèse supplémentaire sur les coefficients a_{ij} de l'EDP qui peuvent par conséquent être discontinus (contrairement aux Théorèmes 3.4.1 et 4.2.12 qui nécessitent des coefficients a_{ij} continûment différentiables).

Un premier résultat dû à Meyers montre une meilleure intégrabilité du gradient de la solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ d'une équation elliptique du second ordre sous forme divergence.

Théorème 4.3.1 (Meyers). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ l'unique solution faible de*
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
Alors il existe $\delta > 0$ qui ne dépend que de Ω, N, λ et $\|A\|_{L^\infty(\Omega)}$ tel que pour tout $2 < p < 2+\delta$, si $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, alors $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Une première démonstration relativement élémentaire se trouve dans [1] (Chapitre I, Section 4). Elle consiste à décomposer l'opérateur différentiel $L = -\mathrm{div}(A\nabla u)$ en une partie symétrique $L_1 = -\mathrm{div}(A_1\nabla u)$ avec $A_1^T = A_1$ ayant une grande constante d'ellipticité et une partie antisymétrique $L_2 = -\mathrm{div}(A_2\nabla u)$ avec $A_2^T = -A_2$ et $\|A_2\|_{L^\infty(\Omega)}$ petit. Les arguments principaux reposent sur le fait que $-\Delta$ réalise un isomorphisme de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p}(\Omega)$ (qui est par définition le dual topologique de $W_0^{1,q}(\Omega)$ avec $1/p + 1/q = 1$) et le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Une autre démonstration de portée plus générale se trouve par exemple dans [7] (Chapitre 6). Elle est basée sur l'inégalité de Caccioppoli et l'injection de Sobolev qui permettent d'établir une inégalité de Hölder inversée sur $|\nabla u|^2$. Un résultat général d'intégration appelé Lemme de Gehring montre alors que toute fonction satisfaisant une telle propriété possède une meilleure intégrabilité (voir [7, Theorem 6.6]).

Il s'agit d'un résultat de portée très générale qui peut se généraliser dans beaucoup de situations notamment pour les EDP elliptiques non linéaires, pour des problèmes variationnels et les problèmes vectoriels.

Un résultat dû à Stampacchia assure que la solution d'une EDP elliptique du second ordre sous forme divergence est toujours bornée.

Théorème 4.3.2 (Stampacchia). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ $(p > N/2)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Si u est l'unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$ de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors $u \in L^\infty(\Omega)$.

Deux démonstrations sont accessibles, toutes deux reposant sur l'inégalité de Caccioppoli qui permet de contrôler $\|\nabla u\|_{L^2(B_{R/2})}$ par $\|u\|_{L^2(B_R)}$ pour toute boule $B_R \subset \Omega$. La première preuve basée sur des itérations de Moser qui consiste à combiner l'inégalité de Caccioppoli et l'injection de Sobolev pour contrôler la norme L^q de u (pour tout $q < \infty$), en prenant comme fonctions tests des puissances de la solution (voir [5, Proposition 8.20]). La deuxième démonstration due à De Giorgi consiste à travailler plutôt sur les ensembles de niveaux de la solution (voir [5, Theorem 8.13]). Dans les deux cas, il s'agit d'une approche scalaire qui se généralise mal pour les problèmes vectoriels.

Les techniques développées précedemment peuvent encore être rafinée pour montrer une inégalité de Harnack permettant de contrôler l'oscillation de la solution faible sur des boules. En découle alors un résultat de régularité Höldérienne obtenu indépendamment par Nash (pour les équations paraboliques, mais la philosophie est la même) et par De Giorgi (voir [5, Chapter 8]).

Théorème 4.3.3 (De Giorgi, Nash, Moser). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$, $f \in L^2(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ $(p > N/2)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Si u est l'unique solution faible dans $H_0^1(\Omega)$ de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \textit{dans } \Omega, \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $u \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

On renvoit au livre [5] pour une approche générale de ce type de résultats de régularité. Remarquons qu'on ne fait aucune hypothèse de régularité sur les coefficients a_{ij} excepté leur mesurabilité, ce qui rend le résultat spectaculaire. Le théorème de De Giorgi-Nash-Moser est particulièrement célèbre pour deux raisons. D'abord parce qu'il clôt la résolution du XIXe problème de Hilbert, qui concerne la régularité des solutions de problèmes variationnels, et ensuite parce que le peu d'hypothèses sur la matrice A permet de traiter des versions non linéaires de cette équation.

Chapitre 5

Equations non linéaires sous forme divergence

5.1 Théorèmes de points fixes

Commençons par rappeler un résultat classique d'existence et d'unicité de point fixe pour des applications contractantes.

Théorème 5.1.1 (**Point fixe de Banach, Picard).** *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante, i.e., il existe un constante $0 < K < 1$ telle que*

$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y) \quad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

Alors, f admet un unique point fixe $\bar{x}$ dans X, i.e.,

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Nous allons à présent établir deux nouveaux théorèmes de point fixe, l'un en dimension finie (le théorème de Brouwer) et l'autre en dimension infinie (le théorème de Schauder) qui permettrons de montrer l'existence de solutions à des EDP elliptiques semi-linéaires.

Théorème 5.1.2 (**Point fixe de Brouwer).** *Soient K un ensemble compact et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe dans K.*

Démonstration. **Etape 1 : On se ramène au cas où K est une boule fermée.** Supposons le résultat vrai dans le cas des boules fermées. Considérons alors un convexe compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et une fonction continue $f : K \to K$. Comme K est borné, il existe une boule fermée B telle que $K \subset B$. On définit $g = f \circ P_K$ où P_K est la projection orthogonale sur le convexe fermé K. On a alors que $g : B \to K \subset B$ est continue comme composée d'applications continues. Par conséquent, il existe un $\bar{x} \in B$ tel que $f(P_K(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}$. Comme f prend ses valeurs dans K, alors nécessairement $\bar{x} \in K$ et $P_K(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Sans restreindre la généralité, on peut également supposer que B est la boule unité fermée.

Etape 2 : On se ramène au cas où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. En effet, comme dans l'étape 1, si $f : B \to B$ est une fonction continue, posons $g = f \circ P_B$ où P_B est la projection orthogonale sur la boule fermée B. Alors $g : \mathbb{R}^n \to B$ est continue comme composée de fonctions continues. Il existe alors un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(P_B(\bar{x})) = g(\bar{x}) = \bar{x}$. Comme f prend ses valeurs dans B, alors $\bar{x} \in B$ et $P_B(\bar{x}) = \bar{x}$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Etape 3 : On se ramène au cas où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. En effet, si $f : \mathbb{R}^n \to B$ est une fonction continue, on pose $f_\varepsilon := f * \rho_\varepsilon$, où ρ_ε est un noyau régularisant. Les propriétés classiques de la convolution montrent que $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $|f_\varepsilon| \leq 1$. De plus f étant continue, on a que $f_\varepsilon \to f$ uniformément sur tout compact. Soit $x_\varepsilon \in B$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Comme B est une boule fermée donc un compact, il existe une sous-suite $x_{\varepsilon_j} \to \bar{x} \in B$. Comme $f_{\varepsilon_j} \to f$ uniformément sur B, alors $f_{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}) \to f(\bar{x})$, ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Nous supposons par contradiction que f n'admet pas de point fixe sur B, de sorte que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in B$. Comme f prend ses valeurs dans B, on a en fait que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Etape 4 : Construction d'une rétraction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de B dans ∂B. Construisons une fonction continue $g : \mathbb{R}^n \to \partial B$ telle que $g(x) = x$ pour tout $x \in \partial B$. On considère la demi-droite d'extrémité $f(x)$ et qui est dirigée par le vecteur $x - f(x)$. Cette demi-droite coupe la sphère ∂B en un unique point noté $g(x)$. Il est clair par construction que g est à valeurs dans ∂B et que

$$g(x) = x \quad \text{si } x \in \partial B.$$

Par définition de g, il existe un nombre $\lambda_x \geq 0$ tel que $g(x) = f(x) + \lambda_x(x - f(x))$. Ce nombre s'obtient en résolvant l'équation du second degré

$$1 = |g(x)|^2 = |f(x)|^2 + 2\lambda f(x) \cdot (x - f(x)) + \lambda^2 |x - f(x)|^2,$$

et en prenant la racine positive. Le calcul du discriminant donne

$$\Delta_x = \big(f(x) \cdot (x - f(x))\big)^2 + (1 - |f(x)|^2)|x - f(x)|^2 \geq 0$$

car $|f(x)| \leq 1$. On obtient donc que

$$\lambda_x = \frac{-f(x) \cdot (x - f(x)) + \sqrt{\big(f(x) \cdot (x - f(x))\big)^2 + (1 - |f(x)|^2)|x - f(x)|^2}}{|x - f(x)|^2}$$

et que $x \mapsto \lambda_x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. Il s'ensuit que g est continue sur $\mathbb{R}^n$.

Notons qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\Delta_x \geq \delta$ pour tout $x \in B$. En effet, comme $x \mapsto \Delta_x$ est continue sur le compact B elle atteint son minimum en un point $x_0 \in B$. Si $\Delta_{x_0} = 0$, alors on aurait $|f(x_0)| = 1$ et $x_0 \cdot f(x_0) = 1$ ce qui impliquerait que $x_0 = f(x_0)$ qui est impossible. Par conséquent, en posant $\delta = \Delta_{x_0} = \min_{x \in B} \Delta_x$, on constate effectivement que $\Delta_x \geq \delta$ pour tout $x \in B$. On déduit de cela que la fonction $x \mapsto \lambda_x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathring{B}$, donc que $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathring{B})$ et, de plus,

$$c := \max_B |\nabla g| < +\infty.$$

Etape 5. Pour tout $0 \leq t \leq 1$ et pour tout $x \in B$, on pose

$$\varphi_t(x) = (1 - t)x + tg(x)$$

de sorte que $\varphi_0(x) = x$ et $\varphi_1(x) = g(x)$. Montrons que si $0 < t < 1/(1 + c)$, alors φ_t réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathring{B}$ sur $\mathring{B}$.

Tout d'abord, notons que l'on a toujours $\varphi_t(B) \subset B$ car si $x \in B$, alors $g(x) \in \partial B \subset B$ et par convexité de B, $\varphi_t(x) = (1 - t)x + tg(x) \in B$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a pour tout x, $y \in B$,

$$|g(x) - g(y)| \leq c|x - y|.$$

Comme

$$|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)| \geq (1 - t)|x - y| - t|g(x) - g(y)| \geq ((1 - t) - ct)|x - y|,$$

on en déduit que φ_t est injective dès que $0 \leq t < 1/(1+c)$. Comme φ_t est l'identité sur ∂B, il vient que $\varphi_t(\mathring{B}) \subset \mathring{B}$.

On remarque également que pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, on a

$$\nabla\varphi_t = (1-t)I + t\nabla g = (1-t)\left(I + \frac{t}{1-t}\nabla g\right)$$

avec

$$\frac{t}{1-t}|\nabla g| \leq \frac{ct}{1-t} < 1.$$

Par conséquent, pour $0 \leq t < 1/(1+c)$, $\nabla\varphi_t(x)$ est inversible pour tout $x \in \mathring{B}$ et le théorème d'inversion globale montre que φ_t réalise un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme de $\mathring{B}$ sur son image $\varphi_t(\mathring{B})$ qui est donc ouverte.

Montrons que φ_t est surjective en supposant par l'absurde que $\varphi_t(\mathring{B}) \neq \mathring{B}$. Il existe donc $y \in \mathring{B} \setminus \varphi_t(\mathring{B})$. Soit $y_0 \in \varphi_t(\mathring{B})$ et posons

$$\lambda_0 := \inf\{\lambda \geq 0 : \; y_\lambda = (1-\lambda)y_0 + \lambda y \notin \varphi_t(\mathring{B})\}.$$

Comme $\varphi_t(\mathring{B})$ est ouvert, on a $\lambda_0 > 0$. On a aussi $\lambda_0 \leq 1$ car $y \notin \varphi_t(\mathring{B})$. Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, on a que $y_{\lambda_0 - 1/k} \in \varphi_t(\mathring{B})$ ce qui implique l'existence d'un $x_k \in \mathring{B}$ tel que $\varphi_t(x_k) = y_{\lambda_0 - 1/k}$. Comme B est compacte, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $x_k \to x_0 \in B$ et par continuité de φ_t, on a $\varphi_t(x_0) = y_{\lambda_0}$. Il vient alors que $x_0 \notin \partial B$ car sinon, on aurait $x_0 = y_{\lambda_0} \in \partial B$ et, par convexité le segment $[y_0, y] \subset \mathring{B}$. Par conséquent, $x_0 \in \mathring{B}$ et donc $\varphi_t(\mathring{B})$ est un voisinage de y_{λ_0}. On en déduit qu'il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que $y_\lambda \in \varphi_t(\mathring{B})$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1[$, ce qui contredit la définition de λ_0 comme borne inférieure.

Etape 6. Comme

$$t \mapsto \det(\nabla\varphi_t(x)) = a_0(x) + a_1(x)t + \cdots + a_n(x)t^n$$

est une fonction polynômiale de degré n par rapport à t, on en déduit que $P : t \mapsto \int_B \det(\nabla\varphi_t(x))\, dx$ est également une fonction polynômiale. Par ailleurs, du fait que $\nabla\varphi_t = (1-t)I + t\nabla g \to I$ uniformément sur B, alors $\det(\nabla\varphi_t) \to 1$ uniformément sur B ce qui montre l'existence d'un $t_0 < 1/(1+c)$ tel que pour tout $0 < t < t_0$ et tout $x \in B$, on a $\det(\nabla\varphi_t(x)) > 0$. D'après la formule de changement de variables, on a alors que pour tout $0 < t < t_0$,

$$|\mathring{B}| = |\varphi_t(\mathring{B})| = \int_B \det(\nabla\varphi_t(x))\, dx = P(t),$$

ce qui montre que le polynôme P est constant sur $]0, t_0[$ et donc constant sur $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$|\mathring{B}| = P(1) = \int_B \det(\nabla\varphi_1(x))\, dx = \int_B \det(\nabla g(x))\, dx.$$

Par ailleurs, s'il existait un $x \in B$ tel que $\det(\nabla g(x)) \neq 0$, le théorème d'inversion locale montrerait que g réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme local au voisinage de x et donc que l'image de g ne serait pas d'intérieur vide, ce qui est absude puisque g prend ses valeurs dans la sphère ∂B. Par conséquent $\det(\nabla g) = 0$ sur B ce qui est impossible puisque $|B| \neq 0$. On en déduit finalement que f admet au moins un point fixe dans B. $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'étendre ce dernier résultat en dimension infinie.

Théorème 5.1.3 (Point fixe de Schauder). *Soient E un espace de Banach, K un sous ensemble compact et convexe de E et $f : K \to K$ une fonction continue. Alors f admet un point fixe dans K.*

Démonstration. L'idée consiste à se ramener au point fixe de Brouwer par approximation. Soit $\varepsilon > 0$, par compacité de K, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \ldots, x_n \in K$ tels que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Notons que $\sum_{i=1}^n \operatorname{dist}(x, B(x_i,\varepsilon)^c) > 0$ pour tout $x \in K$, car sinon on pourrait trouver un point $\bar{x} \in K$ tel que $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)^c = \left(\bigcup_{i=1}^n B(x_i,\varepsilon)\right)^c$ ce qui est impossible. On peut alors définir pour tout $x \in K$,

$$\alpha_i^\varepsilon(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, B(x_i,\varepsilon)^c)}{\sum_{j=1}^n \operatorname{dist}(x, B(x_j,\varepsilon)^c)} \geq 0.$$

Les fonctions α_i^ε sont continues sur K et $\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$ pour tout $x \in K$. On pose $J_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) x_i$ pour tout $x \in K$. Pour tout $x \in K$, on a alors

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| = \|\sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x)(x_i - x)\| \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x)\|x_i - x\|.$$

Si $\alpha_i^\varepsilon(x) \neq 0$, alors $x \in B(x_i, \varepsilon)$, par conséquent,

$$\|J_\varepsilon(x) - x\| \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n \alpha_i^\varepsilon(x) = \varepsilon. \tag{5.1.1}$$

En notant $K_\varepsilon := \operatorname{Conv}\{x_1, \ldots, x_n\}$ l'enveloppe convexe de $\{x_1, \ldots, x_n\}$, on a que $K_\varepsilon \subset K$ car K est convexe. De plus K_ε est convexe et compact car c'est un sous ensemble de $\operatorname{Vect}\{x_1, \ldots, x_n\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E dimension finie.

Comme J_ε est continue, alors $f_\varepsilon := J_\varepsilon \circ f : K_\varepsilon \to K_\varepsilon$ est également continue. Le théorème du point fixe de Brouwer assure alors l'existence d'un $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tel que $f_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Du fait que $K_\varepsilon \subset K$ et K est compact, on peut extraire une sous-suite (x_{ε_j}) et trouver un point $\bar{x} \in K$ tels que $x_{\varepsilon_j} \to \bar{x}$. On en déduit alors que

$$\|f(\bar{x}) - \bar{x}\| \leftarrow \|f(x_{\varepsilon_j}) - x_{\varepsilon_j}\| = \|f(x_{\varepsilon_j}) - J_{\varepsilon_j}(f(x_{\varepsilon_j}))\| \leq \varepsilon_j \to 0,$$

ce qui montre que $f(\bar{x}) = \bar{x}$. □

Il sera parfois utile d'utiliser la version suivante du point fixe de Schauder.

Corollaire 5.1.4. *Soient E un espace de Banach, $C \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé, borné et $f : C \to C$ une fonction continue telle que $\overline{f(C)}$ est compact. Alors f admet un point fixe dans C.*

Démonstration. L'ensemble $A := \overline{f(C)}$ est compact par hypothèse, mais il n'est pas convexe. On considère alors l'enveloppe convexe $\operatorname{Conv}(A)$ qui est convexe mais pas fermée en dimension infinie. On considère alors l'ensemble convexe fermé $K := \overline{\operatorname{Conv}(A)}$ et nous admettons temporairement qu'il est compact. Comme $f(C) \subset C$, alors $A = \overline{f(C)} \subset C$ car C est fermé, puis $\operatorname{Conv}(A) \subset C$ car C est convexe, et enfin $K = \overline{\operatorname{Conv}(A)} \subset C$ car de nouveau C est fermé. Par conséquent, $f : K \to K$ et le théorème du point fixe de Schauder montre l'existence d'un point fixe de f dans $K \subset C$.

Il reste à montrer que K est compact. Soit $\varepsilon > 0$, comme A est compact, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et des points $x_1, \ldots, x_m \in A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon/2) = \{x_1, \ldots, x_m\} + B(0, \varepsilon/2).$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\} + B(0, \varepsilon/2).$$

Comme $\mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ est un sous ensemble convexe de $\mathrm{Vect}\{x_1, \dots, x_m\}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, alors $\mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ est convexe et compact. Il existe donc un entier $n \in \mathbb{N}$ et des points $y_1, \dots, y_n \in \mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\}$ tels que

$$\mathrm{Conv}\{x_1, \dots, x_m\} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon/2) = \{y_1, \dots, y_m\} + B(0, \varepsilon/2).$$

On en déduit alors

$$\mathrm{Conv}(A) \subset \{y_1, \dots, y_n\} + B(0, \varepsilon) = \bigcup_{j=1}^{n} B(y_j, \varepsilon),$$

ce qui montre que $\mathrm{Conv}(A)$ est précompact et donc compact. □

5.2 Equations semi-linéaires

Le théorème du point fixe de Schauder permet de montrer l'existence de solutions d'EDP elliptiques *semi-linéaires*, i.e. d'EDP non linéaires mais dont la partie principale est linéaire par rapport à u. On considère tout d'abord l'EDP sous forme divergence suivante :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f(x, u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

Le terme principal de cette équation $\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{ij}^2 u(x)$ est effectivement linéaire par rapport à u.

On rappelle tout d'abord la définition et quelques propriétés des *fonctions de Carathéodory.*

Définition 5.2.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory si $f(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}^m$ pour presque tout $x \in \Omega$ et $f(\cdot, z)$ est mesurable sur Ω pour tout $z \in \mathbb{R}^m$.

Lemme 5.2.2. *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory et $w : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction mesurable. Alors la fonction $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable.*

Démonstration. La fonction w étant mesurable, il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions étagées qui converge vers w p.p. sur Ω. On peut alors trouver $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}^m$ et des ensembles mesurables $A_1, \dots, A_k \subset \Omega$ deux à deux disjoints tels que

$$w_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

Par conséquent, pour presque tout $x \in \Omega$,

$$f(x, w_n(x)) = \sum_{i=1}^{k} f(x, \alpha_i)\chi_{A_i}(x).$$

La fonction f étant de Carathéodory, on a que $x \mapsto f(x, \alpha_i)$ est mesurable. Par suite, $x \mapsto f(x, w_n(x))$ est mesurable comme produit et somme de fonctions mesurables. Comme $w_n(x) \to w(x)$, et $f(x, \cdot)$ est continue presque pour tout $x \in \Omega$, on en déduit que $f(x, w_n(x)) \to f(x, w(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$, ce qui montre que $x \mapsto f(x, w(x))$ est mesurable comme limite p.p. de fonctions mesurables. □

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;

(H_2) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$ telle que $|f(x,s)| \leq a(x)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et presque pour tout $x \in \Omega$.

(H_3) Pour tout $1 \leq i,j \leq N$, les fonctions $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Théorème 5.2.3. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), il existe une solution faible $u \in H^1_0(\Omega)$ de (5.2.1), i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x))w(x)\,dx \quad \textit{pour tout } w \in H^1_0(\Omega).$$

Démonstration. Nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder. Pour ce faire, on considère l'application $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ qui à $u \in L^2(\Omega)$ associe l'unique solution $v = T(u) \in H^1_0(\Omega)$ de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H^1_0(\Omega).$$

L'existence et l'unicité de v découle du théorème de Lax-Milgram puisque la fonction $x \mapsto f(x,u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$ d'après le Lemme 5.2.2 et l'hypothèse (H_2).

En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, en utilisant les hypothèses (H_2), (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)\,dx = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)\,dx \leq \|a\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par suite, l'inégalité de Poincaré donne

$$\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega\|a\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui montre que

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R := \frac{C_\Omega\|a\|_{L^2(\Omega)}}{\lambda}.$$

En notant $K := \{v \in H^1_0(\Omega) : \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R\}$, nous avons montré que $T : L^2(\Omega) \to K$. Par ailleurs, l'ensemble K est convexe et le théorème de Rellich montre que K est compact dans $L^2(\Omega)$.

Il reste à montrer que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ est continue. Pour ce faire, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $L^2(\Omega)$ et on note $v_n := T(u_n) \in H^1_0(\Omega)$. L'argument précédent montre que $\|v_n\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$. On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$\begin{aligned} v_{\sigma(n)} &\rightharpoonup v && \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega),\\ v_{\sigma(n)} &\to v && \text{fortement dans } L^2(\Omega),\\ u_{\sigma(n)} &\to u && \text{p.p. sur } \Omega. \end{aligned}$$

Comme f est une fonction de Carathéodory, on a que $f(x,u_{\sigma(n)}(x)) \to f(x,u(x))$ presque pour tout $x \in \Omega$ et l'hypothèse (H_2) montre que $|f(x,u_{\sigma(n)}(x))| \leq a(x)$ p.p. tout $x \in \Omega$ avec $a \in L^2(\Omega)$.

Le théorème de la convergence dominée montre alors que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}(\cdot)) \to f(\cdot, u(\cdot))$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre que T est continue sur $L^2(\Omega)$.

Nous avons donc montré que $T : K \to K$ est continue et que K est sous ensemble un convexe et compact de $L^2(\Omega)$. Le théorème du point fixe de Schauder assure l'existence d'un point fixe $u \in K$ de T dans K, i.e., $T(u) = u$, autrement dit

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

□

On peut aussi considérer un problème un peu plus général en autorisant f de dépendre de ∇u. On s'intéresse alors à l'EDP suivante.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f(x, u, \nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Pour ce faire on rajoute l'hypothèse suivante :

(H_2') $f : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et il existe une fonction $a \in L^2(\Omega)$, $b > 0$ et $0 < \beta < 1$ tels que $|f(x, s, \xi)| \leq a(x) + b(|s|^\beta + |\xi|^\beta)$ pour tout $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ et presque pour tout $x \in \Omega$.

Théorème 5.2.4. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2') et (H_3), il existe une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de (5.2.2), i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\, dx \quad \textit{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On définit l'application $T : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ par $v = T(u)$, où $v \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\, dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Notons que v est unique car $x \mapsto f(x, u(x), \nabla u(x))$ appartient à $L^2(\Omega)$. En effet, d'après le Lemme 5.2.2, cette fonction est mesurable, et d'après l'hypothèse (H_2'), on a

$$|f(x, u(x), \nabla u(x))| \leq a(x) + b(|u(x)|^\beta + |\nabla u(x)|^\beta) \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega.$$

Comme la fonction $a + b(|u|^\beta + |\nabla u|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (car $\beta < 1$ et Ω est borné), on en déduit que $f(\cdot, u, \nabla u) \in L^2(\Omega)$.

En prenant $w = v$ comme fonction test dans la formulation variationnelle et en utilisant les hypothèses (H_2'), (H_3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned}\lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla v(x)\,dx &= \int_\Omega f(x,u(x),\nabla u(x))v(x)\,dx \\ &\leq \Big(\|a\|_{L^2(\Omega)} + b(\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)}\Big)\|v\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après les inégalité de Cauchy-Schwarz et Poincaré, on a

$$\||u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} + \||\nabla u|^\beta\|_{L^2(\Omega)} \leq \big(\|u\|^\beta_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^\beta_{L^2(\Omega)}\big)|\Omega|^{(1-\beta)/2} \leq C\|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)}$$

où $C > 0$ ne dépend que de N, Ω et β. Par conséquent, en utilisant de nouveau l'inégalité de Poincaré, il vient

$$\|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq C_*(1 + \|u\|^\beta_{H^1_0(\Omega)}),$$

où $C_* > 0$ est une constante ne dépendant que λ, N, $\|a\|_{L^2(\Omega)}$, b, Ω et β. Comme $\beta < 1$, on peut trouver un $R > 0$ tel que $C_*(1 + R^\beta) \leq R$ de sorte que si $\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$, alors $\|T(u)\|_{H^1_0(\Omega)} = \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \leq R$. Si C désigne la boule fermée dans $H^1_0(\Omega)$ centre 0 et rayon R (un ensemble convexe, fermé et borné), on a donc montré que $T : C \to C$.

Montrons que T est continue sur $H^1_0(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $H^1_0(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1_0(\Omega)$ et on note $v_n := T(u_n)$. L'argument précédent montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ et donc, on peut extraire une sous-suite et trouver une fonction $v \in H^1_0(\Omega)$ telle que

$$v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v \quad \text{faiblement dans } H^1_0(\Omega).$$

Par ailleurs, la réciproque de la convergence dominée montre qu'on peut encore extraire des sous-suites et trouver des fonctions G et $H \in L^2(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \to u \quad \text{p.p. sur } \Omega, \\ \nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u \quad \text{p.p. sur } \Omega, \\ |u_{\sigma(n)}| \leq G \quad \text{p.p. sur } \Omega, \\ |\nabla u_{\sigma(n)}| \leq H \quad \text{p.p. sur } \Omega. \end{cases}$$

La fonction f étant de Carathéodory, on en déduit que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ p.p. sur Ω. Par suite, l'hypothèse (H_2') montre que

$$|f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)})| \leq a + b(|G|^\beta + |H|^\beta) \in L^2(\Omega) + L^{2/\beta}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

car $\beta < 1$. Le théorème de la convergence dominée implique que $f(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to f(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x), \nabla u_{\sigma(n)}(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H^1_0(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H^1_0(\Omega),$$

ce qui montre que $v = T(u)$. Nous avons donc établi que $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ dans $H^1_0(\Omega)$. Par unicité de la solution de la formulation variationnelle, on a en fait que $T(u_n) \to T(u)$ dans $L^2(\Omega)$ ce qui montre que T est continue sur $H^1_0(\Omega)$.

Montrons enfin que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de C et $v_n := T(u_n) \in C$. Comme C est borné, on en déduit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $H_0^1(\Omega)$. On peut donc extraire des sous-suites et trouver des fonctions $u, v \in H_0^1(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \\ v_{\sigma(n)} \rightharpoonup v & \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Par ailleurs, le théorème de Rellich montre que

$$v_{\sigma(n)} \to v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{5.2.3}$$

En notant $h_n := f(\cdot, u_n, \nabla u_n)$ on déduit de (H_2') que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et donc, quitte à extraire une nouvelle sous-suite, on peut supposer que

$$h_{\sigma(n)} \rightharpoonup h \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega) \tag{5.2.4}$$

(notons qu'à ce stade de la preuve, on n'a pas que $h = f(\cdot, u, \nabla u)$). Par passage à la limite dans la formulation variationnelle

$$\int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u_{\sigma(n)}(x), \nabla u_{\sigma(n)}(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega),$$

il vient

$$\int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega h(x)w(x)\,dx \quad \text{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $w = v_{\sigma(n)}$ comme fonction test, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(x)\nabla v_{\sigma(n)}(x) \cdot \nabla v_{\sigma(n)}(x)\,dx &= \int_\Omega h_{\sigma(n)} v_{\sigma(n)}(x)\,dx \\ &\to \int_\Omega h(x)v(x)\,dx = \int_\Omega A(x)\nabla v(x) \cdot \nabla v(x)\,dx, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (5.2.3), (5.2.4). D'après la propriété de coercivité (H_3), on a donc

$$\lambda \int_\Omega |\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)}|^2\,dx \le \int_\Omega A(\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)}) \cdot (\nabla v - \nabla v_{\sigma(n)})\,dx \to 0$$

ce qui montre que $\nabla v_{\sigma(n)} \to \nabla v$ fortement dans $L^2(\Omega)$, ou encore $T(u_{\sigma(n)}) \to T(u)$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Ceci montre que $T(C)$ est relativement compact dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous sommes alors en mesure d'appliquer le Corollaire 5.1.4 qui montre que l'application T admet un point fixe dans C. Il existe donc un $u \in C \subset H_0^1(\Omega)$ tel que $T(u) = u$, i.e.,

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))w(x)\,dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

L'exemple suivant montre que l'hypothèse $\beta < 1$ dans (H_2') est optimale.

Exemple 5.2.5. Soit $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet sur le bord. On rappelle que λ_1 peut être calculée en considérant le problème de minimisation du quotient de Rayleigh

$$\lambda_1 = \min\left\{\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx : \varphi \in H_0^1(\Omega),\ \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} = 1\right\}.$$

Soit $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$ une solution de ce problème. Notons que comme $\varphi_1 \in H_0^1(\Omega)$, alors $|\varphi_1| \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla|\varphi_1| = \nabla\varphi_1\chi_{\varphi_1 \geq 0} - \nabla\varphi_1\chi_{\varphi_1<0}$ de sorte que $|\nabla|\varphi_1|| = |\nabla\varphi_1|$. Quitte à remplacer φ_1 par $|\varphi_1|$, on peut donc toujours supposer que $\varphi_1 \geq 0$ p.p. sur Ω. La fonction propre φ_1 est solution de la formulation variationnelle

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla v \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 v \, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.2.5}$$

Posons, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f(s) = 1 + \lambda_1 s$ et supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

i.e.,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f(u) v \, dx = \int_\Omega v \, dx + \lambda_1 \int uv \, dx \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.2.6}$$

En prenant $v = u$ dans (5.2.5) et $v = \varphi_1$ dans (5.2.6), on en déduit que

$$\int_\Omega \nabla\varphi_1 \cdot \nabla u \, dx = \lambda_1 \int_\Omega \varphi_1 u \, dx, \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi_1 \, dx = \int_\Omega \varphi_1 \, dx + \lambda_1 \int u\varphi_1 \, dx,$$

ce qui implique que $\int_\Omega \varphi_1 \, dx = 0$, ou encore que $\varphi_1 = 0$, ce qui est impossible.

En général, il n'y a aucune raison pour que l'unicité ait lieu. Terminons cette section par un exemple de critère assurant l'unicité des solutions.

Théorème 5.2.6. *On suppose, en plus de (H_1), (H_2) et (H_3), que la fonction $s \mapsto f(x,s)$ est décroissante pour presque tout $x \in \Omega$. Alors, il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ de (5.2.1), i.e.,*

$$\int_\Omega A(x)\nabla u(x) \cdot \nabla w(x) \, dx = \int_\Omega f(x, u(x)) w(x) \, dx \quad \textit{pour tout } w \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Comme $v = u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega)$ est une fonction test, on en déduit que

$$\begin{aligned} \int_\Omega A(x)\nabla u_1 \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \, dx &= \int_\Omega f(x, u_1)(u_1 - u_2) \, dx, \\ \int_\Omega A(x)\nabla u_2 \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \, dx &= \int_\Omega f(x, u_2)(u_1 - u_2) \, dx. \end{aligned}$$

En faisant la différence entre ces deux égalités, il vient,

$$\int_\Omega A(x)(\nabla u_1 - \nabla u_2) \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \, dx = \int_\Omega (f(x, u_1) - f(x, u_2))(u_1 - u_2) \, dx \leq 0,$$

d'après l'hypothèse de décroissance de f. En utilisant la propriété de coercivité (H_3) de A, on en déduit que

$$\lambda \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^2 \, dx \leq 0,$$

ce qui montre que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. sur Ω. Enfin, l'inégalité de Poincaré implique que $\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^2(\Omega)} = 0$, et donc que $u_1 = u_2$ p.p. sur Ω. □

5.3 Equations quasi-linéaires

Une EDP est dite *quasi-linéaire* si elle est non linéaire, mais linéaire par rapport aux dérivées d'ordre maximal. On s'intéresse ici aux EDP elliptiques *quasi-linéaires* du second ordre sous forme divergence dont la forme la plus générale est la suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(x,u,\nabla u) = f(x,u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Notons que le terme principal, donné par $\sum_{i,j=1}^{N} \partial_{\xi_j} a_i(x,u,\nabla u)\partial^2_{ij} u$, est bien linéaire par rapport à $D^2 u$.

Quand $a(x,u,\nabla u) = A(x,u)\nabla u$ est linéaire par rapport à ∇u, on sait encore prouver l'existence de solutions à l'aide du théorème de Schauder, sous l'hypothèse que les coefficients $a_{ij} : \Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de la matrice A sont des fonctions de Carathéodory satisfaisant la condition suivante : il existe deux constantes $\lambda > 0$ et $\Lambda > 0$ telles que

$$\lambda|\xi|^2 \le A(x,s)\xi\cdot\xi \le \Lambda|\xi|^2$$

pour tout $(s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ et p.p. tout $x\in\Omega$. Dans le cas général, nous allons utiliser une méthode de Galerkin en considérant un problème approché en dimension finie et faire une hypothèse de monotonie sur la dépendance de a en ∇u.

Nous allons nous intéresser aux EDP de la forme suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div} a(x,u,\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

i.e., on suppose que le second membre f est indépendant de u et ∇u. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;

(H_2) $a:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ est un opérateur de *Leray-Lions* :

(a) pour tout $1\le i\le N$, $a_i:\Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory ;

(b) (Coercivité) il existe $\lambda>0$ et $1<p<\infty$ tels que

$$a(x,s,\xi)\cdot\xi \ge \lambda|\xi|^p \quad \text{pour tout } (s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x\in\Omega;$$

(c) (Croissance) il existe $\Lambda>0$ tel que

$$|a(x,s,\xi)| \le \Lambda(1+|s|^{p-1}+|\xi|^{p-1}) \quad \text{pour tout } (s,\xi)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x\in\Omega;$$

(d) (Monotonie) pour tout $s\in\mathbb{R}$, ξ_1, $\xi_2\in\mathbb{R}^N$ et p.p. tout $x\in\Omega$,

$$(a(x,s,\xi_1)-a(x,s,\xi_2))\cdot(\xi_1-\xi_2)\ge 0;$$

(H_3) $f\in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Remarque 5.3.1. 1. L'hypothèse de monotonie est satisfaite par exemple dans le cas où $a(x,s,\xi) = DW(\xi)$ où $W:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ est une fonction convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ et DW désigne la différentielle de W (voir le Chapitre 6). En effet, si ξ_1, $\xi_2\in\mathbb{R}^N$ et $t\in]0,1[$, alors par convexité de W,

$$W(\xi_1+t(\xi_2-\xi_1)) = W(t\xi_2+(1-t)\xi_1) \le tW(\xi_2)+(1-t)W(\xi_1).$$

Par conséquent,
$$\frac{W(\xi_1 + t(\xi_2 - \xi_1)) - W(\xi_1)}{t} \leq W(\xi_2) - W(\xi_1),$$
puis par passage à la limite quand $t \to 0$,
$$DW(\xi_1) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \leq W(\xi_2) - W(\xi_1).$$
En inversant les rôles de ξ_1 et ξ_2, on obtient aussi
$$DW(\xi_2) \cdot (\xi_1 - \xi_2) \leq W(\xi_1) - W(\xi_2),$$
ce qui implique, en sommant les deux inégalités
$$(DW(\xi_2) - DW(\xi_1)) \cdot (\xi_2 - \xi_1) \geq 0.$$

2. Quand $W(\xi) = \frac{1}{p}|\xi|^p$, alors $DW(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$ et l'équation
$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
est celle du *p-Laplacien.*

Commençons par établir un résultat sur les opérateurs coercifs en dimension finie.

Lemme 5.3.2. *Soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et coercive, i.e.,*
$$\frac{T(u) \cdot u}{|u|} \to +\infty \textit{ quand } |u| \to +\infty.$$
Alors T est surjectif, i.e., pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, il existe un $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(u) = b$.

Démonstration. Soit $b \in \mathbb{R}^n$. Nous allons nous ramener au théorème du point fixe de Brouwer. Soit B_R la boule fermée de centre 0 et de rayon $R > 0$. Il s'agit clairement d'un compact convexe. La projection orthogonale $P_R : \mathbb{R}^n \to B_R$ est donnée par
$$P_R(u) = \begin{cases} u & \text{si } |u| \leq R, \\ R\frac{u}{|u|} & \text{si } |u| > R \end{cases}$$
et elle est caractérisée par
$$(u - P_R(u)) \cdot (v - P_R(u)) \leq 0 \quad \text{pour tout } v \in B_R.$$

On définit la fonction $T_R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par
$$T_R(u) := P_R(u - T(u) + b) \quad \text{pour tout } u \in \mathbb{R}^n.$$
Clairement T_R est continue comme composée de fonctions continues et $T_R : B_R \to B_R$. Le théorème de Brouwer montre donc que T_R admet un point fixe, noté u_R, dans B_R. D'après la caractérisation de la projection orthogonale, on a donc
$$(u_R - T(u_R) + b - P_R(u_R - T(u_R) + b)) \cdot (v - P_R(u_R - T(u_R) + b)) \leq 0 \quad \text{pour tout } v \in B_R.$$
En utilisant le fait que $P_R(u_R - T(u_R) - b) = T_R(u_R) = u_R$, il vient que
$$(b - T(u_R)) \cdot (v - u_R) \leq 0 \quad \text{pour tout } v \in B_R. \tag{5.3.2}$$

En prenant $v = 0 \in B_R$, on obtient

$$T(u_R) \cdot u_R \le b \cdot u_R \le |b||u_R|$$

et la propriété de coercivité implique que $|u_R| \le C$, où $C > 0$ est une constante indépendante de R. Par conséquent, quitte à extraire une sous-suite, on peut trouver un $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $u_R \to u$ quand $R \to +\infty$. Comme T est continue, $T(u_R) \to T(u)$ et par passage à la limite dans (5.3.2), il vient

$$(b - T(u)) \cdot (v - u) \le 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}^n,$$

ce qui montre que $T(u) = b$. □

En fixant une base, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire 5.3.3. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie $T : E \to E'$ un opérateur continu et coercif, i.e.,*

$$\frac{\langle T(u), u\rangle_{E',E}}{\|u\|_E} \to +\infty \quad \textit{quand } \|u\|_E \to +\infty.$$

Alors, pour tout $b \in E'$, il existe un $u \in E$ tel que $T(u) = b$.

Théorème 5.3.4. *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), il existe une solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (5.3.1), i.e.,*

$$\int_\Omega a(x, u(x), \nabla u(x)) \cdot \nabla w(x)\, dx = \int_\Omega f(x)w(x)\, dx \quad \textit{pour tout } w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration. La démonstration est basée sur une méthode de Galerkin qui consiste à approcher le problème en un problème posé en dimension finie, puis en faisant tendre la dimension vers l'infini.

Etape 1 : définition d'un opérateur. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fixé. Alors p.p. tout $x \in \Omega$, on a d'après l'hypothèse de croissance

$$|a(x, u(x), \nabla u(x))| \le \Lambda(1 + |u(x)|^{p-1} + |\nabla u(x)|^{p-1}),$$

ce qui montre que $a(\cdot, u, \nabla u) \in L^{p'}(\Omega)$. Par conséquent, l'application linéaire

$$v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mapsto \langle A(u), v\rangle = \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v\, dx$$

est continue car, d'après les inégalités de Hölder et de Poincaré

$$|\langle A(u), v\rangle| \le \Lambda \left(|\Omega|^{1-1/p} + \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right) \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \le C \left(1 + \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right) \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Par conséquent, $A(u)$ définit un élément du dual topologique de $W_0^{1,p}(\Omega)$ noté $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Montrons que $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega)$ est un opérateur continu. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. D'après la réciproque de la convergence dominée, on peut extraire une sous-suite notée $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver des fonctions G et $H \in L^p(\Omega)$ telles que $u_{\sigma(n)} \to u$, $\nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u$, $|u_{\sigma(n)}| \le G$ et $|\nabla u_{\sigma(n)}| \le H$ p.p. sur Ω. Comme a est une fonction de Carathéodory, on a que $a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to a(\cdot, u, \nabla u)$ p.p. sur Ω et d'après la propriété de croissance, $|a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)})| \le \Lambda(1 + |G|^{p-1} + |H|^{p-1}) \in L^{p'}(\Omega)$. Par convergence dominée, on en déduit que $a(\cdot, u_{\sigma(n)}, \nabla u_{\sigma(n)}) \to a(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$ et comme la limite est indépendante de la sous-suite, on a en fait que toute la suite $a(\cdot, u_n, \nabla u_n) \to a(\cdot, u, \nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \le 1$, on a par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\langle A(u_n) - A(u), v\rangle &= \int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)] \cdot \nabla v \, dx \\ &\le \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\le \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par passage au sup parmi tous les v, on obtient que

$$\|A(u_n) - A(u)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \le \|a(\cdot, u_n, \nabla u_n) - a(\cdot, u, \nabla u)\|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0,$$

ce qui montre bien que A est continu.

Montrons enfin que A est coercive. En effet, d'après la propriété de coercivité,(H_2)-b, on a

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \frac{\int_\Omega a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla u \, dx}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \ge \lambda \frac{\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \lambda \|u\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Comme $p > 1$, on en déduit que

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \to +\infty \quad \text{quand } \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty,$$

ce qui montre que A est coercive.

Etape 2 : problème approché en dimension finie. Nous allons nous ramener à un problème en dimension finie. En effet, comme $1 < p < \infty$, alors l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est séparable ce qui signifie qu'il contient un ensemble dénombrable dense $D = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On note $E_n = \text{vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ qui est un sous-espace vectoriel de $W_0^{1,p}(\Omega)$ de dimension finie et

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}. \tag{5.3.3}$$

Pour tout $u \in E_n$, on pose $T_n = A|_{E_n}$. Alors $T_n : E_n \to E_n'$ est continu et coercif d'après l'étape 1. Comme $f \in L^{p'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega) \subset E_n'$, le Corollaire 5.3.3 montre l'existence d'un $u_n \in E_n$ tel que $T_n(u_n) = f$, i.e.

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega f w \, dx \quad \text{pour tout } w \in E_n. \tag{5.3.4}$$

Etape 3 : estimations a priori. D'après la propriété de coercivité et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}\lambda \|\nabla u_n\|^p_{L^p(\Omega)} &\le \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \cdot \nabla u_n \, dx = \langle T_n(u_n), u_n\rangle_{E_n', E_n} \\ &= \langle f, u_n\rangle_{E_n', E_n} = \int_\Omega f u_n \, dx \le \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u_n\|_{L^p(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient que

$$\|\nabla u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \le \frac{C_\Omega}{\lambda} \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par ailleurs, d'après la propriété de croissance, on a que

$$\|a(x,u_n,\nabla u_n)\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq \Lambda\left(|\Omega|^{1-1/p} + \|u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_n\|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\right)$$

ce qui montre également que la suite $(a(\cdot,u_n,\nabla u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^{p'}(\Omega)$.

Comme $1<p<\infty$, alors on a aussi que $1<p'<\infty$. Par conséquent $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $L^{p'}(\Omega)$ sont des espaces réflexifs. On peut alors extraire une sous-suite, notée $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver des fonctions $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $\xi\in L^{p'}(\Omega)$ telles que $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup u$ faiblement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $a(\cdot,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)}) \rightharpoonup \xi$ faiblement dans $L^{p'}(\Omega)$.

Etape 4 : passage à la limite. Soit $v\in W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après (5.3.3), il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n\in E_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $v_n\to v$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. En prenant $w=v_{\sigma(n)}$ comme fonction test dans (5.3.4), on obtient

$$\int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla v_{\sigma(n)}\,dx = \int_\Omega f v_{\sigma(n)}\,dx$$

puis par passage à la limite quand $n\to+\infty$,

$$\int_\Omega \xi\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \text{pour tout } v\in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{5.3.5}$$

En particulier, comme $u_{\sigma(n)}\rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla u_{\sigma(n)}\,dx = \int_\Omega f u_{\sigma(n)}\,dx \to \int_\Omega fu\,dx = \int_\Omega \xi\cdot\nabla u\,dx.$$

Nous allons utiliser l'*astuce de Minty* basée sur la propriété de monotonie pour montrer que $\mathrm{div}\xi = \mathrm{div}a(\cdot,u,\nabla u)$. Pour ce faire, on remarque que la propriété de monotonie implique que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega [a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)}) - a(x,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)})]\cdot[\nabla u_{\sigma(n)} - \nabla v_{\sigma(n)}]\,dx \\ &= \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla u_{\sigma(n)}\,dx - \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla u_{\sigma(n)})\cdot\nabla v_{\sigma(n)}\,dx \\ &\quad - \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)})\cdot\nabla u_{\sigma(n)}\,dx + \int_\Omega a(x,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)})\cdot\nabla v_{\sigma(n)}\,dx \\ &\qquad =: I_1^n - I_2^n - I_3^n + I_4^n. \end{aligned}$$

On a déjà vu que

$$I_1^n \to \int_\Omega \xi\cdot\nabla u\,dx, \quad I_2^n \to \int_\Omega \xi\cdot\nabla v\,dx.$$

Par ailleurs, $\nabla v_{\sigma(n)}) \to \nabla v$ fortement dans $L^p(\Omega)$ et, par le Théorème de Rellich $u_{\sigma(n)}\to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$. Comme a est une fonction de Carathéodory à croissance $p-1$, on en déduit que $a(\cdot,u_{\sigma(n)},\nabla v_{\sigma(n)}) \to a(\cdot,u,\nabla v)$ fortement dans $L^{p'}(\Omega)$. On en déduit que

$$I_4^n \to \int_\Omega a(x,u,\nabla v)\cdot\nabla v\,dx$$

mais aussi que

$$I_3^n \to \int_\Omega a(x,u,\nabla v)\cdot\nabla u\,dx$$

car $\nabla u_{\sigma(n)} \rightharpoonup \nabla u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$. En regroupant les quatre convergences ci-dessus, on en déduit que

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla v)] \cdot (\nabla u - \nabla v)\,dx \geq 0 \qquad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En choisissant $v = u + \varepsilon w$ avec $\varepsilon > 0$ et $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla u + \varepsilon \nabla w)] \cdot \nabla w \leq 0.$$

Comme $u + \varepsilon w \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on en déduit que $a(\cdot,u,\nabla u + \varepsilon\nabla w) \to a(\cdot,u,\nabla u)$ dans $L^{p'}(\Omega)$. Par conséquent,

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla u)] \cdot \nabla w \ \leq 0,$$

où encore, en changeant w en $-w$

$$\int_\Omega [\xi - a(x,u,\nabla u)] \cdot \nabla w \ = 0 \qquad \text{pour tout } w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

En reportant dans (5.3.5), on a établi que

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u) \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx \qquad \text{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

ce qui conclut la preuve du théorème. □

La question de l'unicité est plus délicate à traiter. Quand la fonction a est indépendante de u, on a le résultat général suivant :

Proposition 5.3.5. *On suppose de plus que la fonction $a : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est indépendente de s et qu'elle est strictement monotone, i.e., pour tout ξ_1, $\xi_2 \in \mathbb{R}^N$ avec $\xi_1 \neq \xi_2$ et p.p. tout $x \in \Omega$,*

$$(a(x,\xi_1) - a(x,\xi_2)) \cdot (\xi_1 - \xi_2) > 0.$$

Alors, il existe une unique solution faible $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de (5.3.1), i.e.,

$$\int_\Omega a(x,\nabla u(x)) \cdot \nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x) w(x)\,dx \qquad \textit{pour tout } w \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration. Considérons deux solutions u_1 et $u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $v = u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ est une fonction test, on a, pour $i = 1, 2$,

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_i) \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx,$$

ce qui montre que

$$\int_\Omega [a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\,dx = 0.$$

Par l'hypothèse de monotonie, on sait que $[a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) \geq 0$ p.p. sur Ω. Par conséquent, on a en fait que $[a(x,\nabla u_1) - a(x,\nabla u_2)] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2) = 0$ p.p. sur Ω. On utilise maintenant l'hypothèse de stricte monotonie qui implique que nécessairement $\nabla u_1 = \nabla u_2$ p.p. sur Ω. Comme $u_1 - u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité de Poincaré donne

$$\|u_1 - u_2\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|_{L^p(\Omega)} = 0,$$

soit $u_1 = u_2$ p.p. sur Ω. □

Dans le cas général où $a = a(x,s,\xi)$, on peut toujours démontrer l'unicité dans le cas $1 < p \leq 2$ sous des hypothèses de plus fortes de monotonie de a par rapport à ξ. Par contre, quand $p > 2$, la solution n'est en général pas unique (voir [2]).

Chapitre 6

Introduction au calcul des variations

6.1 La méthode directe en calcul des variations

Soit E un espace de Banach et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle que l'on cherche à minimiser. L'idée de la méthode directe du calcul des variations consiste à considérer une suite minimisante. En effet, si l'on suppose que l'infimum

$$m := \inf_{u \in E} J(u)$$

est fini, la définition de l'infimum assure l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_{n\in E}$ d'éléments de E telle que $J(u_n) \to m$. Tout point d'accumulation (pour une topologie raisonnable) de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors un candidat pour être un point de minimum. Se posent alors deux problèmes :

— la compacité de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$;

— montrer que si u est un point d'accumulation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $F(u) = m$.

Pour le problème de compacité, il est en général difficile d'obtenir de telles propriétés dans un espace de Banach général de dimension infini (penser au théorème d'Ascoli dans l'espace des fonctions continues, ou le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans les espaces de Lebesgue). Pour cette raison, nous privilègerons la convergence faible à la convergence forte (de la norme) car, au moins dans le cas où E est réflexif, nous savons que toute suite bornée admettra une sous-suite faiblement convergente. Quant à la bornitude de la suite minimisante, elle résultera généralement d'une propriété de coercivité de la fonctionnelle que l'on cherche à minimiser.

En ce qui concerne le second problème, si l'on sait déjà que $u_n \to u$ en un certain sens, il suffit de montrer que $J(u) \leq \liminf_n J(u_n)$ ce qui nous conduit à la notion de semi-continuité inférieure.

Définition 6.1.1. On dit que J est *semi-continue inférieurement* (*sci*) au point $u \in E$ si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to u$ dans E, alors

$$J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n).$$

On dit que J est sci sur E si elle est sci en tout point de E.

Il convient d'étendre cette définition pour la convergence faible.

Définition 6.1.2. On dit que J est *séquentiellement faiblement sci* en $u \in E$ si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E, on a

$$J(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_n).$$

On dit que J est séquentiellement faiblement sci sur E si elle est séquentiellement faiblement sci en tout point de E.

Remarque 6.1.3. On a clairement que si J est séquentiellement faiblement sci, alors J est sci. La réciproque est fausse : il suffit de prendre $J(u) = 1 - \|u\|^2$ pour tout $u \in H$ un espace de Hilbert séparable. Alors J est continue donc sci (pour la convergence forte). En revanche, si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de H, alors $e_n \rightharpoonup 0$ faiblement dans H et

$$J(0) = 1 > 0 = \liminf_{n\to+\infty} J(e_n).$$

Dans le cas convexe, les deux notions de semi-continuité inférieure coïncident. On rappelle la définition suivante.

Définition 6.1.4. Une fonction $J : E \to \mathbb{R}$ est *convexe* si

$$J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v), \qquad \text{pour tout } t \in [0,1] \text{ et tout } u, v \in E.$$

On dit que J est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte dès lors que $u \neq v$ et $t \in]0,1[$.

Exemple 6.1.5.

1. les applications linéaires sont convexes ;
2. les normes $x \mapsto \|x\|$ sont convexes ;
3. dans un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, l'application $x \mapsto \|x\|^2$ est strictement convexe car si $t \in]0,1[$ et $x \neq y$,

$$\begin{aligned} \|tx + (1-t)y\|^2 - t\|x\|^2 - (1-t)\|y\|^2 &= t(t-1)\|x\|^2 + 2t(1-t)\langle x, y\rangle - t(1-t)\|y\|^2 \\ &= -t(1-t)\|x-y\|^2 < 0. \end{aligned}$$

On a alors le résultat fondamental suivant.

Théorème 6.1.6. *Soit $J : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et sci. Alors J est séquentiellement faiblement sci.*

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans E. Si $\liminf_n J(x_n) = +\infty$, le résultat est évident. Si $\alpha := \liminf_n J(u_n) < +\infty$, on considère une suite décroissante $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $\alpha_k \searrow \alpha$. Comme J est convexe et sci, l'ensemble $\{J \leq \alpha_k\}$ est convexe et fermé. Par ailleurs, comme $\alpha_k > \alpha = \liminf_n J(u_n)$, il existe une sous-suite, notée $(u_{\sigma_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $u_{\sigma_k(n)} \in \{J \leq \alpha_k\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $u \in \{J \leq \alpha_k\}$. En effet, si $u \notin \{J \leq \alpha_k\}$, d'après le théorème de Hahn-Banach sous forme géométrique, on pourrait séparer strictement le convexe fermé non vide $\{J \leq \alpha_k\}$ du convexe compact $\{u\}$. Il existerait donc un $L \in E' \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle L, u\rangle < \alpha < \langle L, v\rangle, \qquad \text{pour tout } v \in \{J \leq \alpha_k\}.$$

En particulier pour $v = u_{\sigma_k(n)}$, on obtient que $\alpha < \langle L, u_{\sigma_k(n)}\rangle$, puis par passage à la limite quand $n \to +\infty$, $\alpha \leq \langle L, u\rangle$, ce qui est absurde. Par conséquent, $J(u) \leq \alpha_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui implique par passage à la limite quand $k \to +\infty$ que

$$J(u) \leq \alpha = \liminf_{n\to+\infty} J(u_n),$$

ce qui montre que J est séquentiellement faiblement sci. $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer un résultat général d'existence de solutions à des problèmes de minimisation.

Théorème 6.1.7 (Weierstrass). *Soient E un espace de Banach réflexif et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle est convexe, sci et coercive, i.e.,*

$$J(u) \to +\infty \quad \text{quand } \|u\|_E \to +\infty.$$

Alors il existe un $\bar{u} \in E$ tel que $J(\bar{u}) \leq J(v)$ pour tout $v \in E$. Si de plus J est strictement convexe, alors le point de minimum $\bar{u}$ est unique.

Démonstration. Comme J ne prend que des valeurs finies, alors nécessairement,

$$m := \inf_E J < +\infty.$$

Soit (u_n) une suite minimisante, i.e., $J(u_n) \to m$. Si (pour une sous-suite) $\|u_n\|_E \to +\infty$, alors d'après la coercivité de J, on aurait que $J(u_n) \to +\infty$ ce qui est impossible puisque $J(u_n) \to m < +\infty$. Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Banach réflexif E. Il existe donc une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{u} \in E$ tels que $u_{\sigma(n)} \rightharpoonup \bar{u}$ faiblement dans E. Comme la fonctionnelle J est convexe et sci, elle est séquentiellement faiblement sci, et donc

$$J(\bar{u}) \leq \liminf_{n\to+\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to+\infty} J(u_n) = m \leq J(\bar{u}).$$

Il vient donc que $J(\bar{u}) = m$ ce qui montre que $\bar{u}$ est un point de minimum de J sur E.

Quant à l'unicité, si J est strictement convexe et $\bar{u}_0$ et $\bar{u}_1$ sont deux minima distincts de J sur E, alors

$$\inf_E J \leq J\left(\frac{\bar{u}_0 + \bar{u}_1}{2}\right) < \frac{1}{2}J(\bar{u}_0) + \frac{1}{2}J(\bar{u}_1) = \inf_E J,$$

ce qui est absurde. On en conclut l'unicité du point de minimum. $\square$

6.2 Application aux fonctionnelles intégrales

Soit $J : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par

$$J(u) = \int_\Omega W(x, \nabla u(x))\, dx - \int_\Omega f u\, dx. \tag{6.2.1}$$

On s'intéresse à la minimisation de J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H_1) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné ;

(H_2) $W : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$\lambda|\xi|^p \leq W(x,\xi) \leq \Lambda(1 + |\xi|^p) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x \in \Omega,$$

où $\lambda > 0$, $\Lambda > 0$ et $1 < p < \infty$;

(H_3) la fonction $\xi \mapsto W(x,\xi)$ est convexe p.p. $x \in \Omega$;

(H_4) $f \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1/p + 1/p' = 1$.

Notons que sous les hypothèses (H_1) et (H_2) et d'après le Lemme 5.2.2 , $x \mapsto W(x, \nabla u(x)) \in L^1(\Omega)$ pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ de sorte que la fonctionnelle J est bien définie sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 6.2.1. *Sous les hypothèses (H_1)–(H_4) la fonctionnelle J admet un point de minimum $\bar{u}$ sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Démonstration. L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ étant réflexif (car $p \in]1,\infty[$), d'après le théorème de Weierstrass, il suffit d'établir que J est convexe, sci et coercive.

Coercivité. Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après l'hypothèse de coercivité (H_2) et l'inégalité de Hölder, on a

$$J(u) \geq \lambda \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

L'inégalité de Poincaré implique ensuite que

$$J(u) \geq \lambda \|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_\Omega \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$$

quand $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to +\infty$, ce qui établit la coercivité de J.

Convexité. Soient u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et $t \in [0,1]$. D'après l'hypothèse de convexité (H_3), on a p.p. tout $x \in \Omega$,

$$W(x, t\nabla u(x) + (1-t)\nabla v(x)) \leq tW(x, \nabla u(x)) + (1-t)W(x, \nabla v(x)),$$

puis en intégrant sur Ω

$$\int_\Omega W(x, t\nabla u + (1-t)\nabla v)\, dx \leq t \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx + (1-t) \int_\Omega W(x, \nabla v)\, dx.$$

Par ailleurs, on a

$$-\int_\Omega f(tu + (1-t)v))\, dx = -t \int_\Omega fu\, dx - (1-t) \int_\Omega fv\, dx.$$

En sommant les deux relations précédentes, il vient

$$J(tu + (1-t)v) \leq tJ(u) + (1-t)J(v),$$

ce qui montre bien que J est convexe.

Semi-continuité inférieure. Nous allons en fait montrer que J est continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ fortement dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme $f \in L^{p'}(\Omega)$, on a clairement que

$$\int_\Omega fu_n\, dx \to \int_\Omega fu\, dx.$$

Il reste à passer à la limite dans le terme non linéaire. D'après la réciproque de la convergence dominée, on peut extraire une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et trouver une fonction $h \in L^p(\Omega)$ telles que $\nabla u_{\sigma(n)} \to \nabla u$ et $|\nabla u_{\sigma(n)}| \leq h$ p.p. sur Ω. Comme W est une fonction de Carathéodory, on a $W(x, \nabla u_{\sigma(n)}(x)) \to W(x, \nabla u(x))$ p.p. tout $x \in \Omega$. Par ailleurs la propriété de croissance (H_2) implique que $0 \leq W(\cdot, \nabla u_{\sigma(n)}) \leq \Lambda(1 + |h|^p) \in L^1(\Omega)$. Le théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\int_\Omega W(x, \nabla u_{\sigma(n)})\, dx \to \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx.$$

Comme la limite est indépendante de la sous-suite, on a en fait la convergence de toute la suite

$$\int_\Omega W(x, \nabla u_n)\, dx \to \int_\Omega W(x, \nabla u)\, dx.$$

On obtient donc que $J(u_n) \to J(u)$ ce qui montre que J est continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

6.3 Equation d'Euler-Lagrange

Nous allons nous intéresser ici à une condition nécessaire d'optimalité. En dimension 1, lorsqu'une fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ atteint son minimum en un point, alors la dérivée s'annule en ce point. Nous allons développer des outils qui vont nous permettre d'écrire une condition nécessaire analogue en dimension infinie.

Définition 6.3.1. Soient E un espace vectoriel normé et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que J est Gâteaux-differentiable en $u \in E$ s'il existe une application linéaire continue $L \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = E'$ telle que pour tout $v \in E$,

$$\frac{J(u+tv) - J(u)}{t} \to \langle L, v\rangle_{E',E} \text{ quand } t \to 0.$$

On vérifie aisément que si une telle application L existe, alors elle est unique. On note alors $L = d_G J(u)$.

Théorème 6.3.2. *Soient E un espace vectoriel normé et $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Si $\bar{u} \in E$ est tel que*

$$J(\bar{u}) \leq J(v), \quad \text{pour tout } v \in E$$

et J est Gâteaux-différentiable en $\bar{u}$, alors

$$d_G J(\bar{u}) = 0, \tag{6.3.1}$$

autrement dit $\bar{u}$ est un point critique de J.

Démonstration. Si $\bar{u}$ est un point de minimum pour J, alors

$$J(\bar{u}) \leq J(\bar{u} + tv) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ et tout } v \in E.$$

Il en résulte que si $t > 0$,

$$\frac{J(\bar{u}+tv) - J(\bar{u})}{t} \geq 0,$$

alors que si $t < 0$,

$$\frac{J(\bar{u}+tv) - J(\bar{u})}{t} \leq 0.$$

Comme J est Gâteaux-différentiable en $\bar{u}$, il vient par passage à la limite quand $t \to 0$ dans les deux inégalités précédentes que $d_G J(\bar{u}) = 0$. □

La condition (6.3.1) est appelée *condition d'optimalité d'ordre* 1 ou encore *équation d'Euler-Lagrange*. Cette condition est nécessaire mais nullement suffisante en général car un point critique peut être aussi bien un minimum local, qu'un maximum local ou même un point selle.

Appliquons cela à la minimisation de la fonctionnelle intégrale (6.2.1). Pour ce faire nous devons rajouter une hypothèse sur W :

(H_5) p.p. $x \in \Omega$ la fonction $W(x, \cdot)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$ et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|DW(x,\xi)| \leq C(1 + |\xi|^{p-1}) \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^N \text{ et p.p. tout } x \in \Omega.$$

Théorème 6.3.3. *Sous les hypothèses* (H_1)–(H_5)*, si* $\bar{u}$ *est un point de minimum de* J *sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$*, alors* $\bar{u}$ *est une solution faible de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(DW(x, \nabla \bar{u})\big) = f & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

i.e.

$$\int_\Omega DW(x, \nabla \bar{u}) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \textit{pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Démonstration. D'après le Théorème 6.3.2, il suffit d'établir que J est Gâteaux-différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Si u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, d'après le théorème des accroissements finis, pour presque tout $x \in \Omega$ et tout $t \in]0,1[$, il existe un $\theta_{x,t} \in]0,1[$ tel que

$$\frac{W(x, \nabla u(x) + t\nabla v(x)) - W(x, \nabla u(x))}{t} = DW(x, \nabla u(x) + \theta_{x,t} t \nabla v(x)) \cdot \nabla v(x),$$

d'où on déduit que p.p. tout $x \in \Omega$,

$$\frac{W(x, \nabla u(x) + t\nabla v(x)) - W(x, \nabla u(x))}{t} \to DW(x, \nabla u(x)) \cdot \nabla v(x) \qquad \text{quand } t \to 0.$$

Par ailleurs, l'hypothèse (H_5) montre que

$$\begin{aligned} \left| \frac{W(x, \nabla u(x) + t\nabla v(x)) - W(x, \nabla u(x))}{t} \right| &\leq C(1 + |\nabla u(x) + \theta_{x,t} t \nabla v(x)|^{p-1} |\nabla v| \\ &\leq C'(1 + (|\nabla u(x)|^{p-1} + |\nabla v(x)|^{p-1}) |\nabla v|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $|a+b|^{p-1} \leq C_p(|a|^{p-1} + |b|^{p-1})$ pour tout a, $b \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, l'inégalité de Young $|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^{p'}}{p'}$ montre que

$$|\nabla u(x)|^{p-1} |\nabla v(x)| \leq \frac{|\nabla v(x)|^p}{p} + \frac{|\nabla u(x)|^p}{p'},$$

où $1/p + 1/p' = 1$, ce qui implique que pour presque tout $x \in \Omega$,

$$\left| \frac{W(x, \nabla u(x) + t\nabla v(x)) - W(x, \nabla u(x))}{t} \right| \leq C''(|\nabla v(x)| + |\nabla u(x)|^p + |\nabla v(x)|^p).$$

Or la fonction dans le membre de droite est dans $L^1(\Omega)$ puisque u et $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et Ω est borné. On est alors en mesure d'appliquer le théorème de la convergence dominée qui assure que

$$\int_\Omega \frac{W(x, \nabla u + t\nabla v) - W(x, \nabla u)}{t} \, dx \to \int_\Omega DW(x, \nabla u) \cdot \nabla v \, dx.$$

Par conséquent,

$$\frac{J(u + tv) - J(u)}{t} \to \int_\Omega DW(x, \nabla u) \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx.$$

Comme l'application

$$v \mapsto \int_\Omega DW(x, \nabla u) \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx$$

est linéaire et continue de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, on en déduit que J est Gâteaux-différentiable et la conclusion suit du Théorème 6.3.2. □

En général, être point critique n'implique aucunement la propriété de minimalité. Toutefois, dans le cas convexe, ces deux propriétés sont équivalentes.

Théorème 6.3.4. *Sous les hypothèses (H_1)–(H_5), si $\bar{u}$ est une solution faible de*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(DW(x,\nabla\bar{u})\big) = f & \textit{dans } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

alors $\bar{u}$ est un point de minimum de J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Démonstration. Soit $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, par convexité de J, pour tout $t \in]0,1[$, on a

$$J(\bar{u} + t(v - \bar{u})) = J(tv + (1-t)\bar{u}) \leq tJ(v) + (1-t)J(\bar{u}).$$

Par conséquent,

$$\frac{J(\bar{u} + t(v - \bar{u})) - J(\bar{u})}{t} \leq J(v) - J(\bar{u}).$$

En utilisant la Gâteaux-différentiabilité de J, il vient par passage à la limite quand $t \to 0$ que

$$\langle d_G J(\bar{u}), v - \bar{u}\rangle \leq J(v) - J(\bar{u})$$

comme annoncé. Du fait que $\bar{u}$ est une solution faible, on en déduit que $d_G J(\bar{u}) = 0$, ce qui montre que

$$J(\bar{u}) \leq J(v)$$

pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, et donc que $\bar{u}$ est un point de minimum de J sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Bibliographie

[1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou : *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and its Applications, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York (1978).

[2] L. Boccardo, T. Gallouët, F. Murat : Unicité de la solution de certaines équations elliptiques non linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), no. 11, 1159–1164.

[3] G. B. Folland : *Introduction to partial differential equations.* Second edition. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.

[4] G. B. Folland : *Real analysis. Modern techniques and their applications*, Second edition. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[5] M. Giaquinta, L. Martinazzi : *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs*, **11** Edizioni della Normale, Pisa, 2012.

[6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger : *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (2001).

[7] E. Giusti : *Direct methods in the calculus of variations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ (2003).