Mémoire de DEA d'analyse numérique
Rapport de stage d'ingénieur en Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique

Jean-François Babadjian

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement monsieur Michel Frémond pour m'avoir accueilli et encadré durant quatre mois au sein du LCPC. J'adresse également mes remerciements à monsieur Gilles Francfort, enseignant-chercheur à l'Institut Galilée, pour avoir accepté de superviser mon travail tout au long de ce stage.

Table des matières

Introduction

Nous avons effectué notre stage de DEA et de fin d'étude d'ingénieur au sein du Laboratoire Central des Ponts et Chaussées à Paris avec Michel Frémond. Ce stage avait pour objet de mettre en application les enseignements suivis en formation d'ingénieur en mathématique appliquées et calcul scientifique de l'Institut Galilée ainsi que les enseignements de DEA d'analyse numérique de l'université Pierre et Marie Curie. A cet effet, nous avons mené durant quatre mois un travail à caractère théorique dans le domaine de la mécanique du solide dont le but était d'établir des résultats d'existence et d'unicité - ou seulement d'existence - de solutions d'équations aux dérivées partielles régissant l'évolution d'un solide. A partir de la loi de comportement de celui-ci, on écrit l'équation de la quantité de mouvement. Le problème mécanique devient alors purement un problème mathématique et c'est là qu'intervient notre contribution. Les problèmes envisagés se situeront toujours en dimension deux ou trois. Nous avons étudié deux types de matériaux. Dans la première partie, on considère un matériau dit durcissant ou encore à blocage c'est à dire qu'il se comporte de manière élastique tant que le déplacement reste borné par une certaine valeur. Par contre, dès que ce seuil est atteint, il se bloque ce qui signifie que quelle que soit la contrainte exercée, il ne se déformera plus. La deuxième partie quant à elle s'intéresse à un matériau constitué de fibres. Nous supposerons d'abord que les fibres ne peuvent pas casser et ensuite, nous étudierons le cas où la rupture est possible.

Chapitre 1

Etude d'un matériau durcissant

1.1 Introduction

On considère un matériau anisotrope et non homogène matérialisé par Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On dénote par A son tenseur d'élasticité qui vérifie les propriétés suivantes :
1. Propriété de symétrie : $\forall 1 \leq i,j,k,l \leq N$ et p.p. $x \in \Omega$

$$A_{ijkl}(x) = A_{ijlk}(x) = A_{jikl}(x) = A_{klij}(x)$$

2. Propriété d'ellipticité : $\exists \alpha > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^{N^2}$ et p.p. $x \in \Omega$

$$\sum_{k,l=1}^{N} A_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq \alpha \sum_{i,j=1}^{N} \xi_{ij}^2$$

De plus $\forall 1 \leq i,j,k,l \leq N$, $A_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$.
On note $\forall 1 \leq i,j \leq N$,

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big)$$

le tenseur des déformations. La loi de comportement de ce matériau est donnée par :

$$\sigma \in \partial\psi\big(e(u)\big)$$

où ψ est une fonctionnelle convexe définie par

$$\psi(\xi) = \frac{1}{2}A(x)\xi.\xi + I_M(\xi)$$

et I_M est la fonction indicatrice de l'ensemble $C = \{\xi \in \mathbb{R}^{N^2} \ / \ |\xi| \leq M\}$ qui vaut 0 si $|\xi| \leq M$ et $+\infty$ sinon. $\partial\psi\big(e(u)\big)$ correspond à la sous-différentielle de ψ en $e(u)$.
On suppose que ce matériau est maintenu fixe sur le bord de Ω, ce qui se formalise par la condition de Dirichlet $u = 0$ sur $\partial\Omega$, et qu'il est soumis à des forces volumiques f. Par ailleurs, le déplacement à l'instant initial est donné par u_0. Nous nous proposons d'étudier l'équation d'élasticité associée. Un tel matériau se comporte de manière élastique tant que les déformations restent inférieures à M. Le terme supplémentaire intervenant dans l'équation signifie que lorsque les déformations atteignent la valeur M, alors quelle que soit la contrainte exercée, le solide ne se déformera pas plus. D'où l'appellation de matériau durcissant. On appelera aussi ce type de matériaux, matériaux à blocage. Tant que les déformations restent bornées, le matériau sera élastique, c'est à dire que si l'on cesse de lui faire subir des contraintes externes, il reviendra à sa configuration initiale.

Dans une première partie, nous nous intéresserons à la résolution de l'équation d'élasticité stationnaire dont la loi de comportement est donnée ci-dessus :

$$\begin{cases} -\text{div}\ \partial\psi(e(u)) \ni f & \text{dans}\ \ \Omega \\ \qquad\qquad u = 0 & \text{sur}\ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

Par la suite, nous étudierons le problème quasi-statique en rajoutant un terme de résistance visqueuse. Nous aurons donc à faire à un matériau de type visco-élastique, c'est à dire à un matériau "doué de mémoire" en ce sens que l'état de contraintes à l'instant t dépend de toutes les déformations subies par le matériau aux instants antérieurs. Il s'agit de l'équation d'évolution suivante :

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t u - \operatorname{div} \partial\psi(e(u)) \ni f & \text{dans } \ Q_T \\ u = u_0 & \text{sur } \ \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega\times]0,T[\end{array}\right. \tag{1.2}$$

Nous ne pourrons pas étudier ces deux problèmes de front. A cet effet, nous allons introduire un problème approché en remplaçant la fonction ψ par une fonction ψ_n convexe et différentiable dans $\mathbb{R}^{N^2}$, définie par

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{2}A(x)\xi.\xi + n[(|\xi| - M)^+]^p$$

où $p \geq 2$ est fixé et n est un paramètre amené à tendre vers $+\infty$. Comme ψ_n est une fonction convexe et différentiable, alors la sous-différentielle de ψ_n coincide avec la différentielle ordinaire donc

$$\partial\psi_n(\xi) = D\psi_n(\xi) = A(x)\xi + np[(|\xi| - M)^+]^{p-1}\frac{\xi}{|\xi|}$$

On espère que lorsque $n \to +\infty$ le problème approché converge en un certain sens vers le problème initial.

1.2 Etude du problème stationnaire

Soit $f \in [L^2(\Omega)]^N$, nous sommes donc amenés à étudier l'équation

$$\left\{\begin{array}{rl} -\operatorname{div}\Big(A(x)e(u) + np[(|e(u)| - M)^+]^{p-1}\frac{e(u)}{|e(u)|}\Big) = f & \text{dans } \ \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \ \partial\Omega \end{array}\right. \tag{1.3}$$

1.2.1 Existence et unicité du problème approché

Montrons, tout d'abord que le problème (1.3) est bien posé. On remarque qu'il s'agit de l'équation d'Euler du problème de minimisation suivant :

$$\min_{v\in[W_0^{1,p}(\Omega)]^N} \left\{\frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(v).e(v) + n\int_\Omega \Big((|e(v)| - M)^+\Big)^p - \int_\Omega fv\right\}$$

On définit la fonctionnelle $J_n : [W_0^{1,p}(\Omega)]^N \to \mathbb{R}$ par

$$J_n(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(v).e(v) + n\int_\Omega \Big((|e(v)| - M)^+\Big)^p - \int_\Omega fv$$

$[W_0^{1,p}(\Omega)]^N$ est un espace de Banach réflexif. Nous allons montrer que J_n est une fonctionnelle strictement convexe, fortement sci et coercive.
A cet effet, posons :

$$\left\{\begin{array}{l} F(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega A(x)e(u).e(u) \\[2ex] G(u) = \displaystyle\int_\Omega fu \\[2ex] H(u) = n\displaystyle\int_\Omega \Big((|e(u)| - M)^+\Big)^p \end{array}\right.$$

On démontre aisément que F est strictement convexe et fortement sci sur $[W_0^{1,p}(\Omega)]^N$ et que G est convexe et fortement sci sur $[W_0^{1,p}(\Omega)]^N$.

Posons maintenant $h(r) = n\Big((r-M)^+\Big)^p$. h est convexe et comme $H(u) = \int_\Omega h(|e(u)|)$ on en déduit que H est convexe. Enfin H est continue comme composée d'applications continues et donc H est fortement sci.

Et donc J_n est strictement convexe fortement sci. Il reste à montrer que J_n est coercive. En effet $\forall v \in [W_0^{1,p}(\Omega)]^N$,

$$J_n(v) \geq n\int_\Omega \Big((|e(v)|-M)^+\Big)^p - \int_\Omega fv$$

Les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré et Korn impliquent que

$$J_n(v) \geq 2^{-p}n\|\nabla v\|^p_{L^p(\Omega)} - \|f\|_{L^{p'}(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} - M^p n|\Omega|$$

donc $J_n(v) \to +\infty$ quand $\|v\|_{[W_0^{1,p}(\Omega)]^N} \to +\infty$ ce qui prouve que J_n est coercive.
Ceci établit l'existence et l'unicité d'une solution u_n dans $[W_0^{1,p}(\Omega)]^N$ au problème de minimisation.
Comme J_n est Gâteau-différentiable sur $[W_0^{1,p}(\Omega)]^N$, ce minimum est caractérisé par l'équation d'Euler $\forall v \in [W_0^{1,p}(\Omega)]^N$

$$J_n'(u_n).v = 0$$

et donc

$$\int_\Omega A(x)e(u_n).e(v) + np\int_\Omega \{(|e(u_n)|-M)^+\}^{p-1}\frac{e(u_n)}{|e(u_n)|}.e(v) = \int_\Omega fv$$

En utilisant la formule de Green, il vient

$$-\mathrm{div}\Big(A(x)e(u)_n + np[(|e(u_n)|-M)^+]^{p-1}\frac{e(u_n)}{|e(u_n)|}\Big) = f \quad \text{dans} \quad [\mathcal{D}'(\Omega)]^N$$

On a donc démontré l'existence et l'unicité d'une solution $u_n \in [W_0^{1,p}(\Omega)]^N$ de l'équation

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\Big(A(x)e(u_n) + np[(|e(u_n)|-M)^+]^{p-1}\frac{e(u_n)}{|e(u_n)|}\Big) = f & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1.2.2 Estimations à priori

Comme u_n est l'unique minimiseur de J_n, on a

$$J_n(u_n) \leq J_n(0)$$

donc

$$\frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(u_n).e(u_n) + n\int_\Omega \Big((|e(u_n)|-M)^+\Big)^p \leq \int_\Omega fu_n$$

D'après les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré et en minorant le premier membre, il vient

$$\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |e(u_n)|^2 + n\int_\Omega \Big((|e(u_n)|-M)^+\Big)^p \leq C\|f\|_{[L^2(\Omega)]^N}\|u_n\|_{[H_0^1(\Omega)]^N}$$

Donc en utilisant l'inégalité de Korn

$$\begin{cases} \|u_n\|_{[H_0^1(\Omega)]^N} \leq C\|f\|_{[L^2(\Omega)]^N} \\ \displaystyle\int_\Omega \Big((|\nabla u_n|-M)^+\Big)^p \leq \frac{C}{n} \end{cases}$$

On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ faiblement dans }\; [H_0^1(\Omega)]^N$$

Par ailleurs,

$$\int_\Omega |e(u_n)|^p \leq 2^p\Big(\int_\Omega \big((|e(u_n)|-M)\big)^p + M^p|\Omega|\Big) \leq 2^p\Big(\int_\Omega \big((|e(u_n)|-M)^+\big)^p + CM^p|\Omega|\Big) \leq C$$

On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$e(u_n) \rightharpoonup e(u) \;\text{ faiblement dans }\; [L^p(\Omega)]^{N^2}$$

Et comme

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq C \int_\Omega |e(u_n)|^p$$

On peut à nouveau extraire une sous-suite telle que

$$\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \;\text{ faiblement dans }\; [L^p(\Omega)]^{N^2}$$

Donc

$$u_n \rightharpoonup u \;\text{ faiblement dans }\; [W_0^{1,p}(\Omega)]^N$$

Montrons maintenant que $\|e(u)\|_{[L^\infty(\Omega)]^{N^2}} \leq M$. Nous allons avoir besoin d'un argument d'intégration :

Lemme 1 *Soit f_n une suite de fonctions positives qui tend vers f faiblement dans $L^r(\Omega)$, $(r \geq 1)$ et soit $A_n = \{x \in \Omega : f_n(x) \geq K\}$ un ensemble mesurable tel que $|A_n| \to 0$. Alors $f \in L^\infty(\Omega)$ et $\|f\|_{L^\infty} \leq K$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$. Alors pour n assez grand

$$\Big|\int_{\Omega/A_n} \varphi(f_n - f)\Big| \leq \varepsilon$$

Donc

$$\Big|\int_{\Omega/A_n} \varphi f\Big| \leq \varepsilon + \Big|\int_{\Omega/A_n} \varphi f_n\Big| \leq \varepsilon + K\int_{\Omega/A_n} |\varphi|$$

Par ailleurs, comme $|A_n| \to 0$, $\varphi f \chi_{A_n} \to 0$ *pp* et comme $|\varphi f \chi_{A_n}| \leq |f\varphi| \in L^1(\Omega)$ on en déduit par convergence dominée que $\Big|\int_{A_n} \varphi f\Big| \to 0$.
En faisant maintenant tendre ε vers 0, il vient

$$\Big|\int_\Omega \varphi f\Big| \leq K \int_\Omega |\varphi|$$

D'où le lemme.

On voudrait appliquer le lemme 1 à $f_n = |e(u_n)|$ et $K = M + \eta$, où $0 < \eta < 1$. Posons $A_n = \{x \in \Omega : |e(u_n)| \geq M + \eta\}$. Il s'agit de montrer que $|A_n| \to 0$. En effet,

$$\eta^p|A_n| \leq \int_{A_n} \Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^p \leq \int_\Omega \Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^p \leq \frac{C}{n} \to 0$$

Donc

$$|A_n| \to 0$$

Le lemme 1 nous dit alors que $|e(u)| \in L^\infty(\Omega)$ et $\|e(u)\|_{[L^\infty(\Omega)]^{N^2}} \leq M + \eta$. En faisant tendre η vers 0 on en déduit que $\|e(u)\|_{[L^\infty(\Omega)]^{N^2}} \leq M$.

Nous allons à présent démontrer qu'il y a en fait convergence forte. En effet, on a prouvé que u_n était l'unique minimiseur de J_n donc $\forall 0 < t < 1$

$$J_n(u_n) \le J_n(tu)$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(u_n).e(u_n) + n\int_\Omega \Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^p - \int_\Omega f u_n \le$$
$$\le \frac{t^2}{2}\int_\Omega A(x)e(u).e(u) + n\int_\Omega \Big((|te(u)| - M)^+\Big)^p - t\int_\Omega fu$$

Or $|e(u)| \le M \Rightarrow t|e(u)| \le tM \Rightarrow t|e(u)| - M \le M(t-1) \le 0$. Donc $n\int_\Omega \Big((|te(u)| - M)^+\Big)^p = 0$.
En minorant le premier membre et en passant à la limite sup dans celui-ci, il vient

$$\limsup \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(u_n).e(u_n) - \int_\Omega fu \le \frac{t^2}{2}\int_\Omega A(x)e(u).e(u) - t\int_\Omega fu$$

En faisant tendre $t \to 1$ et en tenant compte du fait que F est faiblement sci (car F est convexe et fortement sci), on en déduit que

$$\limsup \int_\Omega A(x)e(u_n).e(u_n) \le \int_\Omega A(x)e(u).e(u) \le \liminf \int_\Omega A(x)e(u_n).e(u_n)$$

Donc

$$\lim \int_\Omega A(x)e(u_n).e(u_n) = \int_\Omega A(x)e(u).e(u)$$

Et comme $e(u_n) \rightharpoonup e(u)$ faiblement dans $[L^2(\Omega)]^{N^2}$ on en déduit que

$$\lim \int_\Omega A(x)\big(e(u_n) - e(u)\big).\big(e(u_n) - e(u)\big) = 0$$

Et donc, d'après la propriété d'ellipticité de $A(x)$, $e(u_n) \to e(u)$ fortement dans $[L^2(\Omega)]^{N^2}$. L'inégalité de Korn implique que $\nabla u_n \to \nabla u$ fortement dans $[L^2(\Omega)]^{N^2}$. On peut donc extraire une sous-suite telle que $\nabla u_n \to \nabla u$ pp.

Lemme 2 *Soit f_n une suite de fonctions qui tend vers f presque partout et telle que $\|f\|_{L^p(\Omega)} \le C$ $(1 < p < \infty)$, alors $f \in L^q(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans $L^q(\Omega)$, $\forall 1 \le q < p$.*

Démonstration. Si $f_n \to f$ pp, alors $|f_n|^p \to |f|^p$ pp. d'autre part, le lemme de Fatou implique que

$$\int_\Omega |f|^p = \int_\Omega \liminf |f_n|^p \le \liminf \int_\Omega |f_n|^p < +\infty$$

car $f_n \in L^p(\Omega)$. Donc $f \in L^p(\Omega)$.
Par ailleur, d'après le théorème d'Egoroff, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A_\varepsilon$ mesurable tel que $|\Omega/A_\varepsilon| < \varepsilon$ et

$$\sup_{x \in A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

Ainsi, en appliquant L'inégalité de Hölder, $\forall q \in [1, p[$, on a :

$$\int_\Omega |f_n - f|^q = \int_{\Omega/A_\varepsilon} |f_n - f|^q + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f|^q \le \Big(\int_\Omega |f_n - f|^p\Big)^{q/p} |\Omega/A_\varepsilon|^{1-q/p} + \Big(\sup_{x \in A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)|\Big)^q |\Omega| \to 0$$

car $q < p$.
Et le lemme 2 est ainsi démontré.

En se souvenant que ∇u_n est borné dans tous les $[L^p(\Omega)]^{N^2}$, $\forall p < +\infty$ et en appliquant le lemme

2, on en conclut que $\nabla u \in [L^q(\Omega)]^{N^2}$, $\forall q < p < +\infty$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ fortement dans $[L^q(\Omega)]^{N^2}$. Et donc $u_n \to u$ fortement dans $[W_0^{1,q}(\Omega)]^N$, $\forall\, 2 \leq q < +\infty$.

Posons maintenant $\mathcal{R}_n(e(u_n)) = n\Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^{p-1} \frac{e(u_n)}{|e(u_n)|}$. $\mathcal{R}_n(e(u_n))$ est symétrique car $e(u_n)$ l'est. Le problème (1.3) s'écrit alors

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\Big(A(x)e(u_n)) - \mathrm{div}\mathcal{R}_n(e(u_n)\Big) = f & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

1.2.3 Retour au problème initial

Notons

$$\mathcal{K} = \{v \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N \ \forall q < \infty,\ \textit{tel que}\ |e(v(x))| \leq M\ \textit{p.p.}\ x \in \Omega\}$$

De cette manière, on a $u \in \mathcal{K}$

Nous allons commencer par démontrer le résultat suivant : $\forall v \in \mathcal{K}$

$$\big(\mathcal{R}_n(e(u_n)), e(v) - e(u_n)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} \leq 0$$

Rappelons que $\mathcal{R}_n(e(u_n)) = n\Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^{p-1} \frac{e(u_n)}{|e(u_n)|}$ et soit donc $v \in \mathcal{K}$

Distingons deux cas :

1. si $|e(u_n)| \leq M$, alors $\mathcal{R}_n(e(u_n)) = 0$ et donc $\big(\mathcal{R}_n(e(u_n)), e(v) - e(u_n)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} = 0$
2. si $|e(u_n)| \geq M$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$e(u_n).e(v) - |e(u_n)|^2 \leq |e(u_n)||e(v)| - |e(u_n)|^2 \leq |e(u_n)|(M - |e(u_n)|) \leq 0$$

donc $\big(\mathcal{R}_n(e(u_n)), e(v) - e(u_n)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} = n\int_\Omega \Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^{n-1} \frac{e(u_n)}{|e(u_n)|}.(e(v) - e(u_n)) \leq 0$

et donc

$$\big(\mathcal{R}_n(e(u_n)), e(v) - e(u_n)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} \leq 0$$

Ce qui établit le résultat attendu.

Notons I la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathcal{K}$ c'est à dire, $I(v) = 0$ si $v \in \mathcal{K}$ et $I(v) = +\infty$ sinon. On a

$$I(v) = \int_\Omega I_M(e(v(x)))dx$$

$\forall v \in \mathcal{K}$, prenons $v - u_n$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, il vient

$$\int_\Omega A(x)e(u_n).(e(v) - e(u_n)) + \int_\Omega \mathcal{R}_n(e(u_n)).(e(v) - e(u_n)) = \int_\Omega f(v - u_n)$$

et donc

$$\int_\Omega A(x)e(u_n).(e(v) - e(u_n)) \geq \int_\Omega f(v - u_n)$$

Par passage à la limite, il vient d'après les convergences établies ci-dessus

$$\int_\Omega A(x)e(u).(e(v) - e(u)) \geq \int_\Omega f(v - u)$$

Ce qui est l'inéquation d'Euler du problème de minimisation

$$\min_{v \in \mathcal{K}} \Big\{ \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(v).e(v) - \int_\Omega fv \Big\} \tag{1.4}$$

Posons

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(v).e(v) - \int_\Omega fv$$

On a déjà vu que J était une fonctionnelle strictement convexe sci et coercive sur $[W_0^{1,q}(\Omega)]^N$. Par ailleurs, $\mathcal{K}$ est un convexe, fermé non vide. Il existe donc une unique solution $u \in \mathcal{K}$ à ce problème. L'inégalité que nous avons obtenue signifie aussi que

$$f + \mathrm{div}(A(x)e(u)) \in \partial I(u)$$

Nous allons avoir besoin d'expliciter la sous-différentielle de I. Pour ce faire, posons
$\Lambda : [W_0^{1,q}(\Omega)]^N \to [L^q(\Omega)]^N$, $u \longmapsto e(u)$. Λ est $\mathcal{C}^1$ et $\forall v \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$, $< \Lambda'(u), v >= e(v)$.

$F : [L^q(\Omega)]^N \to \mathbb{R}$, $w \longmapsto \int_\Omega I_M(w)$. Comme I_M est convexe sci, on sait que

$$\partial F(w) = \{g \in [L^{q'}(\Omega)]^N : g(x) \in \partial I_M(w(x)) \ pp\}$$

Comme

$$I(u) = \int_\Omega I_M(e(u)) = (F \circ \Lambda)(u)$$

Alors si $h \in \partial I(u)$, $\forall v \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$ on a

$$< h, v >= \int_\Omega w(x) e(v(x)) dx$$

où $w(x) \in \partial I_M(e(u(x)))$ pp. Et donc $h = -\mathrm{div} w$. On en déduit alors que

$$f + \mathrm{div}(A(x)e(u)) = -\mathrm{div} Z$$

Où

$$Z(x) \in -\mathrm{div}(\partial I_M(e(u(x))) \ pp$$

Finalement, on a démontré la

Proposition 1 *Si $f \in [L^2(\Omega)]^N$, alors l'équation*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)e(u)) - \mathrm{div} Z = f & \textit{dans } [\mathcal{D}'(\Omega)]^N \\ Z(x) \in -\partial I_M(e(u(x)) & \textit{p.p. } x \in \Omega \\ |e(u(x))| \le M & \textit{p.p. } x \in \Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in [W_0^{1,q}(\Omega)]^N$, $\forall q < \infty$.

1.3 Etude du problème instationnaire

Soient $f \in L^2(0,T; [L^2(\Omega)]^N)$ et $u_0 \in [H_0^1(\Omega)]^N$ tel que $|e(u_0)| \le M$ pp, nous allons nous intéresser dans cette partie à la résolution de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathrm{div}\Big(A(x)e(u) + np[(|e(u)| - M)^+]^{p-1} \frac{e(u)}{|e(u)|}\Big) = f & \text{dans } Q_T \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[\end{cases} \tag{1.5}$$

1.3.1 Methode de Galerkin pour l'étude du problème approché

Notons $\mathcal{R}_n(e(u)) = np[(|e(u)| - M)^+]^{p-1} \frac{e(u)}{|e(u)|} = D\phi_n(e(u))$, où $\phi_n(e(u)) = n[(|e(u)| - M)^+]^p$ est une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^{p-1}$.

Unicité du problème approché

Comme $p \geq 2$ alors $[W_0^{1,p}(\Omega)]^N \hookrightarrow [H_0^1(\Omega)]^N$. Soit l'opérateur B défini par :

$$B : L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \to L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^N),\ u \longmapsto Bu = -\mathrm{div}(A(x)e(u)) - \mathrm{div}\mathcal{R}_n(e(u))$$

Montrons que B est un opérateur strictement monotone. Soient $u, v \in [H_0^1(\Omega)]^N$

$$\int_0^T \langle Bu(t) - Bv(t), u(t) - v(t)\rangle_{H_0^1, H^{-1}} dt$$

$$\geq \alpha \int_0^T \|\nabla u(t) - \nabla v(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} dt + \int_0^T (\mathcal{R}_n(e(u(t))) - \mathcal{R}_n(e(v(t))), e(u(t)) - e(v(t)))_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} dt$$

$$\geq \alpha \int_0^T \|\nabla u(t) - \nabla v(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} dt$$

En effet, par caractérisation de la convexité de ϕ_n au premier ordre, on en déduit que $D\phi_n$ est monotone, c'est à dire que $\forall t \in]0,T[$

$$(D\phi_n(e(u(t))) - D\phi_n(e(v(t))), e(u(t)) - e(v(t)))_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} \geq 0$$

et donc

$$\int_0^T (\mathcal{R}_n(e(u(t)) - \mathcal{R}_n(e(v(t))), e(u(t) - e(v(t))_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} dt \geq 0$$

Ce qui démontre effectivement que B est un opérateur strictement monotone.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer l'unicité d'une solution de (1.6). En effet, prenons u et $\bar{u}$ deux solutions de (1.6), alors il vient par estimation d'énergie que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - \bar{u}(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \langle Bu(t) - B\bar{u}(t), u(t) - \bar{u}(t)\rangle = 0$$

Donc $\forall t \in]0,T[$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t) - \bar{u}(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} \leq 0$$

Par intégration, $\forall t \in]0,T[$

$$\|u(t) - \bar{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq 0$$

car $u(0) = \bar{u}(0) = u_0$ et donc $u = \bar{u}$ ce qui traduit l'unicité de la solution de (1.6).

Existence du problème approché

C'est ici que nous allons employer une méthode de Galerkin. Soit $\{\varphi_i\}$ une base hilbertienne de $[L^2(\Omega)]^N$ formée des vecteurs propres de l'opérateur de l'élasticité avec condition de Dirichlet. On note $\{\lambda_i\}$ les valeurs propres correspondantes qui forment une suite de nombres positifs qui tend vers $+\infty$. On a donc

$$-\mathrm{div}(A(x)e(\varphi_i)) = \lambda_i \varphi_i$$

Notons $u^m(t) = \sum_{i=1}^m u_i^m(t)\varphi_i$. On a

$$f^m(t) = \sum_{i=1}^m f_i^m(t)\varphi_i \to f(t) \text{ fort dans } L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$$

et

$$u_0^m = \sum_{i=1}^m u_{0,i}^m \varphi_i \to u_0 \text{ fort dans } [L^2(\Omega)]^N$$

Nous allons commencer par montrer que l'équation

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t u^m - \operatorname{div}\Big(A(x)e(u^m)) + \mathcal{R}_n(e(u^m))\Big) = f^m & \text{dans } \; Q_T \\ \\ u^m(0) = u_0^m & \text{sur } \; \Omega \\ \\ u^m = 0 & \text{sur } \; \partial\Omega\times]0,T[\end{array}\right.$$

admet une solution dans $V^m = [\varphi_1, ..., \varphi_m]$ le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les m premiers vecteurs de la base hilbertienne. En multipliant par φ_i et en intégrant sur Ω, il vient

$$\int_\Omega \partial_t u^m \varphi_i + \int_\Omega A(x)e(u^m).e(\varphi_i) + \int_\Omega \mathcal{R}_n(e(u^m)).e(\varphi_i) = \int_\Omega f^m \varphi_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_\Omega u^m \varphi_i + \int_\Omega A(x)e(u^m).e(\varphi_i) + \int_\Omega \mathcal{R}_n(e(u^m)).e(\varphi_i) = f_i^m$$

$$\Rightarrow \frac{du_i^m}{dt} + \lambda_i u_i^m + \int_\Omega \mathcal{R}(e(u^m)).e(\varphi_i) = f_i^m$$

On pose maintenant $U^m = (u_1^m, ..., u_m^m)$, $F^m = (f_1^m, ..., f_m^m)$, $U_0^m = (u_{0,1}^m, ..., u_{0,m}^m)$ et on note

$$R(U^m)_i = \int_\Omega \mathcal{R}_n(e(u^m)).e(\varphi_i)$$

et enfin

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_j)$$

Donc U^m vérifie l'équation

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{dU^m}{dt} + \Lambda U^m + R(U^m) = F^m \\ U^m(0) = U_0^m \end{array}\right.$$

$U^m \longmapsto \Lambda U^m + R(U^m) - F^m$ est continue car Λ est une application linéaire et ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^{p-1}$. On en déduit l'existence d'une solution U^m de l'équation différentielle ci-dessus sur un intervalle de temps $[0, T(U_0^m)[$ dépendant de la donnée initiale. L'existence d'une solution globale sur $[0,T]$ est obtenue si $|V^m(t)|$ n'explose pas quand t tend vers $T(U_0^m)$. Autrement dit, il existe une solution $u^m \in \mathcal{C}^1(]0, T(U_0^m)[; V^m)$ de

$$\left\{\begin{array}{rl} \partial_t u^m - \operatorname{div}\Big(A(x)e(u^m)) + \mathcal{R}_n(e(u^m))\Big) = f^m & \text{dans } \; Q_T \\ \\ u^m(0) = u_0^m & \text{sur } \; \Omega \\ \\ u^m = 0 & \text{sur } \; \partial\Omega\times]0,T[\end{array}\right.$$

Estimations d'énergie

On voudrait à présent faire tendre le paramètre m vers l'infini, afin de se ramener au probème (1.6). Pour ce faire, nous allons effectuer une estimation d'énergie en multipliant l'équation

$$\int_\Omega \partial_t u^m \varphi_i + \int_\Omega A(x)e(u^m).e(\varphi_i) + \int_\Omega \mathcal{R}_n(e(u^m)).e(\varphi_i) = \int_\Omega f^m \varphi_i$$

par u_i^m, en sommant pour i allant de 1 à m et en intégrant sur Ω, il vient après minoration du premier membre

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \alpha\|\nabla u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \int_\Omega \mathcal{R}_n(e(u^m(t))).e(u^m(t)) \leq \int_\Omega f^m(t)u^m(t)$$

Comme $\int_\Omega \mathcal{R}_n(e(u^m(t))).e(u^m(t)) \geq 0$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \alpha\|\nabla u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} \leq \|f^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N}\|u^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N}$$

En particulier

$$\|u^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} \leq \|f^m(t)\|_{L^2([L^2(\Omega)]^N}\|u^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N}$$

Par intégration il vient

$$\|u^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq \|f^m\|_{L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + \|u_0^m\|_{[L^2(\Omega)]^N} \leq C$$

Donc $T(U_0^m) = T$ et

$$\|u^m\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \leq C$$

D'un autre côté, on a

$$\int_0^T \|\nabla u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}}dt \leq \|u^m\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}\|f^m\|_{L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \leq C$$

donc

$$\|u^m\|_{L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)} \leq C$$

Par ailleurs,

$$np\int_{Q_T}\left((|e(u^m)| - M)^+\right)^{p-1}|e(u^m| = \int_{Q_T}\mathcal{R}_n(e(u^m)).e(u^m) \leq C$$

$$\Rightarrow np\int_{Q_T}\left((|e(u^m)| - M)^+\right)^p + Mnp\int_{Q_T}\left((|e(u^m| - M)^+\right)^{p-1} \leq C$$

Or

$$\int_{Q_T}|e(u^m)|^p \leq 2^p\int_{Q_T}(|e(u^m| - M)^p + (2M)^p|Q_T| \leq C$$

Donc

$$\int_{Q_T}|e(u^m)|^p \leq 2^p\int_{Q_T}\left((|e(u^m| - M)^+\right)^p + C(2M)^p|Q_T| \leq C$$

et donc

$$\|e(u^m)\|_{L^p(0,T;[L^p(\Omega)]^{N^2})} \leq C$$

En particulier $e(u^m) \rightharpoonup e(u)$ faible dans $L^p(0,T;[L^p(\Omega)]^{N^2})$.
En désignant par p' l'exposant conjugué de p ($p' = \frac{p}{p-1}$), on constate que

$$\|D\phi_n(e(u^m(t)))\|^{p'}_{[L^{p'}(\Omega)]^{N^2}} = (np)^{p'}\int_\Omega\left((|e(u^m(t))| - M)^+\right)^{p'(p-1)} = (np)^{p'}\int_\Omega\left((|e(u^m(t))| - M)^+\right)^p \leq C$$

Et donc

$$\|D\phi_n(e(u^m))\|^{p'}_{L^{p'}(0,T;[L^{p'}(\Omega)]^{N^2})} \leq C$$

$\Rightarrow D\phi_n(e(u^m)) \rightharpoonup Y_n$ faible dans $L^{p'}(0,T;[L^{p'}(\Omega)]^{N^2})$.
Il s'agit à présent de montrer que $Y_n = D\phi_n(e(u))$.

Lemme 3 *Soit ϕ une fonction convexe, $\mathcal{C}^1$ et à croissance p. On suppose que $w^m \rightharpoonup w$ faible dans $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ et que $D\phi(w^m) \rightharpoonup Y$ faible dans $L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$. On suppose de plus que*

$$\limsup\int_0^T\int_0^t\int_\Omega D\phi(w^m)w^m \leq \int_0^T\int_0^t\int_\Omega Yw$$

Alors, $Y = D\phi(w)$.

Démonstration. Par caractérisation de la convexité au premier ordre, la différentielle de ϕ est une application monotone. Et donc $\forall v \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega (D\phi(w^m)) - D\phi(v))(w^m - v) \geq 0$$

Par passage à la limite sup, il vient par convergence faible

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega (Y - D\phi(v))(w - v) \geq 0$$

On pose $v = w + su$, avec $s \in \mathbb{R}^*$ et $u \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$. Donc

$$-s\int_0^T \int_0^t \int_\Omega (Y - D\phi(w + su))u \geq 0$$

En simplifiant par s

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \int_0^t \int_\Omega (Y - D\phi(w + su))u \leq 0 \quad si\ s > 0 \\ \displaystyle\int_0^T \int_0^t \int_\Omega (Y - D\phi(w + su))u \geq 0 \quad si\ s < 0 \end{cases}$$

Comme ϕ est à croissance p on en déduit qu'il existe un $C > 0$ tel que

$$|D\phi(w + su)| \leq C|w + su|^{p-1}$$

donc

$$|D\phi(w + su)|^{p'} \leq C|w + su|^p$$

Or $w + su \to w$ dans $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ donc par d'après la réciproque de la convergence dominée, il existe un $g \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$ tel que $|w + su| \leq g$. Et donc

$$|D\phi(w + su)|^{p'} \leq Cg^p \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$$

Par ailleurs, par continuité de $D\phi$ on a $D\phi(w+su) \to D\phi(w)$ pp, donc d'après le théorème de convergence dominée, $D\phi(w + su) \to D\phi(w)$ dans $L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega))$. En passant à la limite quand $s \to 0$, il vient

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega (Y - D\phi(w))u = 0$$

Soit $Y = D\phi(w)$ ce qui prouve le lemme.

u^m vérifie l'équation

$$\partial_t u^m - \operatorname{div}\Big(A(x)e(u^m) + \mathcal{R}(e(u^m)\Big) = f^m$$

Par passage à la limite au sens des distributions, u vérifie l'équation

$$\partial_t u - \operatorname{div}\Big(A(x)e(u) + Y_n\Big) = f$$

Nous voudrions appliquer lemme précédent à $w^m = e(u^m)$. ϕ_n est bien une fonction convexe, $\mathcal{C}^1$ et à croissance p. Il reste à vérifier que

$$\limsup \int_0^T \int_0^t \int_\Omega D\phi_n(e(u^m))e(u^m) \leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega Ye(u)$$

$$\Big(D\phi_n(e(u^m(t))), e(u^m(t)\Big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} = (f^m(t), u^m(t))_{[L^2(\Omega)]^N} - \Big(A(x)e(u^m(t), e(u^m(t)\Big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} -$$

$$-\Big(\partial_t u^m(t)), u^m(t)\Big)_{[L^2(\Omega)]^N}$$

Or

$$\limsup \int_0^T \int_0^t (f^m(t), u^m(t))_{[L^2(\Omega)]^N} = \int_0^T \int_0^t (f(t), u(t))_{[L^2(\Omega)]^N}$$

car $f^m \to f$ fortement dans $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$ et $u^m \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$.

Ensuite par semi-continuité inférieure

$$-\int_0^T \int_0^t \big(A(x)e(u(t)), e(u(t))\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}}$$

$$\geq -\liminf \int_0^T \int_0^t \big(A(x)e(u^m(t), e(u^m(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} = \limsup -\int_0^T \int_0^t \big(A(x)e(u^m(t), e(u^m(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}}$$

Et enfin, on démontre par densité des fonctions $\mathcal{C}^1([0,T];\mathcal{C}_c^\infty(\Omega))$ dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ que

$$-\int_0^T \int_0^t \Big(\partial_t u^m(s)), u^m(s)\Big)_{[L^2(\Omega)]^N} = -\frac{1}{2}\int_0^T \|u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + T\|u_0^m\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}$$

$$\Rightarrow \limsup -\int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t u^m(t) u^m(t) \leq -\frac{1}{2}\int_0^T \|u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} + T\|u_0\|_{[L^2(\Omega)]^N} = -\int_0^T \int_0^t \int_\Omega \partial_t u(t) u(t)$$

On constate effectivement que

$$\limsup \int_0^T \int_0^t \int_\Omega D\phi_n(e(u^m)e(u^m) \leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega Y_n e(u)$$

Appliquant maintenant le lemme, on déduit que $Y_n = D\phi_n(e(u)) = \mathcal{R}_n(e(u))$. On a finalement montré l'existence et l'unicité d'une solution $u_n \in L^p(0,T;[W_0^{1,p}(\Omega)]^N) \cap L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$ de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \operatorname{div}\Big(A(x)e(u_n) + np[(|e(u_n)| - M)^+]^{p-1}\frac{e(u_n)}{|e(u_n)|}\Big) = f & \text{dans } Q_T \\ u_n(0) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\end{cases}$$

1.3.2 Estimations d'énergie

En effectuant les mêmes estimations d'énergie qu'au paragraphe précédent en remplaçant f^m par f, on démontre que u_n est suite bornée dans $L^p(0,T;[W_0^{1,p}(\Omega)]^N) \cap L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$. On peut donc extraire une sous-suite telle que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(0,T;[W_0^{1,p}(\Omega)]^N) \cap L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$.
On démontre aussi que

$$\int_{Q_T} \mathcal{R}_n(e(u_n)).e(u_n) \leq C$$

$$\Rightarrow np\int_{Q_T} \big((|e(u_n)| - M)^+\big)^{p-1}|e(u_n)| \leq C$$

$$\Rightarrow np\int_{Q_T} \big((|e(u_n)| - M)^+\big)^{p} + Mnp\int_{Q_T} \big((|e(u_n)| - M)^+\big)^{p-1} \leq C$$

Donc en particulier

$$\|\mathcal{R}_n(e(u_n))\|_{[L^1(\Omega]^{N^2}} = np\int_{Q_T} \big((|e(u_n)| - M)^+\big)^{p-1} \leq \frac{C}{M}$$

Donc

$$\mathcal{R}_n(e(u_n)) \to \mathcal{R} \ dans \ [\mathcal{D}'(Q_T)]^{N^2}$$

Par ailleurs, multiplions l'équation par $\partial_t u_n$ puis intégrons sur Ω, il vient

$$\|\partial_t u_n(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(A(x)e(u_n(t)), e(u_n(t))\big)_{[L^2(\Omega)]^N} + \frac{d}{dt}\int_\Omega \phi_n(e(u_n(t))) =$$

$$= \big(f(t), \partial_t u_n(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^N} \le \frac{1}{2}\|f(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \frac{1}{2}\|\partial_t u_n(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}$$

On intÃ¨gre entre 0 et T, comme $e(u_0) \le M$ on en déduit que $\phi_n(e(u_0)) = 0$ et donc

$$\frac{1}{2}\|\partial_t u_n\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + \frac{\alpha}{2}\|e(u_n(t)))\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} \le \frac{1}{2}\|f(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \frac{1}{2}\|A\|_{L^\infty(\Omega)^{N^4}}\|e(u_0)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}$$

On a donc

$$\begin{cases} \|\partial_t u_n\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \le C \\ \\ \|e(u_n))\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \le C \end{cases}$$

En regroupant toutes les précédentes estimations, on en déduit par compacité faible que

$$\begin{cases} \partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{faible dans } \ L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N) \\ \\ \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{faible dans } \ L^\infty(0,T;[H^1_0(\Omega)]^N) \cap L^p(0,T;[W^{1,p}_0(\Omega)]^N) \end{cases}$$

Par ailleurs, d'après le théorème d'Ascoli,

$$u_n \to u \ \text{ fort dans } \ \mathcal{C}^0([0,T];[L^2(\Omega)]^N)$$

Nous allons maintenant démontrer que $\|e(u)\|_{[L^\infty(Q_T)]^{N^2}} \le M$. A cet effet, posons $A_n = \{(x,t) \in Q_T : |e(u_n)(x,t)| \ge M + \eta\}$. Il s'agit de montrer que $|A_n| \to 0$. En effet,

$$\int_{A_n} \Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^p \le \int_{Q_T} \Big((|e(u_n)| - M)^+\Big)^p \le \frac{C}{n} \to 0$$

Donc

$$\eta^p |A_n| \to 0 \Rightarrow |A_n| \to 0$$

Par ailleurs, on sait que $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^2(0,T;[H^1_0(\Omega)]^N)$. Donc $e(u_n) \rightharpoonup e(u)$ faiblement dans $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^{N^2})$. D'après le lemme 1, $|e(u)| \in L^\infty(0,T;[L^\infty(\Omega)]^{N^2})$ et $\|e(u)\|_{L^\infty(0,T;[L^\infty(\Omega)]^{N^2})} \le M + \eta$. En faisant tendre η vers 0 on en déduit que $\|e(u)\|_{L^\infty(0,T;[L^\infty(\Omega)]^{N^2})} \le M$.
Donc $|e(u)(x,t)| \le M$ p.p. $(x,t) \in Q_T$.

Posons

$$\mathcal{K} = \{v \in L^p(0,T;[W^{1,p}_0(\Omega)]^N) \cap L^\infty(0,T;[H^1_0(\Omega)]^N) : |e(v)(x,t)| \le M \ p.p.(x,t) \in Q_T\}$$

Donc $u \in \mathcal{K}$.

Montrons maintenant que $\forall v \in \mathcal{K}$

$$\int_{Q_T} \mathcal{R}_n(e(u_n)).(e(v) - e(u_n)) \le 0$$

En effet, $R(e(u_n)) = D\phi_n(e(u_n))$, où $\phi_n(e(u_n)) = n\big((|e(u_n)| - M)^+\big)^p$ est une fonction convexe. Par caractérisation de la convexité au premier ordre, il vient

$$\phi_n(e(v)(t)) \ge \phi_n(e(u_n)(t)) + \big(\mathcal{R}_n(e(u_n)(t)), e(v)(t) - e(u_n)(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}}$$

Si l'on choisit $v \in \mathcal{K}$ alors $\phi_n(e(v)(t)) = 0$ et donc

$0 \geq \phi_n(e(u_n)(t)) + \big(\mathcal{R}_n(e(u_n)(t)), e(v)(t) - e(u_n)(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} \geq \big(\mathcal{R}_n(e(u_n)(t)), e(v)(t) - e(u_n)(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^{N^2}}$

car $\phi_n \geq 0$. Enfin, en intégrant entre 0 et T, on en déduit que $\forall v \in \mathcal{K}$

$$\int_{Q_T} \mathcal{R}_n(e(u_n)).(e(v) - e(u_n)) \leq 0$$

ce qui correspond effectivement au résultat attendu.

$\forall v \in \mathcal{K}$, on multiplie l'équation

$$\partial_t u_n - \mathrm{div}\big(A(x)e(u_n) + \mathcal{R}_n(e(u_n)\big) = f$$

par $v - u_n$ puis on intègre sur Q_T, il vient

$-\big(\partial_t u_n, v - u_n\big)_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} - \big(A(x)e(u_n), e(v) - e(u_n)\big)_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + (f, v - u_n)_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \leq 0$

D'après les résultats de convergence déjà établis, on en déduit par passage à la limite que $\forall v \in \mathcal{K}$

$$-\big(\partial_t u, v - u\big)_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} - \big(A(x)e(u), e(v) - e(u)\big)_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + (f, v - u)_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \leq 0$$

1.3.3 Retour à l'équation de départ

Existence d'une solution

Nous avons donc démontré que

$$-\partial_t u + \mathrm{div}(A(x)e(u)) + f \in \partial I(u)$$

où I désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathcal{K}$. On démontre de la même manière que dans la partie stationnaire l'existence d'une solution de l'équation

$$\begin{cases} -\partial_t u + \mathrm{div}(A(x)e(u)) - \mathrm{div}Z = f & \text{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u = u_0 & \text{sur } \Omega \\ Z(x,t) \in \partial I_M(e(u(x,t))) & \text{p.p. } (x,t) \in Q_T \\ |e(u)(x,t)| \leq M & \text{p.p. } (x,t) \in Q_T \end{cases}$$

dans $L^p(0,T;[W_0^{1,p}(\Omega)]^N) \cap L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \cap H^1(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$

Unicité de la solution

Il ne nous reste plus qu'à montrer l'unicité de la solution. Pour cela définissons l'opérateur B par

$$B : L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \to L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^N),\ u \mapsto Bu = -\mathrm{div}(A(x)e(u)) - \mathrm{div}Z$$

où $Z(x,t) \in \partial I_M(e(u(x,t)))$ pp. Nous allons montrer que B est un opérateur strictement monotone. Soient $u, v \in L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)$

$$\int_0^T \langle Bu(t) - Bv(t), u(t) - v(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} dt$$

$\geq \alpha\|\nabla u - \nabla v\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + \big(\mathcal{R}(e(u)) - \mathcal{R}(e(v)), e(u) - e(v)\big)_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \geq \alpha\|\nabla u - \nabla v\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}$

En effet, comme I_M, est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe, I_M est une fonction convexe. Il vient par caractérisation de la convexité au premier ordre que la sous-différentielle de I_M est monotone.

Nous sommes à présent en mesure de démontrer l'unicité d'une solution de l'équation. En effet, prenons u et $\bar{u}$ deux solutions de l'équation, alors il vient par estimation d'énergie et par intégration en temps que

$$\frac{1}{2}\|u-\bar{u}\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} + \langle Bu - B\bar{u}, u-\bar{u}\rangle = 0$$

Donc

$$\frac{1}{2}\|u-\bar{u}\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \leq 0$$

car $u(0)=\bar{u}(0)=u_0$ et donc $u=\bar{u}$ ce qui traduit l'unicité de la solution de l'équation.

Finalement nous avons démontré la proposition suivante

Proposition 2 *Si $f \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$ et $u_0 \in [H^1_0(\Omega)]^N$ tel que $|e(u_0)| \leq M$ pp, alors l'équation*

$$\begin{cases} -\partial_t u + \operatorname{div}(A(x)e(u)) - \operatorname{div} Z = f & \textit{dans } \mathcal{D}'(Q_T) \\ u = u_0 & \textit{sur } \Omega \\ Z(x,t) \in \partial I_M(e(u(x,t))) & \textit{p.p. } (x,t)\in Q_T \\ |e(u)(x,t)| \leq M & \textit{p.p. } (x,t)\in Q_T \end{cases}$$

admet une unique solution u dans $L^p(0,T;[W^{1,p}_0(\Omega)]^N) \cap L^\infty(0,T;[H^1_0(\Omega)]^N) \cap H^1(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$.

Chapitre 2

Etude d'un matériau constitué de fibres

2.1 Introduction

Nous nous proposons dans cette section d'étudier la loi de comportement d'un matériau non homogène, anisotrope consistué des fibres. Pour ce faire considérons un solide contenant un grand nombre de longues fibres. Celui-ci est matérialisé par Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^N$. Le solide subit toujours des forces volumiques notées f. Il est maintenu fixe sur le bord, nous adopterons donc une condition de Dirichlet $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Le déplacement à l'instant initial est donné par u_0. Nous préciserons ultérieurement les régularités nécessaires à f et u_0. Dans un premier temps, nous simplifierons le problème en supposant que les fibres ne cassent pas. Dans ce cas, on supposera qu'il n'y a pas d'effets mécaniques quand les fibres sont trop proches. Quand les fibres se déplacent, elles se ressèrent et empêchent leur distance d'augmenter. En d'autres termes elles résistent à l'élongation. Nous serons amenés à étudier l'équation régissant l'évolution d'un tel solide :

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } Q_T \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases}$$

où $k \geq 0$ est une constante donnée. Nous nous intéresserons tout d'abord à la résolution de l'équation stationnaire avant d'étudier l'équation d'évolution.

Par la suite, nous étudierons un problème plus réaliste en supposant que les fibres peuvent casser quand elles sont étirées. Pour prendre en considération ce phénomène, il nous faudra tenir compte d'une nouvelle quantité décrivant l'état du matériau car la rupture des fibres résulte des mouvements microscopiques. Il s'agit de la fraction de volume de fibres non cassées notée $\beta(x,t)$ dont on se donne la valeur β_0 à l'instant initial. Cette fois ci nous serons amenés à résoudre un système d'équation aux dérivées partielles couplé :

$$\begin{cases} \partial_t\beta - \Delta\beta + \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + \partial I(\beta) \ni w & \text{dans } Q_T \\ -\operatorname{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta(x,t)+\beta(y,t)\big)\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } Q_T \\ \beta(0) = \beta_0 & \text{sur } \Omega \\ u = \beta = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases}$$

où I désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$, qui vaut 0 si $0 \leq \beta(x,t) \leq 1$ *pp* et $+\infty$ sinon et $\partial I(\beta)$ est la sous-différentielle de I en β. Ici encore nous étudierons d'abord le problème stationnaire puis ensuite le problème d'évolution.

Un matériau de ce type est utilisé en ingénierie civile : le Texsol, un mélange d'un matériau granulaire, par exemple le sable, et de fibres textiles. Un tel matériau s'avère avoir de très bonnes propriétés de rigidité. Il est utilisé par exemple pour retenir des murs.

2.2 Fibres non cassantes

2.2.1 Etude du problème stationnaire

Supposons que $f \in [L^2(\Omega)]^N$. Nous voulons étudier l'équation

$$\left\{ \begin{array}{lr} -\mathrm{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Ecrivons la formulation variationnelle de ce problème. Soit $v \in [H_0^1(\Omega)]^N$, multiplions l'équation par v puis intégrons sur Ω, il vient

$$\int_\Omega A(x)e(u).e(v) - 2\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\big\}^+ v(x).(y-x)dydx = \int_\Omega fv$$

donc

$$\int_\Omega A(x)e(u).e(v) + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\big\}^+\big\{\big(v(y)-v(x)\big).(y-x)\big\}dydx = \int_\Omega fv$$

Il s'agit de l'équation d'Euler du problème de minimisation

$$\min_{u\in[H_0^1(\Omega)]^N} J(u)$$

avec

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(u).e(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{[\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)]^+\big\}^2 dydx - \int_\Omega fu$$

Il s'agit maintenant de montrer que J est une fonctionnelle strictement convexe sci et coercive sur $[H_0^1(\Omega)]^N$. Or on a déjà vu que

$$u \longmapsto \frac{1}{2}\int_\Omega A(x)e(u).e(u) - \int_\Omega fu$$

est strictement convexe, sci et coercive. Posons

$$H(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{[\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)]^+\big\}^2 dydx$$

Comme $w \longmapsto (w^+)^2$ est convexe et que H est de la forme

$$w(x,y) \longmapsto \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}(w(x,y)^+)^2 dxdy$$

On en déduit que H est convexe. Montrons que H est sci. Soit (u_n) une suite de $[H_0^1(\Omega)]^N$ qui converge faiblement vers u. Par injection compacte de Rellich, u_n converge fortement vers u dans $[L^4(\Omega)]^N$. Or

$$\int_\Omega |H(u_n)-H(u)|^2 \leq \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}|(u_n(y)-u_n(x)).(y-x)-(u(y)-u(x)).(y-x)|^4 dxdy \leq C\|u_n-u\|^4_{[L^4(\Omega)]^N}$$

On en déduit que $H(u_n) \Rightarrow H(u)$ et donc H est faiblement sci.
Donc le problème de minimisation ci-dessus admet une unique solution u dans $[H_0^1(\Omega)]^N$ caractérisée par l'équation d'Euler $\forall v \in [H_0^1(\Omega)]^N$, $J'(u).v = 0$ c'est à dire

$$\int_\Omega A(x)e(u).e(v) + \int_\Omega \int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\big\}^+\big\{\big(v(y)-v(x)\big).(y-x)\big\}dydx = \int_\Omega fv$$

On a donc la proposition suivante :

Proposition 3 *Si $f \in [L^2(\Omega)]^N$ alors l'équation*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \textit{dans } \Omega \\ \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution u dans $[H_0^1(\Omega)]^N$.

2.2.2 Etude du problème instationnaire

On suppose que $f \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$ et que $u_0 \in [H_0^1(\Omega)]^N$ et on se propose d'étudier le problème d'évolution correspondant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \mathrm{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } Q_T \\ \\ u = u_0 & \text{sur } \Omega \\ \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases} \tag{2.2}$$

Méthode de Galerkin

Nous allons employer une méthode de Galerkin. Soit $\{\varphi_i\}$ une base hilbertienne de $[L^2(\Omega)]^N$ formée des vecteurs propres de l'opérateur de l'élasticité avec condition de Dirichlet. On note $\{\lambda_i\}$ les valeurs propres correspondantes qui forment une suite de nombres positifs qui tend vers $+\infty$. On a donc

$$-\mathrm{div}(A(x)e(\varphi_i)) = \lambda_i \varphi_i$$

Soit $u^m = \sum_{i=1}^m u_i^m(t)\varphi_i$, on a

$$f^m = \sum_{i=1}^m f_i^m(t)\varphi_i \to f \ \text{ fort dans } \ L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$$

$$u_0^m = \sum_{i=1}^m u_{0,i}^m \varphi_i \to u_0 \ \text{ fort dans } \ [L^2(\Omega)]^N$$

Notons $V^m = [\varphi_1, .., \varphi_m]$ le sous-espace vectoriel engendré par les m premiers vecteurs de la base hilbertienne. Dans un premier temps résolvons dans V^m l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t u^m - \mathrm{div}(A(x)e(u^m)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f^m & \text{dans } Q_T \\ \\ u^m = u_0^m & \text{sur } \Omega \\ \\ u^m = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases} \tag{2.3}$$

Multiplions cette équation par φ_k, $\forall 1 \leq k \leq m$ puis intégrons sur Ω, il vient :

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^m \varphi_k + \int_\Omega A(x)e(u^m).e(\varphi_k) - 2\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\big\}^+ \varphi_k(x).(y-x)dydx =$$

$$= \int_\Omega f^m \varphi_k$$

Donc

$$\frac{d}{dt}u_k^m(t)+\lambda_k u_k^m(t)+\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\big\}^+\big\{\big(\varphi_k(y)-\varphi_k(x)\big).(y-x)\big\}dydx = f_k^m(t)$$

Notons $U^m = (u_1^m, ..., u_m^m)$, $U_0^m = (u_{0,1}^m, ..., u_{0,m}^m)$, $F^m = (f_1^m, ..., f_m^m)$.
On pose

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_k)$$

et

$$G(U^m)_k = \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\big\}^+\big\{\big(\varphi_k(y)-\varphi_k(x)\big).(y-x)\big\}dydx$$

On remarque que l'équation précédente est un système d'équations différentielles ordinaires de la forme :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U^m + \Lambda^m U^m + G(U^m) = F^m \\ \hfill U^m(0) = U_0^m \end{cases}$$

Comme Λ^m est une application linéaire et G une fonction continue, on en déduit que $U^m \mapsto F^m - \Lambda^m U^m - G(U^m)$ est une application continue ce qui assure l'existence d'une solution $U^m \in \mathcal{C}^1([0, T(U_0^m)[; \mathbb{R}^m)$ du système d'équations différentielles précédent dans un intervalle de temps dépendant de la donnée initiale. Autrement dit il existe un $u^m \in \mathcal{C}^1([0, T(U_0^m)[; V^m)$ solution de (2.3). Nous démontrerons ultérieurement que $T(U_0^m) = T$.

Estimations d'énergie

Nous allons maintenant effectuer des estimation d'énergie afin de pouvoir passer à la limite dans l'équation quand $m \Rightarrow +\infty$. Pour ce faire multiplions

$$\int_\Omega \partial_t u^m \varphi_k + \int_\Omega A(x)e(u^m).e(\varphi_k) - 2\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\big\}^+ \varphi_k(x).(y-x)dydx =$$

$$= \int_\Omega f^m \varphi_k$$

par u_k^m, sommons pour k allant de 1 à m puis intégrons sur Ω, il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} + \alpha\|e(u^m(t))\|_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big[\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\big]^+\big\}^2 dydx =$$

$$= \big(f^m(t), u^m(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^N}$$

En minorant le premier membre, en appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré et Korn et en se servant du fait que f^m est bornée dans $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$, on trouve que

$$\begin{cases} \|u^m\|^2_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \leq C \\ \\ \|u^m\|_{L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)} \leq C \end{cases}$$

et que $T(U_0^m) = T$ est indépendant de U_0^m.
On multiplie maintenant l'équation par $\partial_t u^m$ puis on intègre sur Ω :

$$\|\partial_t u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big(A(x)e(u^m(t)), e(u^m(t))\big)_{[L^2(\Omega)]^N} + 2\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\big\}^+ \times$$

$$\times\big\{\big(\partial_t u^m(y,t)-\partial_t u^m(x,t)\big).(y-x)\big\}dydx = \big(f(t),\partial_t u^m(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^N} \le \frac{1}{2}\|f(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}+\frac{1}{2}\|\partial_t u^m(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}$$

On intègre ensuite entre 0 et T, il vient

$$\frac{1}{2}\|\partial_t u^m\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}+\frac{\alpha}{2}\|e(u^m(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} \le \frac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}+\frac{\|A\|_{L^\infty(\Omega)^{N^4}}}{2}\|e(u_0)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}+$$

$$+\frac{1}{4}\|\partial_t u^m\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}+C\|u^m\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)}$$

Comme u^m est bornée dans $L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$, on en déduit que

$$\begin{cases} \|\partial_t u^m\|^2_{L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \le C \\ \\ \|e(u^m)\|_{L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^N)} \le C \end{cases}$$

En regroupant toutes les précédentes estimations, on en déduit par compacité faible que

$$\begin{cases} \partial_t u^m \rightharpoonup \partial_t u \quad \text{faible dans } \ L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N) \\ \\ \quad u^m \rightharpoonup u \quad \text{faible* dans } \ L^\infty(0,T;[H^1_0(\Omega)]^N) \end{cases}$$

Par ailleurs, d'après le théorème d'Ascoli,

$$u^m \to u \ \text{ fort dans } \ \mathcal{C}^0([0,T];[L^2(\Omega)]^N)$$

Comme

$$\int_\Omega\Big|\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy-\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy\Big|^2dx \le$$

$$\le C\|u^m(t)-u(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N}$$

Alors

$$\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u^m(y,t)-u^m(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy \to \int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy$$

fort dans $\mathcal{C}^0([0,T];[L^2(\Omega)]^N)$. Donc en passant à la limite dans l'équation au sens des distributions, on démontre l'existence d'une solution $u\in L^\infty(0,T;[H^1_0(\Omega)]^N)$ de l'équation (2.2).

Pour finir, démontrons l'unicité de la solution. On définit l'opérateur B par :

$$B : L^2(0,T;[H^1_0(\Omega)]^N) \Rightarrow L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^N)$$

$$v \longmapsto -\mathrm{div}(A(x)e(v)) - 2\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(v(y)-v(x)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy$$

On a déjà vu que B était un opérateur strictement monotone. Nous sommes donc maintenant en mesure de démontrer l'unicité de la solution. A cet effet, prenons u et $\bar{u}$ deux solutions de (2.2). Donc $u-\bar{u}$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t(u-\bar{u})+Bu-B\bar{u}=0 & \text{dans } \ Q_T \\ (u-\bar{u})(0)=0 & \text{dans } \ \Omega \\ u-\bar{u}=0 & \text{dans } \ \partial\Omega\times]0,T[\end{cases}$$

Par estimation d'énergie, on trouve que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)-\bar{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} = -\langle Bu(t)-B\bar{u}(u),u(t)-\bar{u}(t)\rangle_{H^{-1},H^1_0} \le 0$$

donc

$$\|u(t)-\bar{u}(t)\|_{[L^2(\Omega)]^N} \le 0$$

et donc $u=\bar{u}$.
Finalement nous avons démontré le résultat suivant

Proposition 4 *On suppose que $f \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$ et que $u_0 \in [H_0^1(\Omega)]^N$, alors l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(A(x)e(u)) - \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \textit{dans } Q_T \\ u = u_0 & \textit{sur } \Omega \\ u = 0 & \textit{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases}$$

admet une unique solution u dans $L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \cap H^1(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$.

2.3 Fibres cassantes

2.3.1 Etude du problème stationnaire

Nous allons supposer que $w \in L^2(\Omega)$ et $f \in [L^2(\Omega)]^N$. nous allons nous intéresser à l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\Delta\beta + \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + d = w & \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta(x)+\beta(y)\big)\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } \Omega \\ d(x) \in \partial I(\beta(x)) & \text{p.p. } x \in \Omega \\ u = \beta = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

Méthode de point fixe

Nous nous proposons de résoudre ce système d'équation couplé par une méthode de point fixe. Pour ce faire, on se donne un couple $(u^0,\beta^0) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times H_0^1(\Omega,[0,1])$ et on définit la suite (u^n,β^n) par :

$$\begin{cases} -\Delta\beta^{n+1} + \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u^n(y)-u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + d^{n+1} = w & \text{dans } \Omega \\ -\operatorname{div}(A(x)e(u^{n+1})) - & \\ \quad -2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^n(x)+\beta^n(y)\big)\{\big(u^{n+1}(y)-u^{n+1}(x)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } \Omega \\ d^{n+1}(x) \in \partial I(\beta^{n+1}(x)) & \text{p.p. } x \in \Omega \\ u^{n+1} = \beta^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Montrons tout d'abord que cette suite est bien définie. Ecrivons la formulation variationnelle de ce problème. $\forall (v,\gamma) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times H_0^1(\Omega,[0,1])$, on a

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla\beta^{n+1}.(\nabla\gamma - \nabla\beta^{n+1}) + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\gamma(x)-\beta^{n+1}(x)\big)\{[\big(u^n(y)-u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dydx + \\ + \displaystyle\int_\Omega d^{n+1}(\gamma-\beta^{n+1}) = \int_\Omega w(\gamma-\beta^{n+1}) \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)e(u^{n+1})e(v) + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^n(x)+\beta^n(y)\big)\{\big(u^{n+1}(y)-u^{n+1}(x)\big).(y-x)\}^+ \times \\ \times\{\big(v(y)-v(x)\big).(y-x)\}dydx = \displaystyle\int_\Omega fv \end{cases}$$

Ces deux équations étant à présent découplées, on peut les résoudre indépendamment. Tout d'abord nous allons montrer que $\forall \gamma \in H_0^1(\Omega,[0,1])$, $\exists! \beta^{n+1} \in H_0^1(\Omega,[0,1])$ vérifiant la première équation. On remarque qu'il s'agit de l'inéquation d'Euler du problème de minimisation

$$\min_{\beta \in H_0^1(\Omega,[0,1])} J(\beta)$$

avec

$$J(\beta) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla \beta|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta(y)+\beta(x)\big)\{[\big(u^n(y)-u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dydx - \int_\Omega w\beta$$

car $\forall \gamma \in H_0^1(\Omega,[0,1])$

$$\int_\Omega d^{n+1}(\gamma - \beta^{n+1}) \leq 0$$

Comme $H_0^1(\Omega,[0,1])$ est un ensemble convexe, fermé, non vide et que J est une fonctionnelle strictement convexe, sci et coercive, le problème de minimisation ci-dessus admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega,[0,1])$. Par ailleurs, J étant Gâteau-différentiable, l'unique solution notée β^{n+1} est caractérisée par l'équation d'Euler $\forall \gamma \in H_0^1(\Omega,[0,1])$,

$$\int_\Omega \nabla\beta^{n+1}.\nabla\gamma + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\gamma(y)+\gamma(x)\big)\{[\big(u^n(y)-u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dydx + \int_\Omega d^{n+1}\gamma = \int_\Omega w\gamma$$

Où $d^{n+1}(x) \in \partial I(\beta^{n+1}(x))$ pp.

Comme dans la deuxième équation, β^n est fixé, on démontre en utilisant exactement les mêmes arguments que dans la partie stationnaire de la section précédente que $\forall v \in [H_0^1(\Omega)]^N$, $\exists! u^{n+1} \in [H_0^1(\Omega)]^N$ tel que

$$\int_\Omega A(x)e(u^{n+1})e(v) + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^n(x)+\beta^n(y)\big)\{\big(u^{n+1}(y)-u^{n+1}(x)\big).(y-x)\}^+\{\big(v(y)-v(x)\big).(y-x)\}dydx =$$

$$= \int_\Omega fv$$

On a donc démontré que la suite (u^n,β^n) était bien définie dans $[H_0^1(\Omega)]^N \times H_0^1(\Omega,[0,1])$

Estimations à priori

On voudrait maintenant démontrer l'existence d'un point fixe qui, s'il existe sera solution du problème (2.4). A cet effet, nous aimerions passer à la limite dans les équations. Nous allons donc effectuer des estimations à priori. Dans la formulation variationnelle, posons $\gamma = \beta^{n+1}$ et $v = u^{n+1}$, il vient :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla\beta^{n+1}|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^{n+1}(y)+\beta^{n+1}(x)\big)\{[\big(u^n(y)-u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dydx + \\ \displaystyle + \int_\Omega d^{n+1}\beta^{n+1} = \int_\Omega w\beta^{n+1} \\ \displaystyle\int_\Omega A(x)e(u^{n+1})e(u^{n+1}) + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^n(x)+\beta^n(y)\big)\{[\big(u^{n+1}(y)-u^{n+1}(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dydx \\ \displaystyle = \int_\Omega fu^{n+1} \end{cases}$$

Comme $d^{n+1} \in \partial I(\beta^{n+1})$ on en déduit que $\forall \gamma \in H_0^1(\Omega,[0,1])$,

$$\int_\Omega d^{n+1}(\gamma - \beta^{n+1}) \leq 0$$

En particulier pour $\gamma = 0$, il vient
$$\int_\Omega d^{n+1}\beta^{n+1} \geq 0$$
Et comme d'autre part les doubles intégrales sont positives, on trouve après application des inégalités de Cauchy-Schwarz Poincaré et Korn que (u^n, β^n) est borné dans $[H_0^1(\Omega)]^N \times H_0^1(\Omega)$ On peut donc extraire des sous-suites telles que
$$\begin{cases} \beta^n \rightharpoonup \beta & \text{faible dans } H_0^1(\Omega) \\ \\ u^n \rightharpoonup u & \text{faible dans } [H_0^1(\Omega)]^N \end{cases}$$
Comme $H_0^1(\Omega, [0,1])$ est fortement fermé et convexe, il est faiblement fermé et donc $\beta \in H_0^1(\Omega, [0,1])$ Par injection compacte de Rellich, on en déduit que
$$\begin{cases} \beta^n \Rightarrow \beta & \text{fort dans } L^2(\Omega) \\ \\ u^n \Rightarrow u & \text{fort dans } [L^2(\Omega)]^N \end{cases}$$
et donc
$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u^n(y) - u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dy \\ \displaystyle\to \int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y) - u(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dy \\ \\ \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^n(x) + \beta^n(y)\big)\{\big(u^{n+1}(y) - u^{n+1}(x)\big).(y-x)\}^+ dy \\ \displaystyle\to \int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta(x) + \beta(y)\big)\{\big(u(y) - u(x)\big).(y-x)\}^+ dy \end{cases}$$
fortement dans $L^2(\Omega)$.
$$\int_\Omega \nabla\beta^{n+1}.(\nabla\gamma - \nabla\beta^{n+1}) + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\gamma(x) - \beta^{n+1}(x)\big)\{[\big(u^n(y) - u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dydx +$$
$$-\int_\Omega w(\gamma - \beta^{n+1}) \geq 0$$
D'après les convergences obtenues précédemment on a par passage à la limite sup, en tenant compte de la semi-continuité inférieure pour la topologie faible de la norme H_0^1
$$\int_\Omega \nabla\beta.(\nabla\gamma - \nabla\beta) + \int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\gamma(x) - \beta(x)\big)\{[\big(u^n(y) - u^n(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dydx +$$
$$-\int_\Omega w(\gamma - \beta) \geq 0$$
et donc il existe un $d \in L^2(\Omega)$ tel que $d(x) \in \partial I(\beta(x))$ p.p. et
$$-\Delta\beta + \int_\Omega \{[\big(u(y) - u(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + d = w$$
Par passage à la limite dans l'équation, on a démontré la proposition suivante

Proposition 5 *On suppose que $f \in [L^2(\Omega)]^N$ et que $w \in L^2(\Omega)$, alors l'équation*

$$\begin{cases} -\Delta\beta + \displaystyle\int_\Omega \{[\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + d = w & \textit{dans } \Omega \\ -\mathrm{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega \big(\beta(x)+\beta(y)\big)\{\big(u(y)-u(x)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \textit{dans } \Omega \\ u=\beta=0 & \textit{sur } \partial\Omega \\ d(x)\in\partial I(\beta(x)) & \textit{p.p. } x\in\Omega \end{cases}$$

admet une solution $(u,\beta) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times H_0^1(\Omega;[0,1])$

2.3.2 Etude du problème instationnaire

Nous voulons étudier le système d'équation aux dérivées partielles d'évolution couplé suivant :

$$\begin{cases} \partial_t\beta - \Delta\beta + \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + d = w & \text{dans } Q_T \\ -\mathrm{div}(A(x)e(u)) - 2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta(x,t)+\beta(y,t)\big)\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } Q_T \\ \beta(0)=\beta_0 & \text{sur } \Omega \\ u=\beta=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ d(x,t)\in\partial I(\beta(x,t)) & \text{p.p. } (x,t)\in Q_T \end{cases}$$

Pour ce faire nous allons supposer que $w \in L^2(Q_T)$, $f \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$, $\beta_0 \in H_0^1(\Omega,[0,1])$.

Méthode de point fixe

Tout comme dans la partie stationnaire, nous allons employer une méthode point fixe. A cet effet, nous nous donnons le couple $(u^0,\beta^0) \in L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega,[0,1]))$ et on définit la suite de fonction (u^n,β^n) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \partial_t\beta^{n+1} - \Delta\beta^{n+1} + \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u^n(y,t)-u^n(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + d^{n+1} = w & \text{dans } Q_T \\ -\mathrm{div}(A(x)e(u^{n+1})) - & \\ -2\displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^n(x,t)+\beta^n(y,t)\big)\{\big(u^{n+1}(y,t)-u^{n+1}(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f & \text{dans } Q_T \\ \beta^{n+1}=\beta_0 & \text{sur } \Omega \\ d^{n+1}(x,t)\in\partial I(\beta^{n+1}(x,t)) & \text{p.p. } (x,t)\in Q_T \\ u^{n+1}=\beta^{n+1}=0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases}$$

Ces deux équations sont maintenant découplées. Nous allons commencer par démontrer que la suite (u^n,β^n) est bien définie. Pour ce faire nous allons montrer qu'à chaque itération, chacune des deux équations admettent une solution. Tout comme dans la partie stationnaire, on démontre que la deuxième équation admet une solution $u^{n+1} \in L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)$. Il s'agit donc maintenant de montrer que la première équation est bien posée. Le terme faisant intervenir β^n étant donné par l'itération précédente, celui-ci devient un second membre. On est donc ramené à étudier une équation du type :

$$\begin{cases} \partial_t\beta - \Delta\beta + d = g & \text{dans } Q_T \\ \beta = \beta_0 & \text{sur } \Omega \\ \beta = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ d(x,t) \in \partial I(\beta(x,t)) & \text{p.p. } (x,t) \in Q_T \end{cases} \tag{2.5}$$

avec $g \in L^2(Q_T)$.

Démonstration de l'existence de la solution du problème (2.5)

Nous allons remplacer le véritable problème par un problème approché en introduisant à la place de I la fonction I_n définie par

$$I_n(\beta) = \begin{cases} n|\beta|^4 & \text{si} \quad \beta \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \\ n(\beta-1)^4 & \text{si} \quad \beta \geq 1 \end{cases}$$

I_n est une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^3$ et on a

$$\partial I_n(\beta) = DI_n(\beta) = \begin{cases} 4n\beta^3 & \text{si} \quad \beta \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq \beta \leq 1 \\ 4n(\beta-1)^3 & \text{si} \quad \beta \geq 1 \end{cases}$$

Méthode de Galerkin pour la résolution du problème approché

Nous allons employer une méthode de Galerkin afin de démontrer que l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\beta - \Delta\beta + DI_n(\beta) = g & \text{dans } Q_T \\ \beta = \beta_0 & \text{sur } \Omega \\ \beta = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases} \tag{2.6}$$

admet une solution.
Soit $\{\varphi_k\}$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée des vecteurs propres du Laplacien avec condition de Dirichlet. On note λ_k les valeurs propres correspondantes qui forment une suite de nombres positifs qui tend vers $+\infty$. On pose $\beta^m = \sum_{k=1}^m \beta_k^m(t)\varphi_k$.
On a aussi

$$g^m = \sum_{k=1}^m g_k^m(t)\varphi_k \to g \ \text{ fort dans } L^2(Q_T)$$

$$\beta_0^m = \sum_{k=1}^m \beta_{k,0}^m\varphi_k \to \beta_0 \ \text{ fort dans } L^2(\Omega)$$

Notons $V^m = [\varphi_1, .., \varphi_m]$ le sous-espace vectoriel de dimension fini engendré par les m premiers vecteurs de la base hilbertienne. Regardons dans V^m l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\beta^m - \Delta\beta^m + DI_n(\beta^m) = g^m & \text{dans } Q_T \\ \beta^m = \beta_0^m & \text{sur } \Omega \\ \beta^m = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[\end{cases} \tag{2.7}$$

Multiplions cette équation par φ_k, $\forall 1 \leq k \leq m$ puis intégrons sur Ω, il vient

$$\frac{d}{dt}\beta_k^m(t) + \lambda_k \beta_k^m + \int_\Omega DI_n(\beta^m)\varphi_k = g_k$$

Posons $B^m = (\beta_1^m, ..., \beta_m^m)$, $G^m = (g_1^m, ..., g_m^m)$, $B_0^m = (\beta_{0,1}^m, ..., \beta_{0,m}^m)$. Notons aussi $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_k)$ et $F^m(B^m) = \Big(\int_\Omega DI_n(\beta^m)\varphi_k\Big)_k$. On est ramené à résoudre l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\frac{dB^m}{dt} + \Lambda B^m + F^m(B^m) = G^m$$

avec $B^m(0) = B_0^m$.
Λ est une application linéaire et comme DI_n est de classe $\mathcal{C}^2$, on en déduit en particulier que

$$B^m \longmapsto G^m - \Lambda B^m - F^m(B^m)$$

est continue ce qui assure l'existence d'une solution $B^m \in \mathcal{C}^1([0, T(B_0^m)[; \mathbb{R}^m)$ de cette équation différentielle dans un intervalle de temps dépendant de la donnée initiale. Autrement dit, $\exists \beta^m \in \mathcal{C}^1([0, T(B_0^m)[; V^m)$ solution de (2.7).

Estimations d'énergie et passage à la limite en m

Nous allons maintenant effectuer des estimations d'énergie afin de pouvoir passer à la limite en m. Multiplions (2.7) par β^m puis intégrons sur Ω.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\beta^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla\beta^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \big(DI_n(\beta^m(t)), \beta^m(t)\big)_{L^2(\Omega)} = (g(t), \beta^m(t))_{L^2(\Omega)}$$

Or on remarque que $\big(DI_n(\beta^m(t)), \beta^m(t)\big)_{L^2(\Omega)} \geq 0$. Donc des calculs classiques montrent que $T(B_0^m) = T$ et que β^m est borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ et donc on peut extraire une sous-suite telle que

$$\beta^m \rightharpoonup \beta_n \;\text{ faible dans }\; L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$$

Par ailleurs,

$$\|DI_n(\beta^m(t))\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|\beta^m(t)\|^2_{L^6(\Omega)} \leq C$$

donc

$$\|DI_n(\beta^m)\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C$$

On peut donc extraire une sous-suite telle que

$$DI_n(\beta^m) \rightharpoonup Y_n \;\text{ faible dans }\; L^2(Q_T)$$

On voudrait montrer que $Y_n = DI_n(\beta_n)$. Il s'agit de démontrer que

$$\limsup_{m\to+\infty} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DI_n(\beta^m)\beta^m \leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega Y_n \beta_n$$

β^m est solution de (2.7) et donc par passage à la limite en m, on en déduit que β_n vérifie l'équation

$$\begin{cases} \partial_t\beta_n - \Delta\beta_n + Y_n = g & \text{dans } \; Q_T \\ \beta_n = \beta_0 & \text{sur } \; \Omega \\ \beta_n = 0 & \text{sur } \; \partial\Omega \times]0, T[\end{cases}$$

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega DI_n(\beta^m)\beta^m = \int_0^T \int_0^t \int_\Omega g^m\beta^m - \int_0^T \int_0^t \int_\Omega |\nabla\beta^m|^2 - \frac{1}{2}\int_0^T \Big(\|\beta^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\beta_0^m\|^2_{L^2(\Omega)}\Big)dt$$

Comme $g^m \to g$ fort dans $L^2(Q_T)$ et $\beta^m \rightharpoonup \beta_n$ faible dans $L^2(Q_T)$, on en déduit que

$$\int_0^T \int_0^t \int_\Omega g^m \beta^m \to \int_0^T \int_0^t \int_\Omega g\beta_n$$

Par semi continuité inférieure pour la topologie faible de la norme H_0^1 on a

$$\limsup - \int_0^T \int_0^t \int_\Omega |\nabla \beta^m|^2 = - \liminf \int_0^T \int_0^t \int_\Omega |\nabla \beta^m|^2 \leq - \int_0^T \int_0^t \int_\Omega |\nabla \beta_n|^2$$

Comme $\beta_0^m \to \beta_0$ fort dans $L^2(\Omega)$ et comme la norme L^2 est semi continue inférieurement pour la topologie faible, il vient

$$\limsup -\frac{1}{2} \int_0^T \Big(\|\beta^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\beta_0^m\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) dt \leq -\frac{1}{2} \int_0^T \Big(\|\beta_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} - \|\beta_0\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) dt$$

soit en regroupant tous les résultats et en se servant des équations, on constate effectivement que

$$\limsup_{m \to +\infty} \int_0^T \int_0^t \int_\Omega DI_n(\beta^m)\beta^m \leq \int_0^T \int_0^t \int_\Omega Y_n \beta_n$$

et donc $Y_n = DI_n(\beta_n)$ On a donc montré l'existence d'une solution $\beta_n \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ de l'équation (2.6).

Estimations d'énergie et retour au problème (2.5)

Les mêmes estimations d'énergie que précédemment montrent que

$$\beta_n \rightharpoonup \beta \text{ faible dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

Multiplions maintenant équation par $\partial_t \beta_n$ puis intègrons sur Ω, il vient

$$\|\partial_t \beta_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla \beta_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{d}{dt}\int_\Omega I_n(\beta_n(t)) = (g(t), \partial_t \beta_n(t))_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|g(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\partial_t \beta_n(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Après intégration en temps on en déduit que

$$\begin{cases} \|\partial_t \beta_n\|_{L^2(Q_T)} \leq C \\ \|\nabla \beta_n\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \end{cases}$$

et donc par compacité faible on a

$$\begin{cases} \partial_t \beta_n \rightharpoonup \partial_t \beta & \text{faible dans } L^2(Q_T) \\ \beta_n \rightharpoonup \beta & \text{faible dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \end{cases}$$

D'après le théorème d'Ascoli

$$\beta_n \Rightarrow \beta \text{ fort dans } \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))$$

Par ailleurs, la caractérisation au premier ordre de la convexité de I_n nous dit que $\forall \gamma \in H_0^1(\Omega)$

$$I_n(\gamma) \geq I_n(\beta_n) + \big(DI_n(\beta_n), \gamma - \beta_n\big)_{L^2(Q_T)} \geq \big(DI_n(\beta_n), \gamma - \beta_n\big)_{L^2(Q_T)}$$

Si l'on choisit $\gamma \in H_0^1(\Omega,[0,1])$, on obtient

$$\big(DI_n(\beta_n), \gamma - \beta_n\big)_{L^2(Q_T)} \leq 0$$

Multiplions l'équation (2.6) par $\gamma - \beta_n$, où $\gamma \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;[0,1]))$ puis intègrons sur Q_T, il vient

$$\int_{Q_T} g(\gamma - \beta_n) - \int_{Q_T} \partial_t \beta_n (\gamma - \beta_n) - \int_{Q_T} \nabla \beta_n . (\nabla \gamma - \nabla \beta_n) \leq 0$$

Les convergences établies précédemment impliquent après passage à la limite que

$$\int_{Q_T} g(\gamma - \beta) - \int_{Q_T} \partial_t \beta (\gamma - \beta) - \int_{Q_T} \nabla \beta . (\nabla \gamma - \nabla \beta) \leq 0$$

On en déduit qu'il existe un $d \in L^2(Q_T)$ tel que $d(x,t) \in \partial I(\beta(x,t))$ p.p. $(x,t) \in Q_T$ avec

$$\partial_t \beta - \Delta \beta + d = g$$

Ceci achève de montrer l'existence d'une solution $\beta \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega,[0,1]))$ de l'équation (2.5). Et donc la suite (u^n, β^n) est bien définie dans $L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \times L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Nous allons maintenant montrer l'existence d'un point fixe. On voudrait à présent passer à la limite dans les équations suivantes

$$\begin{cases} \partial_t \beta^{n+1} - \Delta \beta^{n+1} + \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|} \{[\big(u^n(y,t) - u^n(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2 dy + d^{n+1} = w & \text{dans } Q_T \\ -\text{div}(A(x)e(u^{n+1})) - & \\ -2 \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|} \big(\beta^n(x,t) + \beta^n(y,t)\big) \{\big(u^{n+1}(y,t) - u^{n+1}(x,t)\big).(y-x)\}^+ (y-x) dy = f & \text{dans } Q_T \\ \beta^{n+1}(0) = \beta_0 & \text{sur } \Omega \\ d^{n+1} \in \partial I(\beta^{n+1}) & \\ u^{n+1} = \beta^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0,T[\end{cases}$$

Estimations d'énergie

Afin de démontrer l'existence d'un point fixe solution de l'équation de départ, nous allons effectuer des estimations d'énergie, pour cela nous allons multiplier la première équation par β^{n+1}, la deuxième par u^{n+1} puis intégrer sur Ω.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dt} \|\beta^{n+1}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega \int_\Omega e^{-k|y-x|} \big(\beta^{n+1}(x,t) + \beta^{n+1}(y,t)\big) \{[\big(u^n(y,t) - u^n(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2 dy dx \\ + \|\nabla \beta^{n+1}(t)\|^2_{[L^2(\Omega]^N} + \big(d^{n+1}(t), \beta^{n+1}(t)\big)_{L^2(\Omega)} = \big(w(t), \beta^{n+1}(t)\big)_{L^2(\Omega)} \\ \alpha \|e(u^{n+1}(t))\|^2_{[L^2(\Omega)]^{N^2}} + \displaystyle\int_\Omega \int_\Omega e^{-k|y-x|} \big(\beta^n(x,t) + \beta^n(y,t)\big) \{[\big(u^{n+1}(y,t) - u^{n+1}(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2 dy dx \\ = \big(f(t), u^{n+1}(t)\big)_{[L^2(\Omega)]^N} \end{cases}$$

Comme $\big(d^{n+1}(t), \beta^{n+1}(t)\big)_{L^2(\Omega)} \geq 0$, et comme les intégrales doubles sont positives, on trouve en minorant les premiers membres et en appliquant les inégalités de Cauchy-Schwarz, Poincaré et Korn que β^n est bornée dans $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N)$ et que u^n est bornée dans $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. On peut donc extraire des sous-suites telles que

$$\begin{cases} \beta^n \rightharpoonup \beta & \text{faible dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u^n \rightharpoonup u & \text{faible dans } L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \end{cases}$$

Lemme 4 *Si $d(x,t) \in \partial I(\beta(x,t))$ p.p. $(x,t) \in Q_T$, alors*

$$\int_{Q_T} d(x,t)\partial_t\beta(x,t)dxdt = 0.$$

Démonstration. $\forall \gamma \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega;[0,1]))$, on a

$$\int_{Q_T} d(x,t)(\gamma(x,t) - \beta(x,t))dxdt \leq 0$$

Prenons $\gamma(x,t) = \beta(x,t+h)$, avec $h \neq 0$. On a alors après division par h,

$$\begin{cases} \int_{Q_T} d(x,t)\frac{\beta(x,t+h)-\beta(x,t)}{h}dxdt \leq 0 \quad si\ h > 0 \\ \int_{Q_T} d(x,t)\frac{\beta(x,t+h)-\beta(x,t)}{h}dxdt \geq 0 \quad si\ h < 0 \end{cases}$$

Donc par passage à la limite quand $h \to 0$, on en déduit que

$$\int_{Q_T} d(x,t)\partial_t\beta(x,t)dxdt = 0$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Multiplions maintenant la première équation par $\partial_t\beta^{n+1}$. En se servant de ce lemme, il vient

$$\|\partial_t\beta^{n+1}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\beta^{n+1}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} +$$

$$+\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\partial_t\beta^{n+1}(x,t)\{[\big(u^n(y,t) - u^n(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2dydx =$$

$$= \big(w(t), \partial_t\beta^{n+1}(t)\big)_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\|w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\partial_t\beta^{n+1}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

On intègre entre 0 et T

$$\frac{1}{2}\|\partial_t\beta^{n+1}\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2}\|\nabla\beta^{n+1}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(Q_T)} + \frac{1}{2}\|\nabla\beta_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\|\partial_t\beta^{n+1}\|^2_{L^2(Q_T)} + C\|u^n\|^2_{L^2(0,T;[L^4(\Omega)]^N)}$$

Comme u^n est bornée dans $L^2(0,T;[L^4(\Omega)]^N$ (par injection de Sobolev), on en déduit que

$$\begin{cases} \|\partial_t\beta^{n+1}\|^2_{L^2(Q_T)} \leq C \\ \|\beta^{n+1}\|^2_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} \leq C \end{cases}$$

Par compacité faible, il vient

$$\begin{cases} \partial_t\beta^{n+1} \rightharpoonup \partial_t\beta \quad \text{faible dans } L^2(Q_T) \\ \beta^{n+1} \rightharpoonup \beta \quad \text{faible dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \end{cases}$$

D'après le théorème d'Ascoli, on en déduit que

$$\beta^n \to \beta \text{ fort dans } \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))$$

Et donc
$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u^n(y,t)-u^n(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2dy \\ \qquad \displaystyle\to \int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2dy \\ \\ \displaystyle\int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta^n(x,t)+\beta^n(y,t)\big)\{\big(u^{n+1}(y,t)-u^{n+1}(x,t)\big).(y-x)\}^+dy \\ \qquad \displaystyle\to \int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta(x,t)+\beta(y,t)\big)\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+dy \end{cases}$$
Comme $d^{n+1}(x,t) \in \partial I(\beta^{n+1}(x,t))$ p.p. $(x,t) \in Q_T$, $\forall \gamma \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ avec $0 \leq \gamma \leq 1$, on a
$$\big(d^{n+1}, \gamma - \beta^{n+1}\big)_{L^2(Q_T)} \leq 0$$
Multiplions la première équation par $\gamma - \beta^{n+1}$, $\forall \gamma \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, on en déduit que
$$(w, \gamma-\beta^{n+1})_{L^2(Q_T)} - (\partial_t \beta^{n+1}, \gamma-\beta^{n+1})_{L^2(Q_T)} - (\nabla\beta^{n+1}, \nabla\gamma - \nabla\beta^{n+1})_{L^2(Q_T)} -$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u^n(y,t)-u^n(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2(\gamma(x,t)-\beta^{n+1}(x,t))dydxdt \leq 0$$
D'après les convergences établies ci-dessus, on a par passage à la limite que
$$(w, \gamma-\beta)_{L^2(Q_T)} - (\partial_t \beta, \gamma-\beta)_{L^2(Q_T)} - (\nabla\beta, \nabla\gamma - \nabla\beta)_{L^2(Q_T)} -$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2(\gamma(x,t)-\beta(x,t))dydxdt \leq 0$$
Et donc il existe un $d \in L^2(Q_T)$ tel que $d(x,t) \in \partial I(\beta(x,t))$ p.p. $(x,t) \in Q_T$ avec
$$\partial_t\beta - \Delta\beta + \int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2dy + d = w$$
On a donc démontré la proposition suivante :

Proposition 6 *Supposons que $w \in L^2(Q_T)$, $f \in L^2(0,T;[L^2(\Omega)]^N)$ et $\beta_0 \in H_0^1(\Omega,[0,1])$ alors le système d'équation couplé suivant*
$$\begin{cases} \displaystyle\partial_t\beta - \Delta\beta + \int_\Omega e^{-k|y-x|}\{[\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)]^+\}^2dy + d = w \quad \textit{dans } Q_T \\ \displaystyle-\mathrm{div}(A(x)e(u)) - \int_\Omega e^{-k|y-x|}\big(\beta(x,t)+\beta(y,t)\big)\{\big(u(y,t)-u(x,t)\big).(y-x)\}^+(y-x)dy = f \quad \textit{dans } Q_T \\ u = \beta = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega\times]0,T[\\ \beta = \beta_0 \quad \textit{sur } \Omega \\ d(x,t) \in \partial I(\beta(x,t) \quad \textit{p.p. } (x,t) \in Q_T \end{cases}$$
admet des solutions (u,β) dans $L^\infty(0,T;[H_0^1(\Omega)]^N) \cap L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega))$ avec $0 \leq \beta(x,t) \leq 1$ p.p. $(x,t) \in Q_T$.

Conclusion

Il s'agit pour conclure de savoir si l'aboutissement de ce stage correspond effectivement aux attentes que nous nous étions fixées à priori. Nous avons pu, sans conteste, utiliser et mettre en oeuvre un grand nombre de notions enseignées en formation d'ingénieur en Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique, ainsi qu'en DEA d'Analyse Numérique. En effet, l'utilisation de techniques de résolution d'équations elliptiques et paraboliques nous ont permis d'établir des résultats d'existence et d'unicité - parfois seulement d'existence - de problèmes concrets provenants de la mécanique du solide. Les méthodes variationelles basées sur la minimisation d'une fonctionnelle strictement convexe, sci et coercive sur un ensemble convexe, fermé, non vide étaient au coeur de l'étude des problèmes stationnaires. On pourrait considérer avoir complètement occulté l'aspect numérique au profit de l'aspect théorique des équations aux dérivées partielles. Cependant, celui-ci n'a pas été négligé dans la mesure où avons mis en oeuvre des méthode de Galerkin qui sont à la base des méthodes numériques d'éléments finis, afin d'aborder les problèmes d'évolution. Seule manquait à ce stage la production d'un code informatique qui nous aurait permis de visualiser la simulation numérique du comportement des divers matériaux étudiés. Par soucis de qualité, nous avons préféré nous restreindre à un travail certe moins large, mais plus approfondi.

Par ailleurs, l'objet de ce stage était aussi de découvrir la vie au sein d'un laboratoire de recherche. Nous avons pu constater combien le travail de recherche en mathématiques appliquées pouvait être difficile mais pas moins passionnant. Aussi cela nous a-t-il poussé à aller plus loin dans cette découverte en poursuivant une thèse. Tout ceci prouve que ce stage s'est avéré être parvenu à ses fins tant en domaine scientifique que professionnel car il a permis de mettre en place un projet personnel pour l'avenir, ce qui était certainement le but premier de ce stage.

Bibliographie

[1] D. Blanchard, G. Francfort : *Study of a doubly nonlinear heat equation with no growth assumptions on the parabolic term.*

[2] G. Bonfanti, M. Frémond, F. Luterotti : *Global solution to a nonlinear system for irreversible phase change.*

[3] H. Brézis : *Analyse fonctionnelle. Théorie et application*, Masson.

[4] M. Briane, G. Pagès : *Théorie de l'intégration*, Vuibert.

[5] P.G. Ciarlet : *Mathematical elasticity, Vol. I : Three dimensionnal elasticity*, North Holland.

[6] G. Duvaut, J-L. Lions : *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod.

[7] I. Ekeland, R. Temam : *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod-Gauthier-Villars.

[8] G. Francfort, F. Murat, L. Tartar : *Monotone operators in* div*ergence form with x-dependance multivalued graphs.*

[9] M. Frémond : *Non-Smooth Thermo-Mecanics*, Springer.

[10] J. Nečas : *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson.

[11] P-A. Raviart, J-M. Thomas : *Introduction à l'analyse des équations aux dérivées partielles*, Dunod.