

Grandes cartes aléatoires

Jean-François Le Gall

Université Paris-Sud Orsay et Institut universitaire de France

Deuxième Séminaire Itzykson
Gravité quantique et cartes aléatoires
IHÉS, 8 février 2013

Objectifs

Comprendre la géométrie d'une grande carte plane choisie au hasard dans une classe convenable :

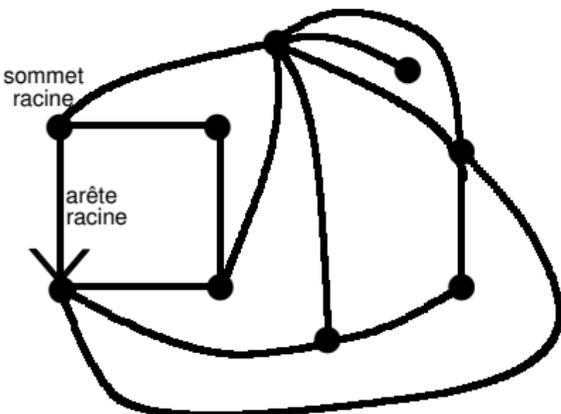
- Montrer que, indépendamment de la classe choisie, la (grande) carte est proche d'un objet continu **universel**, la **carte brownienne**.
- Donner une construction directe de la carte brownienne à partir d'objets "plus simples" (dont l'**arbre brownien**)
- Analyser les **propriétés géométriques** de la carte brownienne (topologie, dimension, géodésiques, etc.)
- En déduire des **propriétés asymptotiques** des grandes cartes discrètes typiques.

Motivation principale : modèle "canonique" de **géométrie aléatoire** (cf liens avec la gravité quantique en dimension deux).

1. Introduction: Cartes planaires

Définition

Une **carte planaire** est un plongement propre d'un graphe connexe fini dans la sphère de dimension deux \mathbb{S}^2 (considéré à homéomorphisme préservant l'orientation près).



Une quadrangulation
enracinée à 7 faces

Faces = composantes connexes
du complémentaire des arêtes

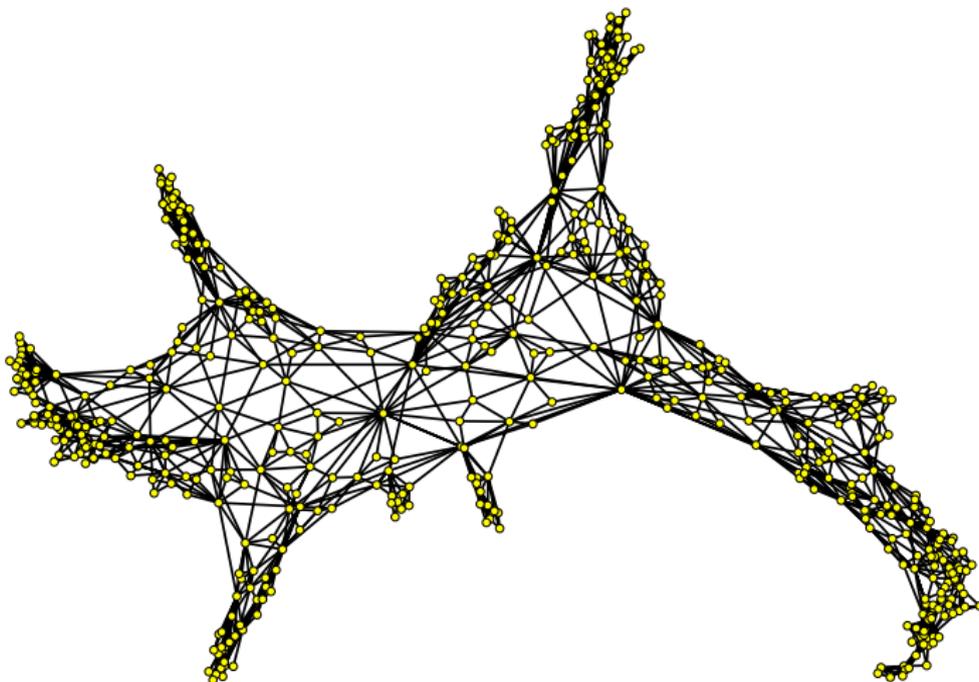
p -angulation:

- chaque face a p arêtes adjacentes

$p = 3$: triangulation

$p = 4$: quadrangulation

carte **enracinée** : arête orientée distinguée



Une grande triangulation de la sphère (simulation par G. Schaeffer)
Peut-on trouver un modèle continu correspondant à ces grands objets ?

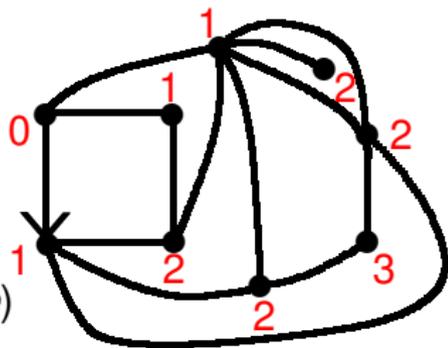
Que signifie la limite continue ?

M carte planaire

- $V(M)$ = ensemble des sommets de M
- d_{gr} **distance de graphe** sur $V(M)$
- $(V(M), d_{\text{gr}})$ est un **espace métrique** (fini)

$\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations avec } n \text{ faces}\}$
(modulo les homéomorphismes de la sphère)

\mathbb{M}_n^p est un ensemble fini



Objectif

Soit M_n choisie uniformément au hasard dans \mathbb{M}_n^p . Pour un $a > 0$,

$$(V(M_n), n^{-a} d_{\text{gr}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{“espace limite continu”}$$

au sens de la distance de **Gromov-Hausdorff**.

Remarques.

- Il faut **changer d'échelle** la distance d_{gr} pour une limite **compacte**.
- On pense que la limite ne dépend pas de p (**universalité**).

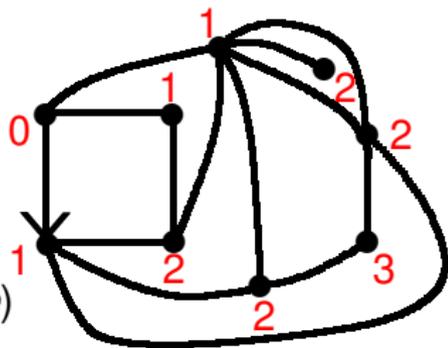
Que signifie la limite continue ?

M carte planaire

- $V(M)$ = ensemble des sommets de M
- d_{gr} distance de graphe sur $V(M)$
- $(V(M), d_{gr})$ est un espace métrique (fini)

$\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations avec } n \text{ faces}\}$
(modulo les homéomorphismes de la sphère)

\mathbb{M}_n^p est un ensemble fini



Objectif

Soit M_n choisie uniformément au hasard dans \mathbb{M}_n^p . Pour un $a > 0$,

$$(V(M_n), n^{-a} d_{gr}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{“espace limite continu”}$$

au sens de la distance de **Gromov-Hausdorff**.

Remarques.

- Il faut **changer d'échelle** la distance d_{gr} pour une limite **compacte**.
- On pense que la limite ne dépend pas de p (**universalité**).

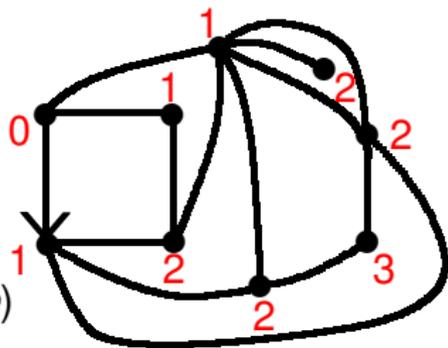
Que signifie la limite continue ?

M carte planaire

- $V(M)$ = ensemble des sommets de M
- d_{gr} **distance de graphe** sur $V(M)$
- $(V(M), d_{\text{gr}})$ est un **espace métrique** (fini)

$\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations avec } n \text{ faces}\}$
(modulo les homéomorphismes de la sphère)

\mathbb{M}_n^p est un ensemble fini



Objectif

Soit M_n choisie uniformément au hasard dans \mathbb{M}_n^p . Pour un $a > 0$,

$$(V(M_n), n^{-a} d_{\text{gr}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{“espace limite continu”}$$

au sens de la distance de **Gromov-Hausdorff**.

Remarques.

- Il faut **changer d'échelle** la distance d_{gr} pour une limite **compacte**.
- On pense que la limite ne dépend pas de p (**universalité**).

La distance de Gromov-Hausdorff

La distance de Hausdorff. K_1, K_2 compacts dans un espace métrique

$$d_{\text{Haus}}(K_1, K_2) = \inf\{\varepsilon > 0 : K_1 \subset U_\varepsilon(K_2) \text{ et } K_2 \subset U_\varepsilon(K_1)\}$$

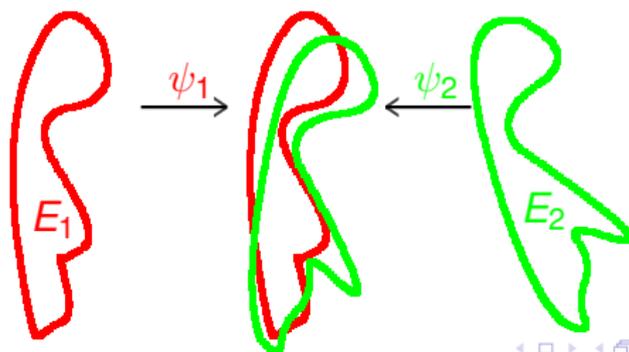
$(U_\varepsilon(K_1))$ est le voisinage de rayon ε de K_1

Définition (distance de Gromov-Hausdorff)

Si (E_1, d_1) et (E_2, d_2) sont deux espaces métriques compacts,

$$d_{\text{GH}}(E_1, E_2) = \inf\{d_{\text{Haus}}(\psi_1(E_1), \psi_2(E_2))\}$$

l'infimum porte sur tous les plongements **isométriques** $\psi_1 : E_1 \rightarrow E$ et $\psi_2 : E_2 \rightarrow E$ de E_1 et E_2 dans le même espace métrique E .



Convergence de Gromov-Hausdorff de cartes changées d'échelles

Fait

Si $\mathbb{K} = \{\text{espaces métriques compacts à isométrie près}\}$, alors

$(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$ est un espace métrique complet séparable.

→ Cela donne un sens à la **convergence** de

$$(V(M_n), n^{-a}d_{\text{gr}})$$

comme **variables aléatoires** à valeurs dans \mathbb{K} .

(Problème énoncé pour les triangulations par O. Schramm [ICM06])

Choix of a . Le paramètre a est choisi pour que $\text{diam}(V(M_n)) \approx n^a$.

⇒ $a = \frac{1}{4}$ [cf Chassaing-Schaeffer 2004 pour les quadrangulations]

Convergence de Gromov-Hausdorff de cartes changées d'échelles

Fait

Si $\mathbb{K} = \{\text{espaces métriques compacts à isométrie près}\}$, alors

$(\mathbb{K}, d_{\text{GH}})$ est un espace métrique complet séparable.

→ Cela donne un sens à la **convergence** de

$$(V(M_n), n^{-a}d_{\text{gr}})$$

comme **variables aléatoires** à valeurs dans \mathbb{K} .

(Problème énoncé pour les triangulations par O. Schramm [ICM06])

Choix of a . Le paramètre a est choisi pour que $\text{diam}(V(M_n)) \approx n^a$.

⇒ $a = \frac{1}{4}$ [cf Chassaing-Schaeffer 2004 pour les quadrangulations]

Le théorème principal

$\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations enracinées à } n \text{ faces}\}$

M_n de loi uniforme sur \mathbb{M}_n^p , $V(M_n) = \{\text{sommets de } M_n\}$,

d_{gr} distance de graphe sur $V(M_n)$

Théorème (La limite d'échelle des p -angulations)

Supposons que soit $p = 3$ (triangulations) soit $p \geq 4$ est pair. Soit

$$c_3 = 6^{1/4}, \quad c_p = \left(\frac{9}{p(p-2)}\right)^{1/4} \quad \text{si } p \text{ est pair.}$$

Alors,

$$(V(M_n), c_p \frac{1}{n^{1/4}} d_{\text{gr}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} (\mathbf{m}_\infty, D^*)$$

au sens de Gromov-Hausdorff. La limite (\mathbf{m}_∞, D^*) est un espace métrique compact aléatoire qui ne dépend pas de p (**universalité**) et est appelé la **carte brownienne** (d'après Marckert-Mokkadem).

Remarques. Autre approche du cas $p = 4$: Miermont (2011)

Le cas $p = 3$ résout la conjecture de Schramm (2006)

Deux théorèmes sur la carte brownienne

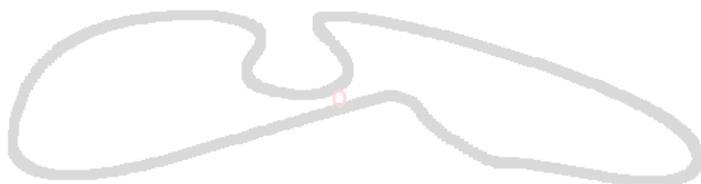
Théorème (dimension de Hausdorff)

$$\dim(\mathbf{m}_\infty, D^*) = 4 \quad p.s.$$

Théorème (type topologique, LG-Paulin 2007)

Presque sûrement, (\mathbf{m}_∞, D^) est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 .*

Conséquence: pour n grand,
pas de cycle séparant de
longueur $o(n^{1/4})$ dans M_n ,
tel que les deux cotés aient
un diamètre $\geq \varepsilon n^{1/4}$



Deux théorèmes sur la carte brownienne

Théorème (dimension de Hausdorff)

$$\dim(\mathbf{m}_\infty, D^*) = 4 \quad p.s.$$

Théorème (type topologique, LG-Paulin 2007)

Presque sûrement, (\mathbf{m}_∞, D^) est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 .*

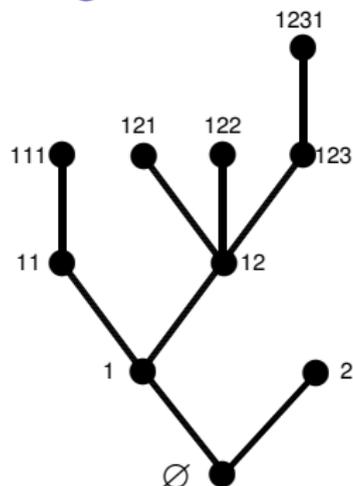
Conséquence: pour n grand,
pas de cycle séparant de
longueur $o(n^{1/4})$ dans M_n ,
tel que les deux cotés aient
un diamètre $\geq \varepsilon n^{1/4}$



Pourquoi étudier les cartes planaires et leurs limites d'échelle ?

- **combinatoire** [Tutte '60, théorème des 4 couleurs, etc.]
- **théorie des probabilités** : modèle pour une surface brownienne
- **motivations algébriques et géométriques** : cf Lando-Zvonkin 04 *Graphs on surfaces and their applications*
- **physique théorique**
 - ▶ énumération de cartes et **intégrales de matrices** [t Hooft 74, Brézin, Itzykson, Parisi, Zuber 78, etc.], cf travaux récents de Eynard, Guionnet, etc.
 - ▶ grandes cartes planaires comme modèles de **géométrie aléatoire** (gravité quantique 2D, cf Ambjørn, Durhuus, Jonsson 95), travaux récents de Bouttier et Guitter sur les cartes planaires
 - ▶ liens avec la **théorie de Liouville** et la **relation KPZ** (Polyakov, David, Duplantier-Sheffield, etc.)

2. Codage des cartes par des arbres

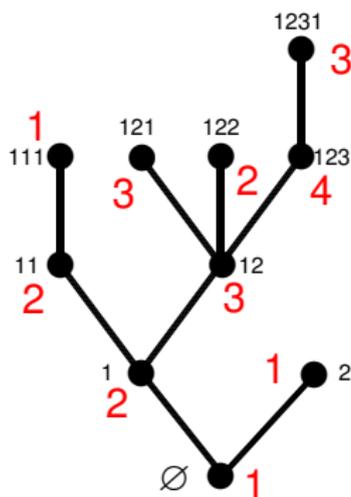


Un **arbre planaire**

$$\tau = \{\emptyset, 1, 2, 11, \dots\}$$

(arbre enraciné ordonné)

l'ordre lexicographique sur les sommets jouera un rôle important dans la suite



Un **arbre bien étiqueté** $(\tau, (l_v)_{v \in \tau})$

Propriétés des étiquettes :

- $l_\emptyset = 1$
- $l_v \in \{1, 2, 3, \dots\}, \forall v$
- $|l_v - l_{v'}| \leq 1$, si v, v' voisins

Codage dans le cas des quadrangulations

$\mathbb{T}_n = \{\text{arbres bien étiquetés à } n \text{ arêtes}\}$

$\mathbb{M}_n^4 = \{\text{quadrangulations enracinées à } n \text{ faces}\}$

Théorème (Cori-Vauquelin, Schaeffer)

Il existe une bijection $\Phi : \mathbb{T}_n \longrightarrow \mathbb{M}_n^4$ telle que, si $M = \Phi(\tau, (\ell_v)_{v \in \tau})$, alors

$$V(M) = \tau \cup \{\partial\} \quad (\partial \text{ est le sommet racine de } M)$$

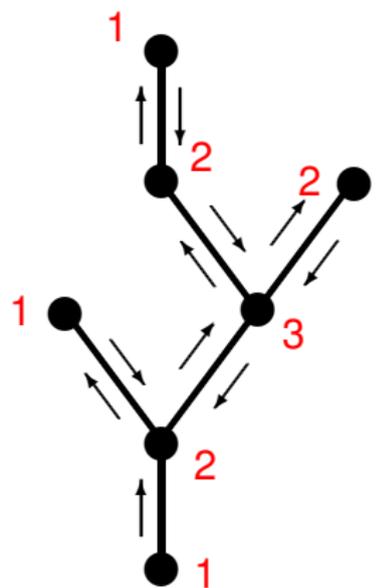
$$d_{\text{gr}}(\partial, v) = \ell_v, \quad \forall v \in \tau$$

Propriétés importantes.

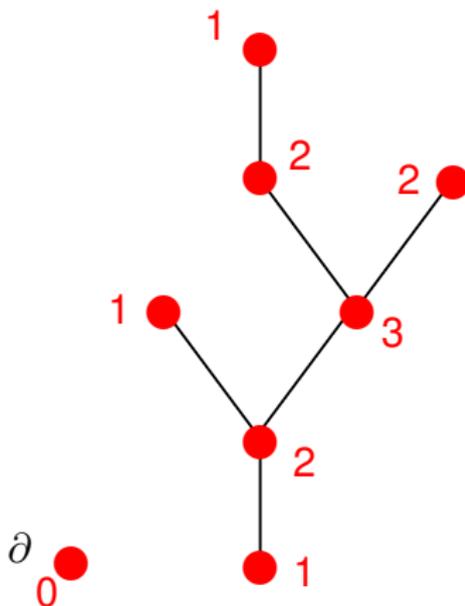
- Les sommets de τ deviennent des sommets de M
- L'**étiquette** dans l'arbre devient la **distance** depuis la racine dans la carte.

Codage de **cartes plus générales**: [Bouttier-Di Francesco-Guitter \(04\)](#)

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

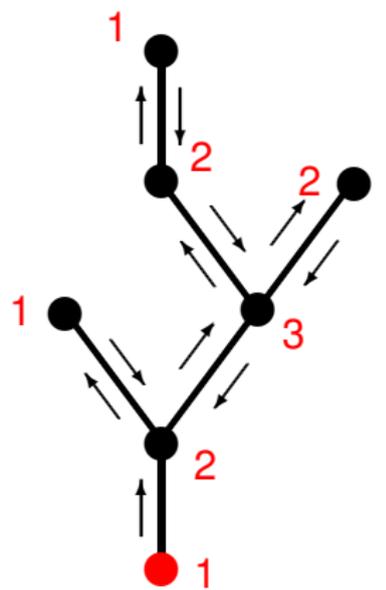


quadrangulation

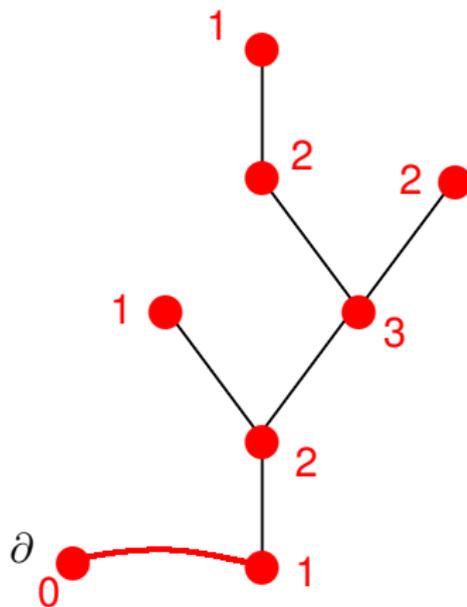
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

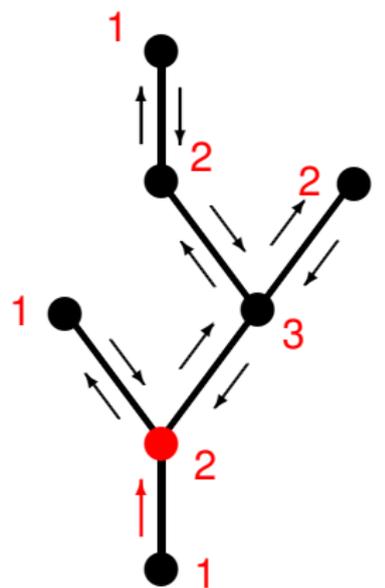


quadrangulation

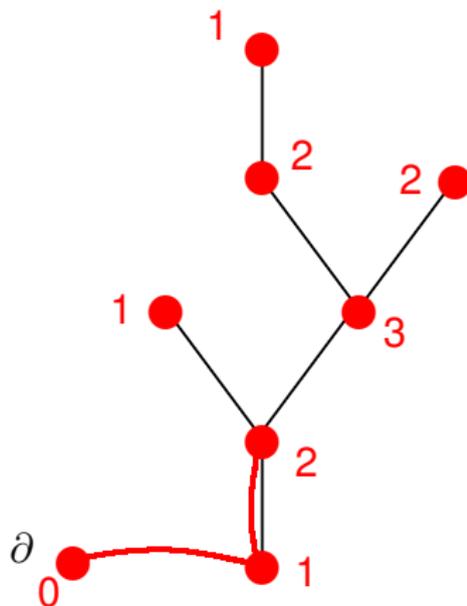
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

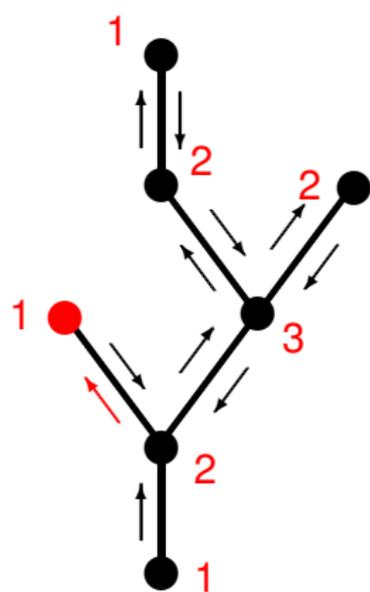


quadrangulation

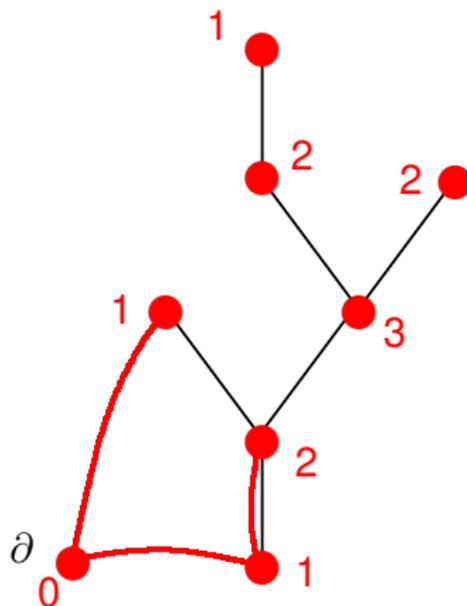
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

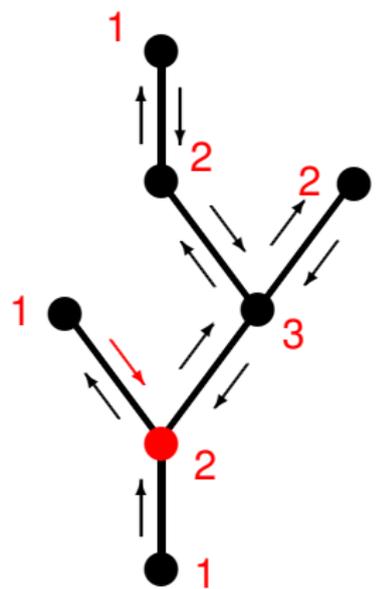


quadrangulation

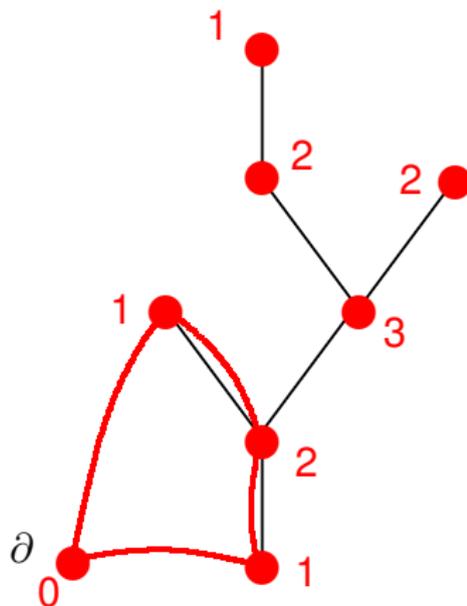
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

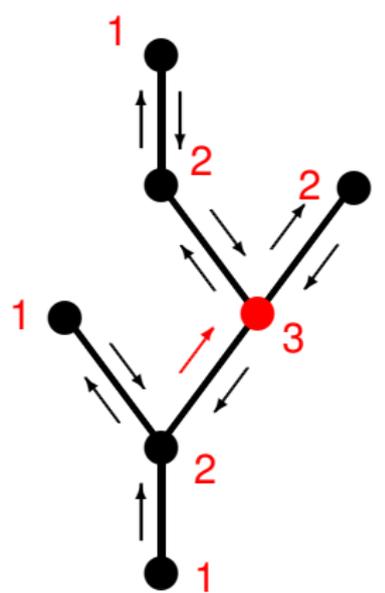


quadrangulation

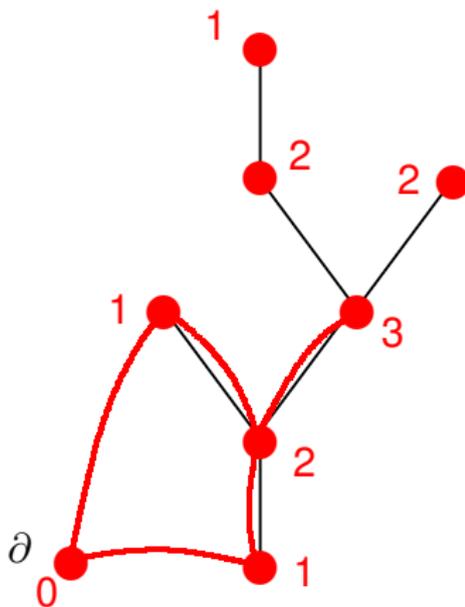
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

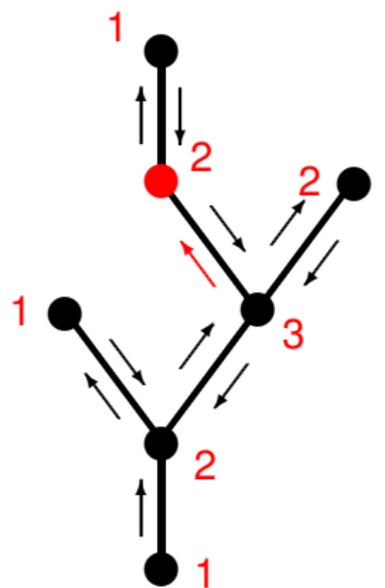


quadrangulation

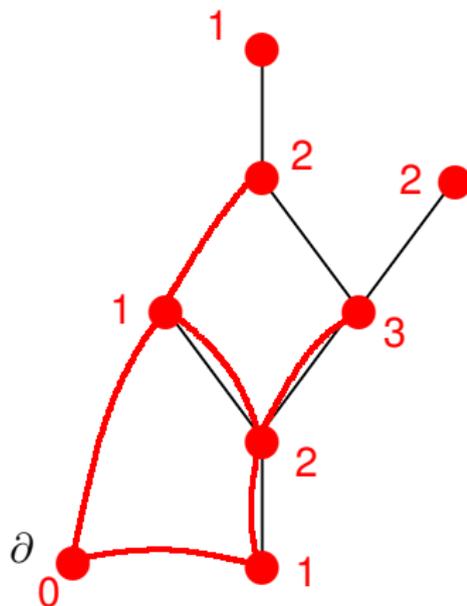
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

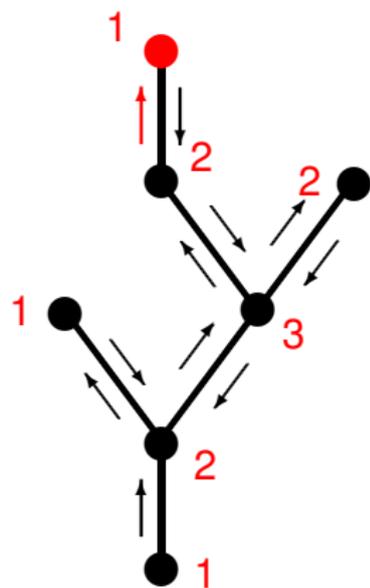


quadrangulation

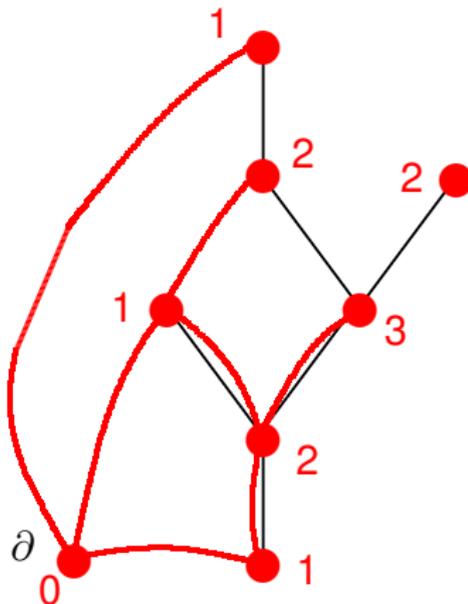
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté

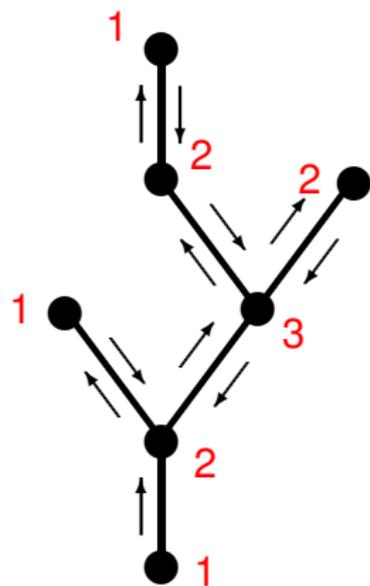


quadrangulation

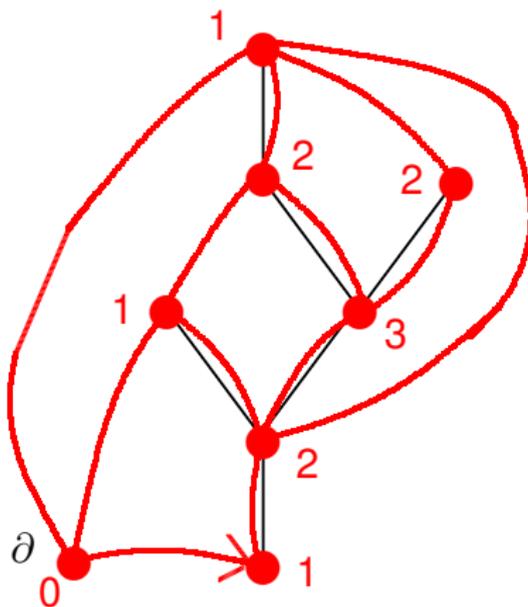
Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

La bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés



arbre bien étiqueté



quadrangulation

Règles.

- ajouter un sommet ∂ d'étiquette 0
- suivre le contour de l'arbre, relier chaque coin au **dernier** coin visité d'**étiquette plus petite**

l'**étiquette** sur l'arbre devient la **distance** depuis ∂ dans la carte

Stratégie générale

Comprendre les limites continues d'**arbres** (“**facile**”)

pour comprendre les limites continues de **cartes** (“**plus difficile**”)

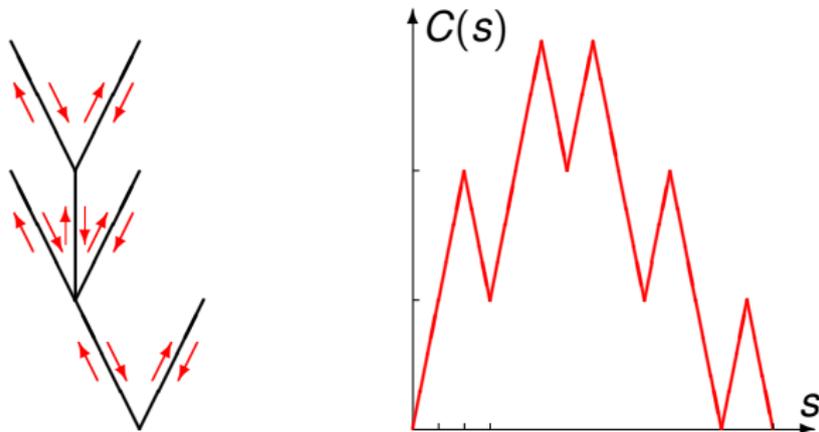
Point-clé. Les bijections avec les arbres permettent de bien comprendre les distances au sommet racine mais **pas** les distances entre deux sommets quelconques (nécessaire pour la convergence de Gromov-Hausdorff)

3. La carte brownienne

La carte brownienne (\mathbf{m}_∞, D^*) est construite en identifiant certains couples de points de l'arbre brownien (CRT).

Constructions de l'arbre brownien (Aldous, ...):

- Comme la limite d'échelle d'arbres discrets
- Comme l'arbre réel aléatoire codé par une excursion brownienne



Un arbre planaire (discret) et sa fonction de contour

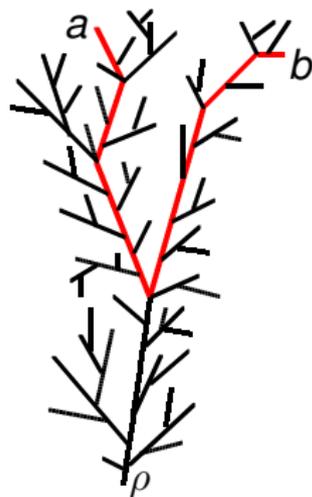
La notion d'arbre réel

Definition

Un **arbre réel**, ou \mathbb{R} -arbre, est un espace métrique (compact) \mathcal{T} tel que :

- deux points $a, b \in \mathcal{T}$ sont connectés par un **unique** chemin continu et injectif (à re-paramétrisation près)
- ce chemin est isométrique à un segment de droite

arbre réel enraciné si point distingué ρ (racine).



Remarque. Un arbre réel peut avoir

- une infinité de points de branchement
- une infinité non dénombrable de feuilles

Fait. Le codage des arbres discrets par leur contour s'étend aux arbres réels, et fournit un **ordre lexicographique** sur ces arbres.

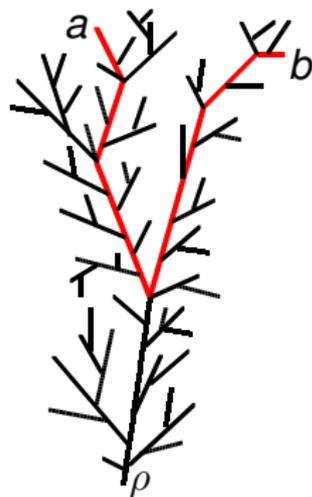
La notion d'arbre réel

Definition

Un **arbre réel**, ou \mathbb{R} -arbre, est un espace métrique (compact) \mathcal{T} tel que :

- deux points $a, b \in \mathcal{T}$ sont connectés par un **unique** chemin continu et injectif (à re-paramétrisation près)
- ce chemin est isométrique à un segment de droite

arbre réel enraciné si point distingué ρ (racine).



Remarque. Un arbre réel peut avoir

- une infinité de points de branchement
- une infinité non dénombrable de feuilles

Fait. Le codage des arbres discrets par leur contour s'étend aux arbres réels, et fournit un **ordre lexicographique** sur ces arbres.

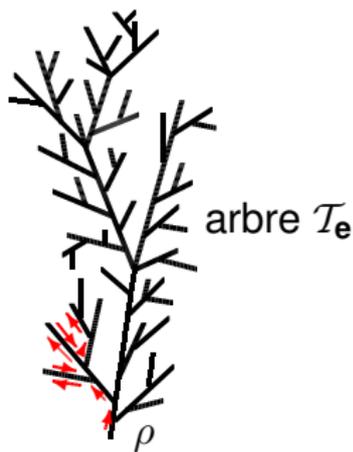
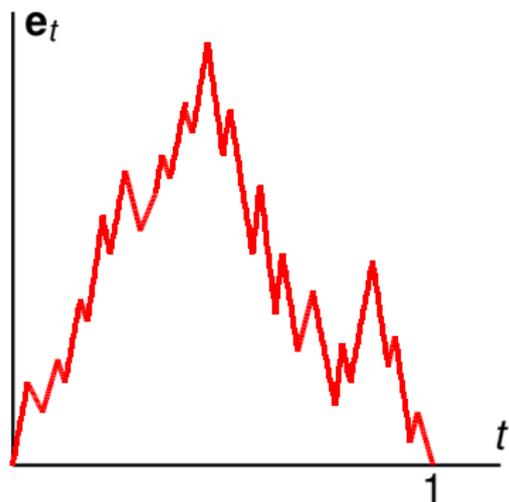
Le théorème d'Aldous et l'arbre brownien (CRT)

Théorème (Aldous)

τ_n de loi uniforme sur $\{\text{arbres planaires avec } n \text{ arêtes}\}$. Alors

$$\left(\tau_n, \frac{1}{\sqrt{2n}} d_{\text{gr}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(\text{loi})} (\mathcal{T}_e, d_e) \quad \text{au sens de Gromov-Hausdorff.}$$

La limite (\mathcal{T}_e, d_e) est l'arbre réel (aléatoire) dont le contour est une excursion brownienne e .

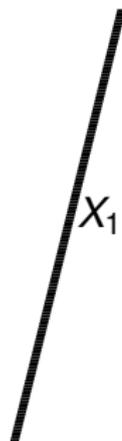


Construction directe de l'arbre brownien

Soit une suite X_1, X_2, \dots de variables aléatoires positives telles que, pour chaque $n \geq 1$, le vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) a densité

$$a_n x_1(x_1 + x_2) \cdots (x_1 + \cdots + x_n) \exp(-2(x_1 + \cdots + x_n)^2)$$

On “coupe” la demi-droite positive en segments de longueur X_1, X_2, \dots et on les assemble pour former un arbre :



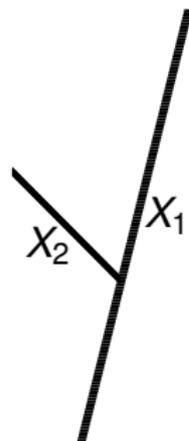
- La première branche a longueur X_1 .
- La deuxième branche a longueur X_2 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme** sur la première.
- La troisième branche a longueur X_3 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme sur l'union** des deux premières.
- Et ainsi de suite.

Construction directe de l'arbre brownien

Soit une suite X_1, X_2, \dots de variables aléatoires positives telles que, pour chaque $n \geq 1$, le vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) a densité

$$a_n x_1(x_1 + x_2) \cdots (x_1 + \cdots + x_n) \exp(-2(x_1 + \cdots + x_n)^2)$$

On “coupe” la demi-droite positive en segments de longueur X_1, X_2, \dots et on les assemble pour former un arbre :



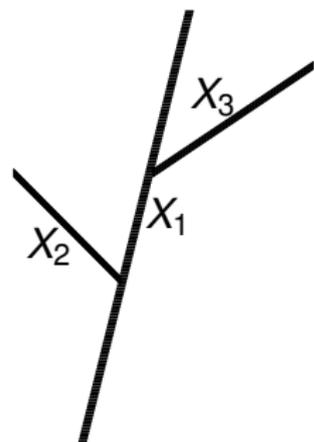
- La première branche a longueur X_1 .
- La deuxième branche a longueur X_2 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme** sur la première.
- La troisième branche a longueur X_3 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme sur l'union** des deux premières.
- Et ainsi de suite.

Construction directe de l'arbre brownien

Soit une suite X_1, X_2, \dots de variables aléatoires positives telles que, pour chaque $n \geq 1$, le vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) a densité

$$a_n x_1(x_1 + x_2) \cdots (x_1 + \cdots + x_n) \exp(-2(x_1 + \cdots + x_n)^2)$$

On “coupe” la demi-droite positive en segments de longueur X_1, X_2, \dots et on les assemble pour former un arbre :



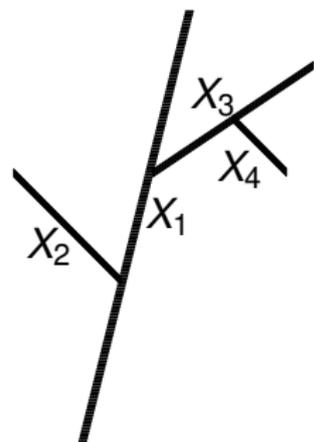
- La première branche a longueur X_1 .
- La deuxième branche a longueur X_2 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme** sur la première.
- La troisième branche a longueur X_3 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme sur l'union** des deux premières.
- Et ainsi de suite.

Construction directe de l'arbre brownien

Soit une suite X_1, X_2, \dots de variables aléatoires positives telles que, pour chaque $n \geq 1$, le vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) a densité

$$a_n x_1(x_1 + x_2) \cdots (x_1 + \cdots + x_n) \exp(-2(x_1 + \cdots + x_n)^2)$$

On “coupe” la demi-droite positive en segments de longueur X_1, X_2, \dots et on les assemble pour former un arbre :



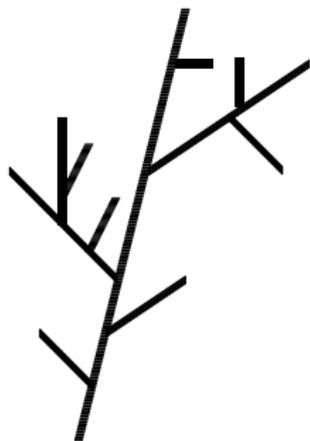
- La première branche a longueur X_1 .
- La deuxième branche a longueur X_2 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme** sur la première.
- La troisième branche a longueur X_3 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme sur l'union** des deux premières.
- Et ainsi de suite.

Construction directe de l'arbre brownien

Soit une suite X_1, X_2, \dots de variables aléatoires positives telles que, pour chaque $n \geq 1$, le vecteur (X_1, X_2, \dots, X_n) a densité

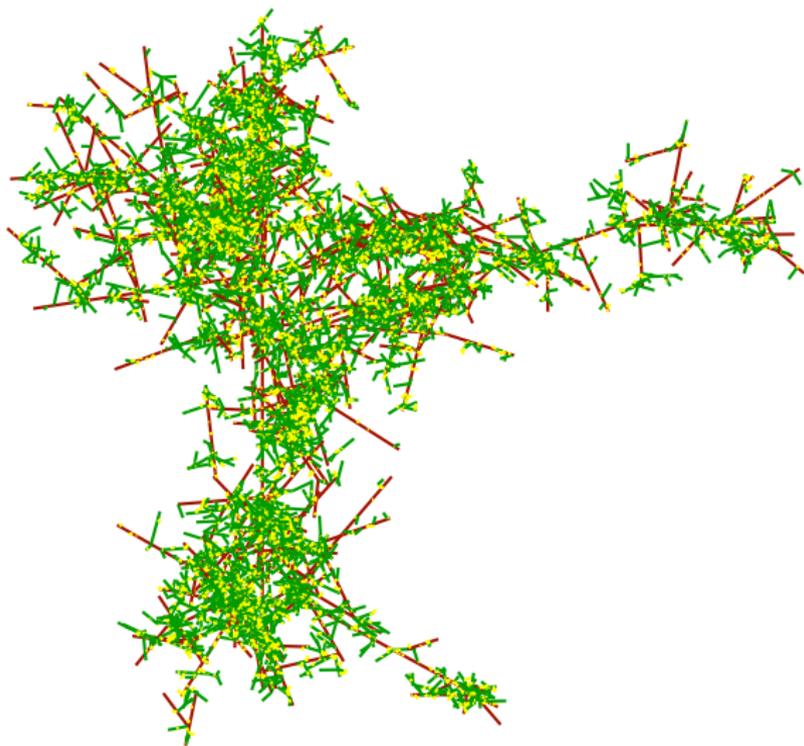
$$a_n x_1(x_1 + x_2) \cdots (x_1 + \cdots + x_n) \exp(-2(x_1 + \cdots + x_n)^2)$$

On “coupe” la demi-droite positive en segments de longueur X_1, X_2, \dots et on les assemble pour former un arbre :



- La première branche a longueur X_1 .
- La deuxième branche a longueur X_2 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme** sur la première.
- La troisième branche a longueur X_3 et se rattache, à droite ou à gauche, en un point **uniforme sur l'union** des deux premières.
- Et ainsi de suite.

La limite, au sens de Gromov-Hausdorff, est l'arbre brownien.



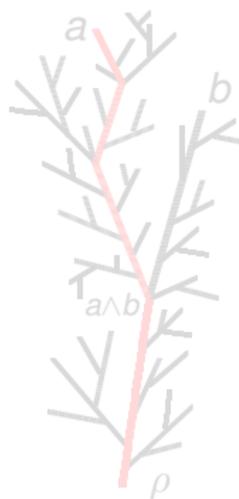
Une simulation de l'arbre brownien (simulation de G. Miermont)

Attacher des étiquettes browniennes à un arbre réel

Soit (\mathcal{T}, d) un arbre réel de racine ρ .

$(Z_a)_{a \in \mathcal{T}}$: **mouvement brownien indexé par** (\mathcal{T}, d)
= processus gaussien centré tel que

- $Z_\rho = 0$
- $E[(Z_a - Z_b)^2] = d(a, b), \quad a, b \in \mathcal{T}$



Les étiquettes évoluent comme un mouvement brownien le long des branches :

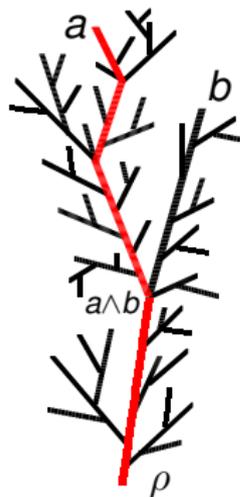
- Z_a est la valeur au temps $d(\rho, a)$ d'un mouvement brownien standard
- de même pour Z_b , mais on utilise
 - ▶ le même MB entre 0 et $d(\rho, a \wedge b)$
 - ▶ un MB indépendant entre $d(\rho, a \wedge b)$ et $d(\rho, b)$

Attacher des étiquettes browniennes à un arbre réel

Soit (\mathcal{T}, d) un arbre réel de racine ρ .

$(Z_a)_{a \in \mathcal{T}}$: **mouvement brownien indexé par** (\mathcal{T}, d)
= processus gaussien centré tel que

- $Z_\rho = 0$
- $E[(Z_a - Z_b)^2] = d(a, b), \quad a, b \in \mathcal{T}$



Les étiquettes évoluent comme un mouvement brownien le long des branches :

- Z_a est la valeur au temps $d(\rho, a)$ d'un mouvement brownien standard
- de même pour Z_b , mais on utilise
 - ▶ le même MB entre 0 et $d(\rho, a \wedge b)$
 - ▶ un MB indépendant entre $d(\rho, a \wedge b)$ et $d(\rho, b)$

La définition de la carte brownienne

(\mathcal{T}_e, d_e) est l'arbre brownien, $(Z_a)_{a \in \mathcal{T}_e}$ mouvement brownien indexé par l'arbre brownien \mathcal{T}_e (deux niveaux d'aléa)

On pose, pour tous $a, b \in \mathcal{T}_e$,

$$D^0(a, b) = Z_a + Z_b - 2 \max \left(\min_{c \in [a, b]} Z_c, \min_{c \in [b, a]} Z_c \right)$$

où $[a, b]$ est l'intervalle lexicographique de a à b dans \mathcal{T}_e (sommets visités entre a et b en "tournant" autour de l'arbre).

Soit

$$D^*(a, b) = \inf_{a_0=a, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k=b} \sum_{i=1}^k D^0(a_{i-1}, a_i),$$

$$a \approx b \text{ ssi } D^*(a, b) = 0 \quad (\text{equivaut à } D^0(a, b) = 0).$$

Definition

La carte brownienne \mathbf{m}_∞ est l'espace quotient $\mathbf{m}_\infty := \mathcal{T}_e / \approx$, muni de la distance induite par D^* .

Pourquoi la relation d'équivalence \approx

Partant de l'arbre brownien \mathcal{T}_e , muni d'étiquettes browniennes

$Z_a, a \in \mathcal{T}_e$,

→ On **identifie** deux sommets $a, b \in \mathcal{T}_e$ si :

- ils ont **même étiquette** $Z_a = Z_b$,
- on peut aller de a à b en tournant autour de l'arbre et en ne rencontrant que des sommets d'**étiquette plus grande** que $Z_a = Z_b$.

Interprétation.

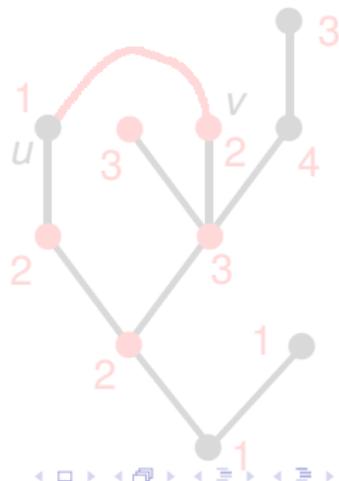
Dans la bijection de Schaeffer,

\exists arête entre u et v si

- $l_u = l_v - 1$
- $l_w \geq l_v, \forall w \in]u, v]$

Explique pourquoi dans la limite continue

$Z_a = Z_b = \min_{c \in [a, b]} Z_c \Rightarrow a$ et b identifiés



Pourquoi la relation d'équivalence \approx

Partant de l'arbre brownien \mathcal{T}_e , muni d'étiquettes browniennes $Z_a, a \in \mathcal{T}_e$,

→ On **identifie** deux sommets $a, b \in \mathcal{T}_e$ si :

- ils ont **même étiquette** $Z_a = Z_b$,
- on peut aller de a à b en tournant autour de l'arbre et en ne rencontrant que des sommets d'**étiquette plus grande** que $Z_a = Z_b$.

Interprétation.

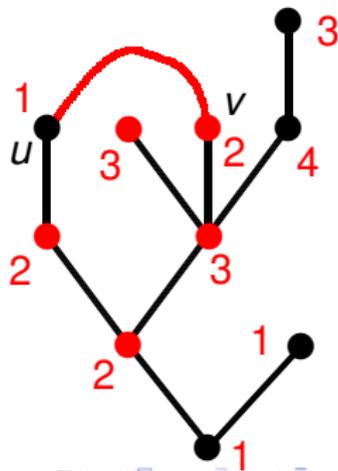
Dans la bijection de Schaeffer,

\exists arête entre u et v si

- $l_u = l_v - 1$
- $l_w \geq l_v, \forall w \in]u, v]$

Explique pourquoi dans la limite continue

$Z_a = Z_b = \min_{c \in [a,b]} Z_c \Rightarrow a$ et b identifiés



Points-clés de la preuve du théorème principal :

- Montrer que **les seules paires de points identifiées** sont les $\{a, b\}$ avec $a \approx b$
- Obtenir la formule pour la distance D^*

Lien entre étiquettes et distances.

Si ρ_* est le point unique tel que $Z_{\rho_*} = \min\{Z_a : a \in \mathcal{T}_e\}$,

$$D^*(\rho_*, a) = Z_a - \min Z \stackrel{\text{not.}}{=} \bar{Z}_a$$

ρ_* joue le rôle de **point distingué** de la carte brownienne
(pas le même que la racine ρ de \mathcal{T}_e)

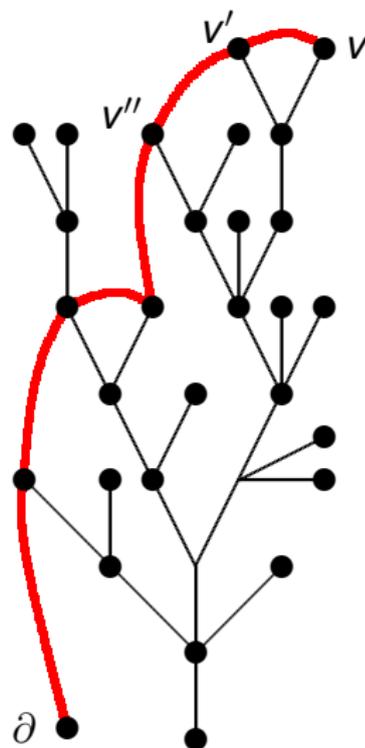
5. Géodésiques dans la carte brownienne

Géodésiques dans les quadrangulations

On utilise la bijection de Schaeffer entre quadrangulations et arbres bien étiquetés.

Pour construire une géodésique de v à ∂ :

- On cherche le dernier sommet visité (avant v) d'étiquette $\ell_v - 1$. On l'appelle v' .
- On fait de même à partir de v' pour obtenir un sommet v'' .
- Et ainsi de suite.
- On atteint finalement la racine ∂ .



Géodésiques simples dans la carte brownienne

Carte brownienne : $\mathbf{m}_\infty = \mathcal{T}_e / \approx$

Point distingué ρ_*

\prec ordre "lexicographique" sur \mathcal{T}_e

Rappel : $D^*(\rho_*, a) = \bar{Z}_a = Z_a - \min Z$

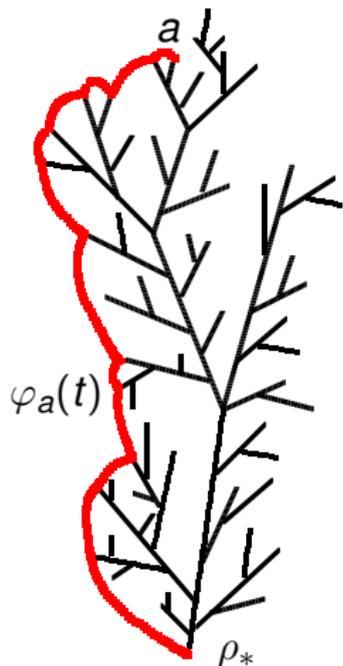
On fixe $a \in \mathcal{T}_e$ et pour $t \in [0, \bar{Z}_a]$, on pose

$$\varphi_a(t) = \sup\{b \prec a : \bar{Z}_b = t\}$$

(même formule que dans le cas discret !)

Alors $(\varphi_a(t))_{0 \leq t \leq \bar{Z}_a}$ est une géodésique de ρ_* à a

(appelée une **géodésique simple**)



Fait

Les géodésiques simples visitent seulement les feuilles \mathcal{T}_e (sauf peut-être en leur point de départ)

Combien de géodésiques simples partant d'un point ?

- Si a est une feuille de \mathcal{T}_e ,
il y a une unique géodésique simple
de ρ_* vers a
- Sinon, il y a
 - ▶ 2 géodésiques simples distinctes si
 a est un point simple
 - ▶ 3 géodésiques simples distinctes si
 a est un point de branchement

(3 est la multiplicité maximale dans \mathcal{T}_e)



Proposition (résultat clé)

Toutes les géodésiques vers ρ_ sont des géodésiques simples.*

Le résultat principal sur les géodésiques

On définit le squelette \mathcal{T}_e par $\text{Sk}(\mathcal{T}_e) = \mathcal{T}_e \setminus \{\text{feuilles de } \mathcal{T}_e\}$ et on pose

$$\text{Skel} = \pi(\text{Sk}(\mathcal{T}_e)) \quad (\pi : \mathcal{T}_e \rightarrow \mathcal{T}_e / \approx = \mathbf{m}_\infty \text{ projection canonique})$$

Alors

- la restriction de π à $\text{Sk}(\mathcal{T}_e)$ est un homéomorphisme sur Skel
- $\dim(\text{Skel}) = 2$ (rappel $\dim(\mathbf{m}_\infty) = 4$)

Théorème (Géodésiques vers la racine)

Soit $x \in \mathbf{m}_\infty$. Alors

- si $x \notin \text{Skel}$, il existe une unique géodésique entre ρ_* et x
- si $x \in \text{Skel}$, le nombre de géodésiques distinctes entre ρ_* et x est la multiplicité $m(x)$ de x dans Skel (remarque : $m(x) \leq 3$).

Remarques

- Skel est le cut-locus de \mathbf{m}_∞ relatif à ρ_* : cf géométrie riemannienne [Poincaré, Myers, ...], où le cut-locus est un arbre.
- mêmes résultats si ρ_* est remplacé par un point choisi "au hasard" dans \mathbf{m}_∞ .

Le résultat principal sur les géodésiques

On définit le squelette \mathcal{T}_e par $\text{Sk}(\mathcal{T}_e) = \mathcal{T}_e \setminus \{\text{feuilles de } \mathcal{T}_e\}$ et on pose

$$\text{Skel} = \pi(\text{Sk}(\mathcal{T}_e)) \quad (\pi : \mathcal{T}_e \rightarrow \mathcal{T}_e / \approx = \mathbf{m}_\infty \text{ projection canonique})$$

Alors

- la restriction de π à $\text{Sk}(\mathcal{T}_e)$ est un homéomorphisme sur Skel
- $\dim(\text{Skel}) = 2$ (rappel $\dim(\mathbf{m}_\infty) = 4$)

Théorème (Géodésiques vers la racine)

Soit $x \in \mathbf{m}_\infty$. Alors

- si $x \notin \text{Skel}$, il existe une unique géodésique entre ρ_* et x
- si $x \in \text{Skel}$, le nombre de géodésiques distinctes entre ρ_* et x est la multiplicité $m(x)$ de x dans Skel (remarque : $m(x) \leq 3$).

Remarques

- Skel est le cut-locus de \mathbf{m}_∞ relatif à ρ_* : cf géométrie riemannienne [Poincaré, Myers, ...], où le cut-locus est un arbre.
- mêmes résultats si ρ_* est remplacé par un point choisi "au hasard" dans \mathbf{m}_∞ .

Propriété de confluence des géodésiques

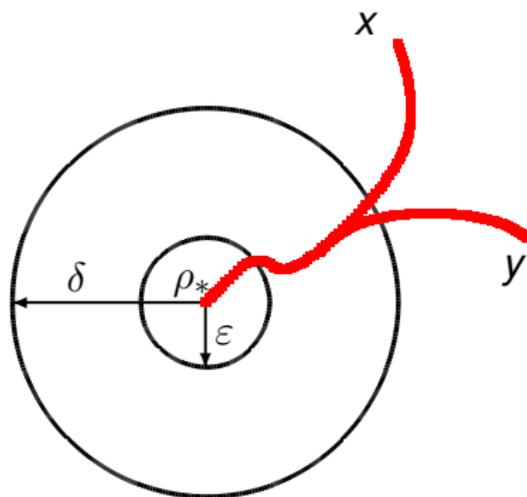
Corollaire

Etant donné $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ t.q.

- si $D^*(\rho_*, x) \geq \delta$, $D^*(\rho_*, y) \geq \delta$
- si γ est une géodésique entre ρ_* et x
- si γ' est une géodésique entre ρ_* et y

alors

$$\gamma(t) = \gamma'(t) \quad \text{pour tout } t \leq \varepsilon$$



“Une seule manière” de quitter ρ_* le long d’une géodésique.
(aussi vrai si ρ_* est remplacé par un point typique de \mathbf{m}_∞)

Voir aussi [Bouttier-Guitter \(2008\)](#)

Unicité des géodésiques dans les cartes discrètes

M_n de loi uniforme sur $\mathbb{M}_n^p = \{p\text{-angulations à } n \text{ faces}\}$

$V(M_n)$ ensemble des sommets de M_n , ∂ racine of M_n , d_{gr} distance de graphe

Pour $v \in V(M_n)$, $\text{Geo}(\partial \rightarrow v) = \{\text{géodésiques de } \partial \text{ à } v\}$

Si γ, γ' sont deux chemins discrets (de même longueur)

$$d(\gamma, \gamma') = \max_i d_{\text{gr}}(\gamma(i), \gamma'(i))$$

Corollaire

Soit $\delta > 0$. Alors,

$$\frac{1}{n} \#\{v \in V(M_n) : \exists \gamma, \gamma' \in \text{Geo}(\partial \rightarrow v), d(\gamma, \gamma') \geq \delta n^{1/4}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Unicité **macroscopique** des géodésiques, aussi vraie pour les “géodésiques approchées” = chemins de longueur

$$d_{\text{gr}}(\partial, v) + o(n^{1/4})$$

Points exceptionnels dans les cartes discrètes

M_n p -angulation à n faces de loi uniforme

Pour $v \in V(M_n)$, et $\delta > 0$, on pose

$$\text{Mult}_\delta(v) = \max\{k : \exists \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \text{Geo}(\partial, v), d(\gamma_i, \gamma_j) \geq \delta n^{1/4} \text{ if } i \neq j\}$$

(nombre de géodésiques “macroscopiquement différentes” de ∂ à v)

Corollaire

1. Pour tout $\delta > 0$, $P[\exists v \in V(M_n) : \text{Mult}_\delta(v) \geq 4] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
2. Mais $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} P[\exists v \in V(M_n) : \text{Mult}_\delta(v) = 3] \right) = 1$

Au plus **3 géodésiques différentes** entre ∂ et un sommet de M_n .

Remarque. ∂ peut être remplacé par un sommet typique de M_n .

Autres résultats sur les géodésiques dans les quadrangulations:

[Bouttier-Guitter \(2008\)](#)

6. Plongements canoniques : problèmes ouverts

Une carte planaire est un plongement de graphe défini à homéomorphisme direct de la sphère près.

Il est possible de choisir un plongement “canonique” qui sera unique aux transformations de Möbius près (les transformations de Möbius sont les transformations conformes de la sphère \mathbb{S}^2).

Question

En appliquant ce plongement canonique à M_n (de loi uniforme sur les p -angulations à n faces), peut-on faire tendre n vers l'infini et obtenir une métrique aléatoire Δ sur la sphère \mathbb{S}^2 satisfaisant des propriétés d'invariance conforme, et telle que

$$(\mathbb{S}^2, \Delta) \stackrel{(d)}{=} (\mathbf{m}_\infty, D^*)$$

Plongements canoniques et empilements de cercles 1

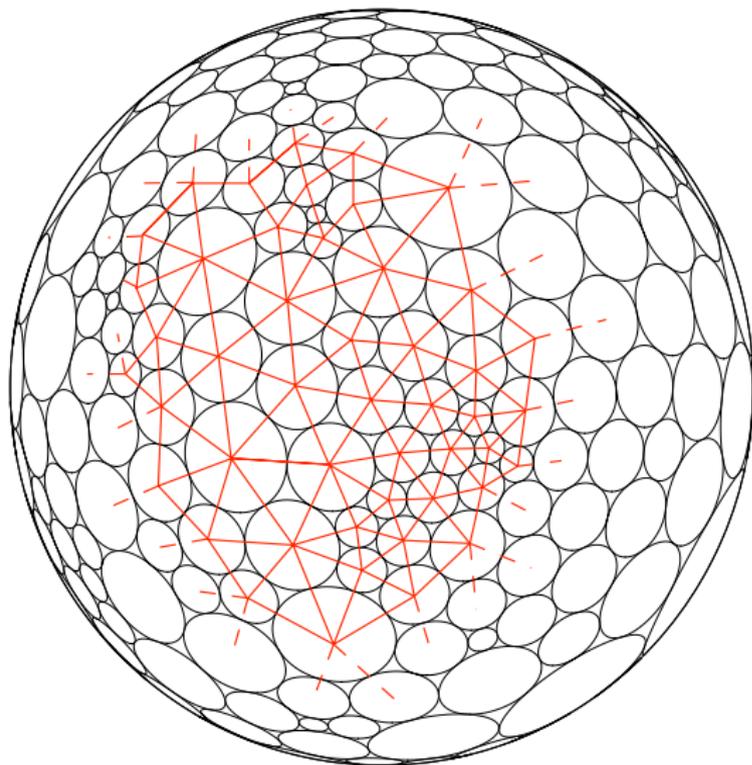
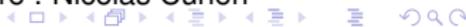
A partir d'un empilement de cercles, on construit M :

- $V(M) = \{\text{centres des cercles}\}$
- arête entre a et b si les cercles correspondants sont tangents.

Une triangulation (sans boucles ni arêtes multiples) peut toujours être représentée de cette manière.

Représentation unique aux transformations de Möbius près.

Figure : Nicolas Curien



Plongements canoniques et empilements de cercles 2

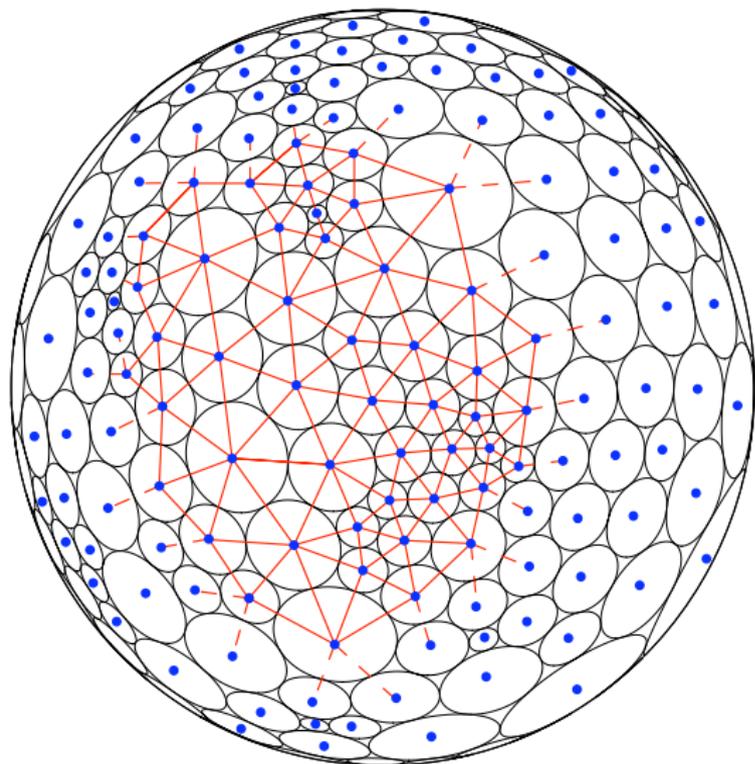
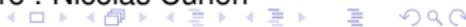
M_n de loi uniforme sur les
{triangulations à n faces}.

Quand $n \rightarrow \infty$, on s'attend
à obtenir

- Une **métrique aléatoire**
 Δ sur \mathbb{S}^2 (avec des
propriétés d'invariance
conforme) telle que
 $(\mathbb{S}^2, \Delta) = (\mathbf{m}_\infty, D^*)$
- Une **mesure de volume
aléatoire** sur \mathbb{S}^2

Liens avec le champ libre
gaussien et la gravité
quantique de Liouville ?
(cf Duplantier-Sheffield).

Figure : Nicolas Curien



Quelques références

BOUttIER, DI FRANCESCO, GUITTER: Planar maps as labeled mobiles. *Electr. J. Combinatorics* (2004)

BOUttIER, GUITTER: Statistics in geodesics in large quadrangulations. *J. Phys. A* 41 (2008)

BOUttIER, GUITTER: The three-point function of planar quadrangulations. *J. Stat. Mech. Theory Exp.* (2008)

DUPLANTIER, SHEFFIELD: Liouville quantum gravity and KPZ. *Invent. Math.* (2011)

LE GALL: The topological structure of scaling limits of large planar maps. *Invent. Math.* (2007)

LE GALL: Geodesics in large planar maps ... *Acta Math.* (2010)

LE GALL: Uniqueness and universality of the Brownian map. Preprint.

MARCKERT, MOKKADEM: Limit of normalized quadrangulations: The Brownian map. *Ann. Probab.* (2006)

MIERMONT: The Brownian map is the scaling limit of uniform random plane quadrangulations. Preprint.

SCHRAMM: Conformally invariant scaling limits. Proc. ICM 2006.