M2 Probabilités et Statistiques – Université Paris-Saclay

Mouvement brownien et calcul stochastique

Examen du 11 janvier 2023 (3 heures sans documents)

Barème approximatif. Exercice 1 : 5pts, Exercice 2 : 4pts, Pb : 11pts.

Dans l'exercice 2 et le problème, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

Exercice 1. Soit B un mouvement brownien réel issu de 0. On considère le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}.$$

(1) En utilisant la martingale $(B_t)^2 - t$, montrer que $E[T] = 1$. (*On justifiera précisément les arguments*).

(2) Soit $\varepsilon > 0$. On définit $S_1^\varepsilon = 0$ et $T_1^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = \varepsilon\}$ puis par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t \geq T_n^\varepsilon : B_t = 0\}\ , \quad T_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t \geq S_{n+1}^\varepsilon : |B_t| = \varepsilon\}.$$

Expliquer rapidement pourquoi $(S_n^\varepsilon)_{n\geq 1}$ et $(T_n^\varepsilon)_{n\geq 1}$ sont deux suites de temps d'arrêt finis p.s., puis montrer que $E\big[T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon\big] = \varepsilon^2$, pour tout $n \geq 1$.

(3) On pose $N_\varepsilon = \sup\{n \geq 1 : S_n^\varepsilon \leq 1\}$. Montrer que

$$E\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq 1\}}\,(T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon)\Big] = \varepsilon^2\, E[N_\varepsilon].$$

(4) Vérifier que

$$E\Big[\int_0^1 \mathbf{1}_{\{|B_t|\leq\varepsilon\}}\,\mathrm{d}t\Big] \leq \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}},$$

puis montrer que $E[N_\varepsilon] \leq \dfrac{4}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} + 1$.

Exercice 2. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 1 (**Attention** : $B_0 = 1$). On fixe $\varepsilon \in]0,1[$ et on pose $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : B_t = \varepsilon\}$. On se donne aussi deux réels $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

1. Montrer que $Z_t = (B_{t\wedge T_\varepsilon})^\alpha$ est une semimartingale et expliciter sa décomposition comme somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie.

2. Montrer que le processus

$$X_t = (B_{t\wedge T_\varepsilon})^\alpha \exp\Big(-\lambda\int_0^{t\wedge T_\varepsilon} \frac{\mathrm{d}s}{B_s^2}\Big)$$

est une martingale locale dès que α et λ vérifient une équation polynômiale que l'on déterminera.

3. Calculer

$$E\Big[\exp\Big(-\lambda\int_0^{T_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}s}{B_s^2}\Big)\Big].$$

Problème. Soit $B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^N)$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien en dimension N, issu du point $x = (x_1, \dots, x_N)$ de $\mathbb{R}^N$ (en particulier, $(B_t)_{t\geq 0}$ est adapté à la filtration et à accroissements indépendants par rapport à la filtration) . **On suppose toujours** $N \geq 2$ **et** $x \neq 0$.

1. On pose

$$\beta_t = \sum_{i=1}^{N} \int_0^t \frac{B_s^i}{|B_s|} \, \mathrm{d}B_s^i$$

avec la convention que $\frac{B_s^i}{|B_s|} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ si $|B_s| = 0$. Montrer que $(\beta_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0, puis que

$$|B_t|^2 = |x|^2 + 2\int_0^t |B_s| \, \mathrm{d}\beta_s + Nt.$$

2. Soit $\varepsilon \in]0, |x|[$ et $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \leq \varepsilon\}$. Pour tout $a > 0$, on pose $f(a) = \log a$ si $N = 2$, $f(a) = a^{2-N}$ si $N \geq 3$. Vérifier que $f(|B_{t\wedge T_\varepsilon}|)$ est une martingale locale.

3. Soit $R > |x|$ et $S_R = \inf\{t \geq 0 : |B_t| \geq R\}$. Montrer que

$$P(T_\varepsilon < S_R) = \frac{f(R) - f(|x|)}{f(R) - f(\varepsilon)}.$$

Déduire de l'égalité précédente que p.s. $\forall t \geq 0,\ B_t \neq 0$.

4. Montrer que p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$|B_t| = |x| + \beta_t + \frac{N-1}{2}\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{|B_s|}.$$

5. On suppose $N = 2$. Montrer que $P(T_\varepsilon < \infty) = 1$, puis que l'ensemble $\{B_t : t \geq 0\}$ est p.s. dense dans le plan.

6. On suppose $N \geq 3$. Montrer que $|B_t| \longrightarrow \infty$ quand $t \to \infty$, p.s.

7. On suppose $N = 3$. Vérifier à l'aide de la forme de la densité gaussienne que la famille de variables aléatoires $(|B_t|^{-1})_{t\geq 0}$ est bornée dans L^2. Montrer que $(|B_t|^{-1})_{t\geq 0}$ est une martingale locale mais n'est pas une (vraie) martingale.

8. On suppose $N \geq 3$. Montrer que, pour tout $t > 0$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{2-N} \, P(T_\varepsilon \leq t) = C(x,t),$$

où $C(x,t)$ est une constante dépendant de x et de t.