M2 Probabilités et Statistiques – Université Paris-Saclay

Mouvement brownien et calcul stochastique

Examen du 15 janvier 2025, 3 heures sans documents

Dans tout l'énoncé, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ complète et continue à droite.

Exercice 1. Soit M une martingale locale issue de 0.

1. On pose, pour tout $a > 0$, $T_a = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M\rangle_t > a^2\}$, et, pour tout entier $n \geq 1$, $\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$. Vérifier que le processus $(M_{t\wedge\tau_n\wedge T_a})^2$ est une sous-martingale, puis montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\geq 0}(M_{t\wedge\tau_n\wedge T_a})^2 > a^2\Big) \leq \frac{3}{a^2}\,\mathbb{E}[(M_{\tau_n\wedge T_a})^2].$$

2. En déduire que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T_a}(M_t)^2 > a^2\Big) \leq \frac{3}{a^2}\,\mathbb{E}[a^2 \wedge \langle M, M\rangle_\infty].$$

3. En observant que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\geq 0}(M_t)^2 > a^2\Big) \leq \mathbb{P}(T_a < \infty) + \mathbb{P}\Big(\sup_{0\leq t\leq T_a}(M_t)^2 > a^2\Big),$$

montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\geq 0}|M_t|\Big] \leq 7\,\mathbb{E}[\sqrt{\langle M, M\rangle_\infty}].$$

Exercice 2. On rappelle que, pour tout réel x, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{th}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. On se donne deux réels a et λ.

1. Ecrire la décomposition du processus

$$Y_t = \frac{a}{2}\,(B_t)^2\ \mathrm{th}(a(1-t)) + \lambda\int_0^t (B_s)^2\,\mathrm{d}s$$

comme somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie.

2. On suppose que $a^2 = 2\lambda$. Montrer que le processus

$$M_t = (\mathrm{ch}(a(1-t)))^{-1/2}\ \exp(-Y_t)$$

est une martingale locale (*on pourra écrire M_t comme une martingale exponentielle*).

3. En déduire que, pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\lambda\int_0^1 (B_t)^2\,\mathrm{d}t\Big)\Big] = (\mathrm{ch}(\sqrt{2\lambda}))^{-1/2}.$$

Problème. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. Soient σ et b deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tous $y, z \in \mathbb{R}$, on a $|\sigma(y)| \leq K$, $|b(y)| \leq K$, et

$$|\sigma(y) - \sigma(z)| \leq K|y-z|\ , \quad |b(y) - b(z)| \leq K|y-z|.$$

On dit qu'un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté et à trajectoires continues est une solution de $E_x(\sigma, b)$ si on a pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\,\mathrm{d}s.$$

Dans tout le problème, $(X_t)_{t\geq 0}$ est une solution de $E_x(\sigma, b)$. *Les questions* **4, 5, 6, 7** *peuvent être traitées indépendamment des questions* **1, 2, 3**.

1. Vérifier que le processus $\int_0^t \sigma(X_s)\,\mathrm{d}B_s$ est une vraie martingale de carré intégrable, puis montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq t}(X_s)^2\Big] < \infty.$$

2. Supposons que $(X'_t)_{t\geq 0}$ est aussi une solution de $E_x(\sigma, b)$. Pour tout $t \geq 0$, on pose

$$h(t) = \mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq t}(X_s - X'_s)^2\Big].$$

Montrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout $t \geq 0$,

$$h(t) \leq C(1+t)\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s.$$

3. Soit $L > 0$ et $C_L = C(1+L)$, où C est la constante de la question **2**. Déduire de la question précédente que, pour tout entier $n \geq 0$ et tout $t \in [0, L]$,

$$h(t) \leq \frac{(C_L t)^n}{n!}\,h(L).$$

Conclure que les deux processus X et X' sont indistingables.

4. Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour que $F(X_t)$ soit une martingale locale, il suffit que F satisfasse l'équation différentielle $\sigma^2 F'' + 2\,b\,F' = 0$.

5. A partir de maintenant, on suppose qu'il existe une constante $\varepsilon > 0$ telle que $\sigma(y) \geq \varepsilon$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Vérifier qu'une solution de l'équation différentielle de la question **4.** s'écrit sous la forme $F(z) = \int_0^z \exp(-2\beta(y))\,\mathrm{d}y$, avec une fonction β que l'on déterminera en termes de σ et b. Dans la suite, F désigne cette solution particulière. On remarquera que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et donc on peut définir $F(-\infty) \in [-\infty, 0[$ et $F(+\infty) \in]0, +\infty]$.

6. Dans cette question seulement, on suppose la fonction b intégrable ($\int_{\mathbb{R}} |b(y)|\mathrm{d}y < \infty$).

(a) Montrer que la martingale locale $M_t = F(X_t)$ est une vraie martingale.

(b) Montrer que $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$ p.s.

(c) En déduire que

$$\limsup_{t\to\infty} X_t = +\infty\ ,\ \liminf_{t\to\infty} X_t = -\infty\ ,\ \text{p.s.}$$

(d) Soient c et d deux réels tels que $c < x < d$. On pose

$$T_c = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq c\}\ , \quad T_d = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq d\}$$

Calculer $\mathbb{P}[T_c < T_d]$ en fonction des quantités $F(c)$, $F(x)$ et $F(d)$.

7. Dans cette question, on suppose que $F(-\infty) > -\infty$ et $F(+\infty) = +\infty$. Vérifier que $F(X_t)$ converge p.s. quand $t \to \infty$ vers une limite finie, puis montrer que X_t converge p.s. vers $-\infty$ quand $t \to \infty$.