

M2 Probabilités et Statistiques – Université Paris-Saclay

Mouvement brownien et calcul stochastique

Examen du 16 janvier 2026, 3 heures sans documents

Dans tout l'énoncé, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$ complète et continue à droite.

Exercice 1. Pour chaque entier $n \geq 1$, soit $M^n = (M_t^n)_{t \geq 0}$ une martingale locale issue de 0. On suppose dans tout l'exercice que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle M^n, M^n \rangle_\infty = 0, \quad \text{en probabilité.}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$, et, pour tout $n \geq 1$, soit

$$T_\varepsilon^n = \inf\{t \geq 0 : \langle M^n, M^n \rangle_t \geq \varepsilon\}$$

avec la convention usuelle $\inf \emptyset = \infty$. Expliquer pourquoi T_ε^n est un temps d'arrêt, puis montrer que la martingale locale arrêtée

$$M_t^{n, \varepsilon} = M_{t \wedge T_\varepsilon^n}^n, \quad \forall t \geq 0,$$

est une vraie martingale bornée dans L^2 .

2. Montrer que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \geq 0} |M_t^{n, \varepsilon}|^2 \right] \leq 4\varepsilon.$$

3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \geq 0} |M_t^n| \right) = 0, \quad \text{en probabilité.}$$

Exercice 2. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien issu de 0, et soit $a > 0$. On pose $X_t = B_t + at$ pour tout $t \geq 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique constante $c < 0$ telle que le processus e^{cX_t} soit une martingale locale, et déterminer c .

2. La martingale locale e^{cX_t} est-elle une vraie martingale ? Si oui, cette martingale est-elle uniformément intégrable ? On justifiera précisément la réponse.

Exercice 3. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien réel issu de 1 (**Attention** : $B_0 = 1$). On fixe $\varepsilon \in]0, 1[$ et on pose $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : B_t = \varepsilon\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $Z_t = (B_{t \wedge T_\varepsilon})^\alpha$ est une semimartingale et expliciter sa décomposition comme somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie.

2. Soit $\lambda > 0$. Montrer que le processus

$$X_t = (B_{t \wedge T_\varepsilon})^\alpha \exp \left(-\lambda \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2} \right)$$

est une martingale locale dès que α et λ vérifient une équation polynomiale que l'on déterminera.

3. Calculer

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(-\lambda \int_0^{T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2} \right) \right].$$

Problème. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien réel issu de 0, et soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une semi-martingale continue. On suppose qu'il existe une fonction continue $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$X_t = B_t + \int_0^t b(X_s) ds.$$

1. Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour que $F(X_t)$ soit une martingale locale, il suffit que F satisfasse l'équation différentielle $F'' + 2bF' = 0$.

2. Vérifier que la solution de cette équation différentielle qui satisfait $F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$ s'écrit

$$F(x) = \int_0^x \exp \left(-2 \int_0^y b(z) dz \right) dy.$$

Dans la suite, F désigne cette solution. On remarquera que F est strictement croissante.

On note $M_t = F(X_t)$.

3. **Dans cette question seulement**, on suppose la fonction b intégrable ($\int_{\mathbb{R}} |b(x)| dx < \infty$).

(a) Montrer que la martingale locale $M_t = F(X_t)$ est une vraie martingale.

(b) Montrer que $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$ p.s.

(c) En déduire que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty, \quad \text{p.s.}$$

4. On revient au cas général. Soient $c < 0$ et $d > 0$, et

$$T_c = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq c\},$$

$$T_d = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq d\}.$$

Montrer que, sur l'événement $\{T_c \wedge T_d = \infty\}$, les variables aléatoires $|B_{n+1} - B_n|$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont majorées par une constante (déterministe) indépendante de n . En déduire que $\mathbb{P}[T_c \wedge T_d = \infty] = 0$.

5. Calculer $\mathbb{P}[T_c < T_d]$ en fonction des quantités $F(c)$ et $F(d)$.

6. **Dans cette question seulement**, on suppose que $b(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, que b est nulle sur $] -\infty, 0]$ et qu'il existe une constante $\alpha > 1/2$ telle que $b(x) \geq \alpha/x$ pour tout $x \geq 1$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut choisir $c < 0$ tel que

$$\mathbb{P}[T_n < T_c, \text{ pour tout } n \geq 1] \geq 1 - \varepsilon.$$

En déduire que $X_t \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \infty$, p.s. (on pourra observer que la martingale locale $M_{t \wedge T_c}$ est bornée).

7. Inversement, on suppose que $b(x) = 1/(2x)$ pour tout $x \geq 1$. Montrer que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} X_t = -\infty, \quad \text{p.s.}$$

Exercice 1. (1) T_ε^n est le temps d'entrée dans le fermé $[\varepsilon, \infty)$ par le processus adapté à trajectoires continues $\langle M^n, M^n \rangle$, et est donc un t.a. De plus, pour tout $t \geq 0$,

$$\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon} \rangle_t = \langle M^n, M^n \rangle_{t \wedge T_\varepsilon^n} \leq \varepsilon$$

donc $\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon} \rangle_\infty \leq \varepsilon$, en particulier $E[\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon} \rangle_\infty] < \infty$ ce qui assure que $M^{n,\varepsilon}$ est une vraie martingale bornée dans L^2 .

(2) D'après l'inégalité de Doob, pour tout $t \geq 0$,

$$E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} |M_s^{n,\varepsilon}|^2 \right] \leq 4 E[|M_t^{n,\varepsilon}|^2] = 4 E[\langle M^{n,\varepsilon}, M^{n,\varepsilon} \rangle_t] \leq 4\varepsilon.$$

En faisant tendre $t \rightarrow \infty$, il vient $E[\sup_{s \geq 0} |M_s^{n,\varepsilon}|^2] \leq 4\varepsilon$.

(3) Soit $\eta > 0$. On veut montrer $P(\sup_{t \geq 0} |M_t^n| > \eta) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On remarque d'abord que,

$$P[T_\varepsilon^n < \infty] \leq P[\langle M^n, M^n \rangle_\infty \geq \varepsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

par hypothèse. Ensuite,

$$P\left(\sup_{s \geq 0} |M_s^n| > \eta\right) \leq P(T_\varepsilon^n < \infty) + P\left(\sup_{s \geq 0} |M_s^{n,\varepsilon}| > \eta\right) \leq P(T_\varepsilon^n < \infty) + \frac{4\varepsilon}{\eta^2},$$

grâce à l'inégalité de Markov et la question 2. Il en découle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{s \geq 0} |M_s^n| > \eta\right) \leq \frac{4\varepsilon}{\eta^2},$$

et comme $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, cela donne le résultat.

Exercice 3. (1) La semimartingale $B_{t \wedge T_\varepsilon}$ prend ses valeurs dans l'ouvert $]0, \infty[$ et la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est de classe C^2 sur cet ouvert. Cela permet d'appliquer la formule d'Itô et d'obtenir

$$(B_{t \wedge T_\varepsilon})^\alpha = 1 + \alpha \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} (B_s)^{\alpha-1} dB_s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} (B_s)^{\alpha-2} ds.$$

La partie martingale est $1 + \alpha \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} (B_s)^{\alpha-1} dB_s$ et la partie processus à variation finie est

$$\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} (B_s)^{\alpha-2} ds.$$

(2) En appliquant la formule d'Itô à la fonction $f(z, u) = ze^{-u}$ et aux semimartingales Z_t et $U_t = \lambda \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2}$ on trouve

$$X_t = 1 + \alpha \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} (B_s)^{\alpha-1} e^{-U_s} dB_s + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} (B_s)^{\alpha-2} e^{-U_s} ds - \lambda \int_0^{t \wedge T_\varepsilon} (B_s)^{\alpha-2} e^{-U_s} ds.$$

On voit que X est une martingale locale dès que $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \lambda$, ou encore $\alpha^2 - \alpha - 2\lambda = 0$.

(3) L'équation $\alpha^2 - \alpha - 2\lambda = 0$ a une seule racine négative $\alpha_0 = \frac{1-\sqrt{1+8\lambda}}{2}$. Pour ce choix de α , la martingale locale X_t est bornée par ε^{α_0} et est donc une vraie martingale uniformément intégrable. En écrivant $E[X_0] = E[X_\infty]$ on trouve

$$1 = \varepsilon^{\alpha_0} E \left[\exp \left(- \lambda \int_0^{T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2} \right) \right],$$

et donc

$$E \left[\exp \left(- \lambda \int_0^{T_\varepsilon} \frac{ds}{B_s^2} \right) \right] = \varepsilon^{-\alpha_0} = \varepsilon^{(\sqrt{1+8\lambda}-1)/2}.$$