Mouvement brownien et calcul stochastique

Partiel du 7 décembre 2021

2 heures 30, sans documents

Barème approximatif. Ex.1 : 5 pts, Ex.2 : 8 pts, Ex.3 : 8 pts

Dans les exercices 2 et 3, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ muni d'une filtration complète $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty]}$.

Exercice 1. On considère un mouvement brownien réel $(B_t)_{t \geq 0}$ issu de 0. Pour tout $a > 0$, on pose

$$\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}.$$

(1) Montrer qu'il existe une constante $\rho \in]0, 1[$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$P[\sigma_1 > n] \leq \rho^n.$$

(On pourra observer que $\{\sigma_1 > n\} \subset \{|B_1 - B_0| \leq 2, |B_2 - B_1| \leq 2, \dots, |B_n - B_{n-1}| \leq 2\}$)

(2) Montrer via une application du théorème d'arrêt à une martingale bien choisie que $E[\sigma_a] = a^2$, pour tout $a > 0$.

(3) On fixe $a > 0$ et on définit par récurrence une suite de temps d'arrêt $(\sigma_a^k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\sigma_a^0 = 0, \sigma_a^1 = \sigma_a, \sigma_a^{k+1} = \inf\{t > \sigma_a^k : |B_t - B_{\sigma_a^k}| = a\}.$$

(On ne demande pas de vérifier que les σ_a^k sont des temps d'arrêt.) Montrer que les variables aléatoires $\sigma_a^{k+1} - \sigma_a^k$, $k \in \mathbb{N}$ sont indépendantes et de même loi. En prenant $a = 2^{-n}$, déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}} = 1 \quad \text{p.s.}$$

(On pourra calculer la variance de $\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}}$)

Exercice 2. Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ une martingale à trajectoires continues **uniformément intégrable**, telle que $Y_0 = 0$. On note $Y_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} Y_t$. Soit aussi $p \geq 1$ un réel fixé. On dit que la martingale Y vérifie la propriété (P) s'il existe une constante C telle que, pour tout temps d'arrêt T , on ait

$$E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] \leq C.$$

(1) Montrer que si Y_∞ est bornée, la martingale Y vérifie la propriété (P).

(2) Soit B un $(\mathcal{F}_t)$ -mouvement brownien réel issu de 0. Montrer que la martingale $Y_t = B_{t \wedge 1}$ vérifie la propriété (P). (On pourra observer que la variable aléatoire $\sup_{t \leq 1} |B_t|$ est dans L^p .)

(3) Montrer que Y vérifie la propriété (P) avec la constante C , si et seulement si pour tout temps d'arrêt T ,

$$E[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq C P[T < \infty].$$

(On pourra utiliser les temps d'arrêt T^A définis en cours pour $A \in \mathcal{F}_T$.)

(4) On suppose dans cette question et la suivante que Y vérifie la propriété (P) avec la constante $C = 1$. On admet qu'alors, pour tout temps d'arrêt S , la martingale arrêtée Y^S vérifie la propriété (P) avec la même constante $C = 1$.

Soit $a > 0$, et soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de temps d'arrêt définis par récurrence par

$$R_0 = 0, \quad R_{n+1} = \inf\{t \geq R_n : |Y_t - Y_{R_n}| \geq a\} \quad (\inf \emptyset = \infty).$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$a^p P(R_{n+1} < \infty) \leq P(R_n < \infty).$$

(5) En déduire que, pour tout $x > 0$,

$$P\left(\sup_{t \geq 0} Y_t > x\right) \leq 2^p 2^{-px/2}.$$

(6) Montrer le résultat admis dans la question (4). (*On pourra commencer par observer que, si S et T sont des temps d'arrêt, on a $Y_{S \wedge T} = E[Y_T | \mathcal{F}_S]$*).

Exercice 3. Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté, à trajectoires continues et à valeurs positives ou nulles, et soit $(V_t)_{t \geq 0}$ un processus croissant (à trajectoires continues, adapté, et tel que $V_0 = 0$). On considère la condition suivante :

$$E[Y_T] \leq E[V_T], \quad \text{pour tout temps d'arrêt borné } T. \quad (D)$$

(1) Montrer que si M est une (vraie) martingale continue de carré intégrable, et $M_0 = 0$, alors la condition (D) est satisfaite par $Y_t = M_t^2$ et $V_t = \langle M, M \rangle_t$.

(2) Montrer que la conclusion de la question précédente reste vraie si on suppose seulement que M est une martingale locale issue de 0.

(3) On note $Y_t^* = \sup_{s \leq t} Y_s$. Montrer que sous la condition (D) on a pour tout temps d'arrêt borné S et tout $c > 0$:

$$P[Y_S^* \geq c] \leq \frac{1}{c} E[V_S].$$

(on pourra appliquer l'inégalité (D) au temps d'arrêt $S \wedge R$, avec $R = \inf\{t \geq 0 : Y_t \geq c\}$).

(4) Soient $c > 0$ et $d > 0$, et $S = \inf\{t \geq 0 : V_t \geq d\}$. Soit aussi T un temps d'arrêt borné. En remarquant que

$$\{Y_T^* \geq c\} \subset \left(\{Y_{T \wedge S}^* \geq c\} \cup \{V_T \geq d\} \right)$$

montrer que, sous la condition (D), on a

$$P[Y_T^* \geq c] \leq \frac{1}{c} E[V_T \wedge d] + P[V_T \geq d].$$

(5) En utilisant le résultat de la question précédente avec $c = d$, montrer que, pour tout réel $\beta \in]0, 1[$, il existe une constante C_β telle que, pour toute martingale locale M issue de 0 ($M_0 = 0$), et tout temps d'arrêt T ,

$$E\left[\sup_{s \leq T} |M_s|^{2\beta}\right] \leq C_\beta E\left[\langle M, M \rangle_T^\beta\right].$$

Corrigé.

Exercice 1. (1) Si $\sigma_1 > n$, on a $|B_t| < 1$ pour tout $t \in [0, n]$, d'où $|B_j - B_{j-1}| \leq 2$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. Donc

$$P(\sigma_1 > n) \leq P(|B_1 - B_0| \leq 2, \dots, |B_n - B_{n-1}| \leq 2) = \prod_{j=1}^n P(|B_j - B_{j-1}| \leq 2) = (P(|B_1| \leq 2))^n,$$

en utilisant le fait que les v.a. $B_j - B_{j-1}$ sont indépendantes et de même loi. Finalement, puisque B_1 suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ on a $P(|B_1| \leq 2) = \rho < 1$.

(2) On sait que $B_t^2 - t$ est une martingale. D'après le théorème d'arrêt (pour des t.a. bornés), on a $E[B_{t \wedge \sigma_a}^2 - (t \wedge \sigma_a)] = 0$ et donc $E[B_{t \wedge \sigma_a}^2] = E[t \wedge \sigma_a]$ pour tout $t \geq 0$. Quand $t \rightarrow \infty$, $E[t \wedge \sigma_a]$ converge vers $E[\sigma_a]$ par convergence monotone. Puisque $|B_{t \wedge \sigma_a}| \leq a$ (et qu'on sait que $\sigma_a < \infty$ p.s.), on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour obtenir que $E[B_{t \wedge \sigma_a}^2]$ converge quand $t \rightarrow \infty$ vers $E[\sigma_a^2] = a^2$. On conclut que $E[\sigma_a] = a^2$.

(3) Les propriétés du mouvement brownien montrent que les t.a. σ_a^k sont finis p.s. Notons $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration canonique de B . Pour tout entier $k \geq 1$, si on pose $B_t^{(\sigma_a^k)} = B_{\sigma_a^k + t} - B_{\sigma_a^k}$, la propriété de Markov forte dit que le processus $(B_t^{(\sigma_a^k)})_{t \geq 0}$ est encore un mouvement brownien (issu de 0) et est indépendant de la tribu $\mathcal{F}_{\sigma_a^k}$. Puisque $\sigma_a^{k+1} - \sigma_a^k = \inf\{t \geq 0 : |B_t^{(\sigma_a^k)}| = a\}$, il en découle que $\sigma_a^{k+1} - \sigma_a^k$ a même loi que σ_a et est indépendante de $\mathcal{F}_{\sigma_a^k}$, donc des v.a. $\sigma_a^1, \sigma_a^2 - \sigma_a^1, \dots, \sigma_a^k - \sigma_a^{k-1}$ (puisque, si $j \leq k$, σ_a^j est $\mathcal{F}_{\sigma_a^j}$ -mesurable et $\mathcal{F}_{\sigma_a^j} \subset \mathcal{F}_{\sigma_a^k}$).

Un argument de changement d'échelle montre que σ_a a même loi que $a^2 \sigma_1$. En particulier,

$$E[\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}}] = E\left[\sum_{j=1}^{2^{2n}} (\sigma_{2^{-n}}^j - \sigma_{2^{-n}}^{j-1})\right] = 2^{2n} \times 2^{-2n} E[\sigma_1] = 1.$$

Mais puisque les v.a. $\sigma_{2^{-n}}^j - \sigma_{2^{-n}}^{j-1}$ sont indépendantes, on a aussi

$$\text{var}(\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}}) = \sum_{j=1}^{2^{2n}} \text{var}(\sigma_{2^{-n}}^j - \sigma_{2^{-n}}^{j-1}) = 2^{2n} \times 2^{-4n} \text{var}(\sigma_1) = C 2^{-2n}$$

où $C = \text{var}(\sigma_1)$ (on utilise la question (1) pour observer que σ_1 est dans L^2). Finalement,

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}} - 1)^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[(\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}} - 1)^2\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \text{var}(\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}}) < \infty$$

d'où la série de terme général $(\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}} - 1)^2$ converge p.s., et donc $\sigma_{2^{-n}}^{2^{2n}} - 1$ converge p.s. vers 0.

Exercice 2.

(1) Pour une martingale u.i., si T est un temps d'arrêt on a $Y_T = E[Y_\infty | \mathcal{F}_T]$, donc la condition $|Y_\infty| \leq K$ entraîne aussi $|Y_T| \leq K$ et $|Y_\infty - Y_T| \leq 2K$, ce qui donne (P) avec $C = (2K)^p$.

(2) Puisque $\sup\{B_t, 0 \leq t \leq 1\}$ a même loi que $|B_1|$ et est donc dans L^p pour tout $1 \leq p < \infty$, la majoration $\sup\{|B_t|, 0 \leq t \leq 1\} \leq \sup\{B_t, 0 \leq t \leq 1\} + \sup\{-B_t, 0 \leq t \leq 1\}$ montre que $\sup\{|B_t|, 0 \leq t \leq 1\}$ est dans L^p .

Soit T un t.a. avec $P(T < \infty) > 0$ (sinon la propriété demandée est triviale). Si $Y_t = B_{t \wedge 1}$ on a $Y_\infty = B_1$ et $Y_T = B_{T \wedge 1}$. Notons B' le processus défini par $B'_t = \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} (B_{T+t} - B_T)$. Alors,

$$|Y_\infty - Y_T| = |B_1 - B_{T \wedge 1}| \leq \mathbf{1}_{\{T \leq 1\}} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B_{T+t} - B_T| = \mathbf{1}_{\{T \leq 1\}} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B'_t|.$$

Donc, si $A \in \mathcal{F}_T$,

$$E[\mathbf{1}_A E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T]] = E[\mathbf{1}_A |Y_\infty - Y_T|^p] \leq E\left[\mathbf{1}_{A \cap \{T \leq 1\}} \sup_{0 \leq t \leq 1} |B'_t|^p\right] = P(A \cap \{T \leq 1\}) E\left[\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t|^p\right],$$

où pour la dernière égalité on utilise la propriété de Markov forte, selon laquelle B' est sous la probabilité $P(\cdot | T < \infty)$ un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$ donc de $A \cap \{T \leq 1\}$. Finalement, pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, $E[\mathbf{1}_A E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T]] \leq C P(A)$, avec $C = E[\sup_{0 \leq t \leq 1} |B_t|^p]$, et, puisque $E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T]$ est $\mathcal{F}_T$ -mesurable, cela suffit pour dire que $E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] \leq C$ (prendre $A = \{E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] > C\}$ pour trouver $E[\mathbf{1}_A (E[|Y_\infty - Y_T|^p | \mathcal{F}_T] - C)] \leq 0$, d'où $P(A) = 0$).

(3) Supposons d'abord que Y vérifie la propriété (P) avec la constante C . Alors, si T est un t.a.

$$E[|Y_T - Y_\infty|^p] = E[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} |Y_T - Y_\infty|^p] = E[\mathbf{1}_{\{T < \infty\}} E[|Y_T - Y_\infty|^p | \mathcal{F}_T]] \leq C P(T < \infty).$$

Inversement, si $E[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq C P(T < \infty)$ pour tout t.a. T , alors, en remplaçant T par le t.a. T^A (où $A \in \mathcal{F}_T$) on trouve

$$E[\mathbf{1}_A E[|Y_T - Y_\infty|^p | \mathcal{F}_T]] = E[\mathbf{1}_A |Y_T - Y_\infty|^p] = E[|Y_{T^A} - Y_\infty|^p] \leq C P(T^A < \infty) \leq C P(A).$$

Comme cela est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, cela suffit pour dire que $E[|Y_T - Y_\infty|^p | \mathcal{F}_T] \leq C$.

(4) D'après la propriété admise, $Y^{R_{n+1}}$ vérifie (P) avec $C = 1$. En utilisant l'inégalité de la question (3) avec $T = R_n$, on trouve

$$E[|Y_\infty^{R_{n+1}} - Y_{R_n}^{R_{n+1}}|^p] \leq P(R_n < \infty).$$

Mais

$$E[|Y_\infty^{R_{n+1}} - Y_{R_n}^{R_{n+1}}|^p] = E[|Y_{R_{n+1}} - Y_{R_n}|^p] \geq a^p P(R_{n+1} < \infty)$$

ce qui donne le résultat voulu.

(5) Définissons les t.a. R_n comme dans la question précédente avec $a = 2$. On trouve par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $P(R_n < \infty) \leq 2^{-pn}$. Si $x \leq 2$ l'inégalité demandée est triviale. Supposons $x > 2$ et notons $n_0 = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor \geq 1$. Alors, puisque $2n_0 \leq x$, on a

$$\left\{ \sup_{t \geq 0} Y_t > x \right\} \subset \{R_{n_0} < \infty\}$$

et donc,

$$P\left(\sup_{t \geq 0} Y_t > x\right) \leq P(R_{n_0} < \infty) \leq 2^{-pn_0} \leq 2^{-p((x/2)-1)}$$

d'où le résultat.

(6) Suivant l'indication, on commence par montrer que, si S et T sont des temps d'arrêt, on a $Y_{S \wedge T} = E[Y_T | \mathcal{F}_S]$. On observe d'abord que, si $A \in \mathcal{F}_S$, l'événement $A \cap \{S \leq T\}$ est dans $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. En effet, si $t \geq 0$ (en rappelant que $S \wedge t$ et $T \wedge t$ sont $\mathcal{F}_t$ -mesurables), on obtient que $A \cap \{S \leq T\}$ est dans $\mathcal{F}_S$ en écrivant

$$(A \cap \{S \leq T\}) \cap \{S \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t,$$

puis que $A \cap \{S \leq T\}$ est dans $\mathcal{F}_T$ en écrivant

$$(A \cap \{S \leq T\}) \cap \{T \leq t\} = (A \cap \{S \leq t\}) \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ensuite, si $A \in \mathcal{F}_S$, on a

$$E[Y_T \mathbf{1}_A] = E[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S \leq T\}}] + E[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}] = E[Y_{S \wedge T} \mathbf{1}_{A \cap \{S \leq T\}}] + E[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}],$$

en utilisant le fait que $Y_{S \wedge T} = E[Y_T \mid \mathcal{F}_{S \wedge T}]$ (théorème d'arrêt). Puisqu'il est trivial que $E[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}] = E[Y_{S \wedge T} \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}]$ on a montré que $E[Y_T \mathbf{1}_A] = E[Y_{S \wedge T} \mathbf{1}_A]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_S$, ce qui suffit pour dire que $Y_{S \wedge T} = E[Y_T \mid \mathcal{F}_S]$, ce qu'on voulait obtenir.

On suppose ensuite que Y vérifie (P) avec la constante C . Fixons alors le t.a. S et considérons la martingale arrêtée $Y_t^S = Y_{S \wedge t}$. Alors, si T est un t.a.,

$$E[|Y_T^S - Y_\infty^S|^p] = E[|Y_{S \wedge T} - Y_S|^p] = E[|E[Y_T - Y_\infty \mid \mathcal{F}_S]|^p] \leq E[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq CP(T < \infty),$$

grâce à l'inégalité de Jensen qui donne $|E[Y_T - Y_\infty \mid \mathcal{F}_S]|^p \leq E[|Y_T - Y_\infty|^p \mid \mathcal{F}_S]$. D'après la question (3), cela suffit pour montrer que Y^S vérifie (P) avec la constante C .

Exercice 3. (1) D'après le cours, $M_t^2 - \langle M, M \rangle_t$ est une vraie martingale issue de 0. D'après le théorème d'arrêt (cas des temps d'arrêt bornés), pour tout temps d'arrêt borné T ,

$$E[M_T^2 - \langle M, M \rangle_T] = 0$$

et on voit que la condition (D) est satisfaite (même avec égalité) pour $Y_t = (M_t)^2$ et $V_t = \langle M, M \rangle_t$. (2) Soit $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$. On peut appliquer la question 1. à la martingale M^{T_n} , et on a pour tout temps d'arrêt borné T ,

$$E[(M_{T \wedge T_n})^2] \leq E[\langle M, M \rangle_{T \wedge T_n}].$$

Quand $n \rightarrow \infty$, le membre de droite tend vers $E[\langle M, M \rangle_T]$ par convergence monotone, alors que le lemme de Fatou donne

$$E[(M_T)^2] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E[(M_{T \wedge T_n})^2].$$

(3) Soit $R = \inf\{t \geq 0 : Y_t \geq c\}$. Alors R et aussi $T = S \wedge R$ sont des temps d'arrêt. D'après la propriété (D), comme T est un temps d'arrêt borné,

$$E[Y_T] \leq E[V_T] \leq E[V_S].$$

D'autre part, $\{R \leq S\} = \{Y_S^* \geq c\}$ et sur l'ensemble $\{R \leq S\}$ on a $Y_T = Y_R \geq c$. Donc,

$$E[Y_T] \geq E[Y_T \mathbf{1}_{\{R \leq S\}}] \geq cP[R \leq S].$$

On conclut que $cP[Y_S^* \geq c] = cP[R \leq S] \leq E[Y_T] \leq E[V_S]$.

(4) Sur l'ensemble $\{V_T < d\}$ on a $S \geq T$ et donc $Y_{T \wedge S}^* = Y_T^*$. Il en découle que

$$\{Y_T^* \geq c\} \subset \left(\{Y_{T \wedge S}^* \geq c\} \cup \{V_T \geq d\} \right).$$

En utilisant la question 3., on a donc

$$P(Y_T^* \geq c) \leq P(Y_{T \wedge S}^* \geq c) + P(V_T \geq d) \leq \frac{1}{c} E[V_{T \wedge S}] + P(V_T \geq d).$$

Mais $V_{T \wedge S} \leq d$ par définition de S , donc aussi $V_{T \wedge S} \leq V_T \wedge d$ puisque V est croissant.

(5) Il suffit de montrer le résultat pour des temps d'arrêt T bornés (dans le cas général remplacer T par $T \wedge n$ et faire tendre n vers l'infini en utilisant le théorème de convergence monotone). D'après la question (2), on peut appliquer l'inégalité de la question (4) à $Y_t = (M_t)^2$ et $V_t = \langle M, M \rangle_t$. Notons $M_t^* = \sup_{s \leq t} |M_s|$. On trouve pour tout $c > 0$

$$P[(M_T^*)^2 \geq c] \leq \frac{1}{c} E[\langle M, M \rangle_{T \wedge c}] + P(\langle M, M \rangle_T \geq c) = \frac{1}{c} E[\langle M, M \rangle_T \mathbf{1}_{\{\langle M, M \rangle_T < c\}}] + 2P(\langle M, M \rangle_T \geq c).$$

On intègre cette inégalité par rapport à la mesure $c^{\beta-1} dc$ sur $]0, \infty[$. On a

$$\int_0^\infty P[(M_T^*)^2 \geq c] c^{\beta-1} dc = E \left[\int_0^{(M_T^*)^2} c^{\beta-1} dc \right] = \frac{1}{\beta} E[(M_T^*)^{2\beta}],$$

et de même

$$\int_0^\infty P[\langle M, M \rangle_T \geq c] c^{\beta-1} dc = \frac{1}{\beta} E[(\langle M, M \rangle_T)^\beta].$$

De plus,

$$\int_0^\infty \frac{1}{c} E[\langle M, M \rangle_T \mathbf{1}_{\{\langle M, M \rangle_T < c\}}] c^{\beta-1} dc = E\left[\langle M, M \rangle_T \int_{\langle M, M \rangle_T}^\infty c^{\beta-2} dc\right] = \frac{1}{1-\beta} E[(\langle M, M \rangle_T)^\beta].$$

Finalement, on trouve,

$$\frac{1}{\beta} E[(M_T^*)^{2\beta}] \leq \left(\frac{1}{1-\beta} + \frac{2}{\beta}\right) E[(\langle M, M \rangle_T)^\beta],$$

d'où l'inégalité demandée avec $C_\beta = \frac{2-\beta}{1-\beta}$.