Mouvement brownien et calcul stochastique

Partiel du 24 novembre 2023

2 heures 30, sans documents

Dans les exercices 1, 3 et 4, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration complète (donc les martingales ou martingales locales sont relatives à cette filtration).

Exercice 1. (1) Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une (vraie) martingale avec $M_0 = 0$. On suppose aussi que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien. Montrer alors que pour tout $t \geq 0$ et tout $s > 0$, la variable aléatoire $M_{t+s} - M_t$ est indépendante de $\sigma(M_r, 0 \leq r \leq t)$.

(2) On suppose que les trajectoires de $(M_t)_{t\geq 0}$ sont continues. Sous les hypothèses de la question (1), montrer qu'il existe une fonction croissante continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\langle M, M\rangle_t = f(t)$ pour tout $t \geq 0$.

(3) (*Cette question est indépendante des questions* (1) *et* (2)) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien, tel que $B_0 = 0$. On suppose que $g(B_t)$ est une martingale. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = \alpha x + \beta$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien réel issu de 0. On note

$$S_t = \sup_{s\leq t} B_s$$

pour tout $t \geq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose aussi

$$T_x = \inf\{t \geq 0 : B_t = x\}$$

et pour tout $a > 0$,

$$U_a = \inf\{t \geq 0 : S_t - B_t = a\},$$

avec la convention habituelle $\inf \varnothing = \infty$.

(1) Soit $a > 0$. Montrer que $U_a < \infty$ p.s.

(2) Soit $a > 0$ et $x \in]0, a/2[$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a $\mathbb{P}(T_{nx} < U_a) \geq 2^{-n}$ (*Dans le cas* $n = 1$ *on pourra utiliser le fait que* $\mathbb{P}(T_x < T_{-x}) = 1/2$.)

(3) Soit $a > 0$. Montrer que, pour tout $x > 0$, la loi conditionnelle de $S_{U_a} - x$ sachant que $T_x < U_a$ coïncide avec la loi non conditionnée de S_{U_a}. En déduire que S_{U_a} suit une loi exponentielle.

(4) Déterminer le paramètre de cette loi exponentielle.

Exercice 3. Soit M une martingale locale et soit $a \geq 0$ un réel fixé.

(1) On pose, pour tout $t \geq 0$, $N_t = M_t - M_{t\wedge a}$. Justifier le fait que N est une martingale locale, telle que $N_0 = 0$, et montrer que $\langle N, N\rangle_t = \langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_{t\wedge a}$.

(2) Soit $\varepsilon > 0$, et $T_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \langle N, N\rangle_t \geq \varepsilon\}$. Justifier le fait que T_ε est un temps d'arrêt, puis montrer que le processus arrêté N^{T_ε} est une vraie martingale bornée dans L^2.

(3) Montrer que $\mathbb{E}[(N_{t\wedge T_\varepsilon})^2] \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.

(4) Soit $b > a$. On considère l'événement $A = \{\langle M, M\rangle_b = \langle M, M\rangle_a\}$. Déduire de la question précédente que, pour tout $t \in [a, b]$, on a $\mathbb{E}[(N_t)^2\, \mathbf{1}_A] \leq \varepsilon$. Conclure que, p.s. sur l'événement A, on a $M_t = M_a$, $\forall t \in [a, b]$.

(5) Montrer inversement que sur l'événement $\{M_t = M_a\ , \forall t \in [a, b]\}$ on a p.s. $\langle M, M\rangle_b = \langle M, M\rangle_a$.

Exercice 4. Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ une martingale à trajectoires continues **uniformément intégrable**, telle que $Y_0 = 0$. On note $Y_\infty = \lim_{t\to\infty} Y_t$. Soit aussi $p \geq 1$ un réel fixé. On dit que la martingale Y vérifie la propriété (P) s'il existe une constante C telle que, pour tout temps d'arrêt T, on ait

$$\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] \leq C.$$

(1) Montrer que si Y_∞ est bornée, la martingale Y vérifie la propriété (P).

(2) Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0. Montrer que la martingale $Y_t = B_{t\wedge 1}$ vérifie la propriété (P). (*On pourra commencer par montrer que la variable aléatoire* $\sup_{t\leq 1} |B_t|$ *est dans* L^p.)

(3) Montrer que Y vérifie la propriété (P) avec la constante C, si et seulement si pour tout temps d'arrêt T,

$$\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq C\,\mathbb{P}[T < \infty].$$

(4) Montrer que, si que Y vérifie la propriété (P) avec la constante $C = 1$, pour tout temps d'arrêt S, la martingale arrêtée Y^S vérifie la propriété (P) avec la même constante $C = 1$. (*On pourra commencer par montrer que, si S et T sont des temps d'arrêt, on a* $Y_{S\wedge T} = \mathbb{E}[Y_T \mid \mathcal{F}_S]$).

Corrigé.

Exercice 1. (1) Si $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien, les v.a. M_t sont en particulier de carré intégrable. De plus $\mathbb{E}[M_t] = \mathbb{E}[M_0] = 0$ et donc les variables M_t sont centrées.
La propriété de martingale montre que si $t \geq 0$ et $s > 0$, on a pour tout $r \in [0,t]$,

$$\mathbb{E}[M_r M_{t+s}] = \mathbb{E}[M_r \mathbb{E}[M_{t+s} \mid \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}[M_r M_t],$$

et donc $\mathbb{E}[M_r(M_{t+s} - M_t)] = 0$. La variable $M_{t+s} - M_t$ est donc orthogonale dans L^2 à l'espace vectoriel engendré par $\{M_r : 0 \leq r \leq t\}$. Cette propriété d'orthogonalité dans l'espace gaussien engendré par le processus M entraîne que $M_{t+s} - M_t$ est indépendante de $\sigma(M_r : 0 \leq r \leq t)$.

(2) La question (1) montre que $(M_t)_{t\geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et puisque les variables M_t sont centrées c'est encore une martingale relativement à sa filtration canonique $\mathcal{F}^\circ_t = \sigma(M_r : 0 \leq r \leq t)$ (qu'on peut compléter par les $(\mathcal{F}^\circ_\infty, \mathbb{P})$-négligeables). Les approximations de $\langle M, M\rangle$ montrent aussi que le crochet $\langle M, M\rangle$ est le même dans cette filtration canonique que dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$.
Si on pose $f(t) = \mathbb{E}[(M_t)^2]$, la fonction $f(t)$ est nulle en 0, croissante, et continue par un argument de couvergence dominée (l'inégalité de Doob dans L^p montre que $M^*_t = \sup\{|M_r| : r \leq t\}$ est dans L^2, pour tout $t > 0$). D'autre part, on a vu en cours que $(M_t)^2 - \mathbb{E}[(M_t)^2]$ est une martingale pour la filtration canonique $(\mathcal{F}^\circ_t)_{t\geq 0}$. La propriété d'unicité de la variation quadratique montre que $\langle M, M\rangle_t = f(t)$.

(3) Supposons que $M_t = f(B_t)$ est une martingale. Soient $a < 0 < b$, et T le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin]a, b[\}.$$

La martingale $M_{t\wedge T}$ est bornée par $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ et est donc uniformément intégrable, ce qui entraîne que $\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_0]$, c'est-à-dire $\mathbb{E}[f(B_T)] = f(0)$. D'après le cours, on a

$$\mathbb{P}(B_T = a) = \frac{b}{b-a}\ , \quad \mathbb{P}(B_T = b) = \frac{-a}{b-a}.$$

L'égalité $\mathbb{E}[f(B_T)] = f(0)$ conduit donc à

$$\frac{b}{b-a}\, f(a) + \frac{-a}{b-a}\, f(b) = f(0),$$

d'où

$$\frac{f(b) - f(0)}{b} = \frac{f(a) - f(0)}{a}.$$

Il en découle que la quantité $\frac{f(b)-f(0)}{b}$ ne dépend pas du choix de $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, ce qui veut exactement dire que f est affine.

Exercice 2. (1) On voit immédiatement que $U_a \leq T_{-a}$, et puisque $T_{-a} < \infty$ p.s. on a aussi $U_a < \infty$ p.s.
(2) Supposons $x < a/2$. Le fait que $\mathbb{P}(T_x < T_{-x}) = 1/2$ est immédiat par un argument de symétrie. Sur l'événement $\{T_x < T_{-x}\}$, on a $B_t > -x$ et $S_t \leq x$ pour tout $t \in [0, T_x]$, donc aussi $S_t - B_t < 2x < a$ pour tout $t \in [0, T_x]$. Cela montre que $\mathbb{P}(T_x < U_a) \geq \mathbb{P}(T_x < T_{-x}) = 1/2$. Montrons ensuite par récurrence que $\mathbb{P}(T_{nx} < U_a) \geq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 1$. Supposons que $n \geq 2$ et que cette propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de $(B_t)_{t\geq 0}$. D'après la propriété de Markov forte le processus $B'_t = B_{T_x+t} - x$ est encore un mouvement brownien, et est indépendant de $\mathcal{F}_{T_x}$, donc en particulier de l'événement $\{T_x < U_a\}$. Utilisons la notation T'_x, U'_a pour les temps d'arrêt définis en termes du mouvement brownien B' comme T_x, U_a

sont définis en termes de B. Alors on voit facilement que

$$T'_{(n-1)x} = T_{nx} - T_x$$
$$U'_a = U_a - T_x \quad \text{sur l'événement } \{T_x < U_a\}.$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_{nx} < U_a) = \mathbb{P}(\{T_x < U_a\} \cap \{T_{nx} < U_a\}) &= \mathbb{P}(\{T_x < U_a\} \cap \{T'_{(n-1)x} < U'_a\}) \\ &= \mathbb{P}(T_x < U_a)\mathbb{P}(T'_{(n-1)x} < U'_a).\end{aligned}$$

Puisque $\mathbb{P}(T_x < U_a) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(T'_{(n-1)x} < U'_a) = \mathbb{P}(T_{(n-1)x} < U_a)$, on obtient le résultat à l'ordre n.
(3) Utilisons les notations de la question précédente (mais sans supposer que $x < a/2$), et posons aussi

$$S'_t = \sup_{s \leq t} B'_s.$$

Alors on voit que sur l'événement $\{T_x < U_a\}$, on a $S'_{U'_a} = S_{U_a} - x$. Donc la loi de $S_{U_a} - x$ sachant que $T_x < U_a$ est la loi de $S'_{U'_a}$ sachant que $T_x < U_a$, mais comme B' est indépendant de $\{T_x < U_a\}$, cette dernière loi est la loi non conditionnée de $S'_{U'_a}$ c'est-à-dire la loi (non conditionnée) de S_{U_a}. Puisque $\{T_x < U_a\} = \{S_{U_a} \geq x\}$, on voit que la loi de $S_{U_a} - x$ sachant que $S_{U_a} \geq x$ coïncide avec la loi (non conditionnée) de S_{U_a}. Cette propriété (d'absence de mémoire) caractérise les lois exponentielles.
(4) Soit $\lambda > 0$ le paramètre de la loi exponentielle de S_{U_a}, de sorte que $\mathbb{P}(S_{U_a} < \varepsilon) \sim \lambda\varepsilon$ quand $\varepsilon \to 0$.
Alors, si $0 < \varepsilon < a$,

$$\mathbb{P}(T_{-a+\varepsilon} < T_\varepsilon) \geq \mathbb{P}(S_{U_a} < \varepsilon) \geq \mathbb{P}(T_{-a} < T_\varepsilon)$$

et puisque $\mathbb{P}(T_{-a+\varepsilon} < T_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a}$ et $\mathbb{P}(T_{-a} < T_\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}$ on trouve $\lambda = \frac{1}{a}$.

Exercice 3. (1) On sait que $M_{t\wedge a}$ est encore une martingale locale et que l'espace des martingales locales est un espace vectoriel. Il en découle aussitôt que $M_t - M_{t\wedge a}$ est une martingale locale. De plus, en notant $M^a_t = M_{t\wedge a}$, les propriétés de bilinéarité et de stabilité par arrêt du crochet montrent que

$$\langle N, N\rangle_t = \langle M, M\rangle_t - 2\langle M, M^a\rangle_t + \langle M^a, M^a\rangle_t = \langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_{t\wedge a}.$$

(2) T_ε est le temps d'entrée dans le fermé $[\varepsilon, \infty[$ du processus $\langle N, N\rangle$ qui est adapté et à trajectoires continues : c'est donc un temps d'arrêt. Par définition de T_ε, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\langle N^{T_\varepsilon}, N^{T_\varepsilon}\rangle_t = \langle N, N\rangle_{t\wedge T_\varepsilon} \leq \varepsilon$$

et donc $\langle N^{T_\varepsilon}, N^{T_\varepsilon}\rangle_\infty \leq \varepsilon$ ce qui entraîne en particulier que $\mathbb{E}[\langle N^{T_\varepsilon}, N^{T_\varepsilon}\rangle_\infty] \leq \varepsilon < \infty$ et donc que N^{T_ε} est une vraie martingale bornée dans L^2.
(3) On sait aussi que $(N^{T_\varepsilon}_t)^2 - \langle N^{T_\varepsilon}, N^{T_\varepsilon}\rangle_t$ est une vraie martingale (issue de 0) donc

$$\mathbb{E}[(N_{T\varepsilon\wedge t})^2] = \mathbb{E}[(N^{T_\varepsilon}_t)^2] = \mathbb{E}[\langle N^{T_\varepsilon}, N^{T_\varepsilon}\rangle_t] \leq \varepsilon.$$

(4) Sur l'ensemble A, la formule $\langle N, N\rangle_t == \langle M, M\rangle_t - \langle M, M\rangle_{t\wedge a}$ montre aussitôt que $\langle N, N\rangle_b = 0$, et donc $T_\varepsilon \geq b$. En conséquence, si $t \in [a, b]$,

$$\mathbb{E}[(N_t)^2\, \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[(N_{t\wedge T_\varepsilon})^2\, \mathbf{1}_A] \leq \mathbb{E}[(N_{t\wedge T_\varepsilon})^2] \leq \varepsilon,$$

d'après la question (3). Comme ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{E}[(N_t)^2\, \mathbf{1}_A] = 0$, ce qui veut dire que $N_t = 0$ p.s. sur A. On applique ceci aux valeurs rationnelles de $t \in [a, b]$ et on trouve que p.s. sur A on a $N_t = 0$ (donc $M_t = M_a$) pour tout $t \in [a, b]$.

(5) Si $a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n$ est une suite de subdivisions emboîtées de $[a,b]$ de pas tendant vers 0, on a de manière triviale

$$\sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 = 0$$

sur l'ensemble $\{M_t = M_a \ , \forall t \in [a,b]\}$. Mais par ailleurs les sommes précédentes convergent en probabilité (donc p.s. le long d'une sous-suite) vers $\langle M, M\rangle_b - \langle M, M\rangle_a$. Il en découle que $\langle M, M\rangle_b = \langle M, M\rangle_a$ p.s. sur $\{M_t = M_a \ , \forall t \in [a,b]\}$.

Exercice 4.

(1) Pour une martingale u.i., si T est un temps d'arrêt on a $Y_T = \mathbb{E}[Y_\infty \mid \mathcal{F}_T]$, donc la condition $|Y_\infty| \le K$ entraîne aussi $|Y_T| \le K$ et $|Y_\infty - Y_T| \le 2K$, ce qui donne (P) avec $C = (2K)^p$.

(2) Puisque $\sup\{B_t, 0 \le t \le 1\}$ a même loi que $|B_1|$ et est donc dans L^p pour tout $1 \le p < \infty$, la majoration $\sup\{|B_t|, 0 \le t \le 1\} \le \sup\{B_t, 0 \le t \le 1\} + \sup\{-B_t, 0 \le t \le 1\}$ montre que $\sup\{|B_t|, 0 \le t \le 1\}$ est dans L^p.

Soit T un t.a. avec $\mathbb{P}(T < \infty) > 0$ (sinon la propriété demandée est triviale). Si $Y_t = B_{t \wedge 1}$ on a $Y_\infty = B_1$ et $Y_T = B_{T \wedge 1}$. Notons B' le processus défini par $B'_t = \mathbf{1}_{\{T<\infty\}}\,(B_{T+t} - B_T)$. Alors,

$$|Y_\infty - Y_T| = |B_1 - B_{T\wedge 1}| \le \mathbf{1}_{\{T \le 1\}} \sup_{0 \le t \le 1} |B_{T+t} - B_T| = \mathbf{1}_{\{T \le 1\}} \sup_{0 \le t \le 1} |B'_t|.$$

Donc, si $A \in \mathcal{F}_T$,

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A |Y_\infty - Y_T|^p] \le \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{A \cap \{T \le 1\}} \sup_{0 \le t \le 1} |B'_t|^p\Big] = \mathbb{P}(A \cap \{T \le 1\}) \times \mathbb{E}\Big[\sup_{0 \le t \le 1} |B_t|^p\Big],$$

où pour la dernière égalité on utilise la propriété de Markov forte, selon laquelle B' est sous la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \mid T < \infty)$ un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$ donc de $A \cap \{T \le 1\}$. Finalement, on voit que, pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A |Y_\infty - Y_T|^p] \le C\,\mathbb{P}(A)$, avec $C = \mathbb{E}[\sup_{0 \le t \le 1} |B_t|^p]$, ce qui suffit pour dire que $\mathbb{E}[|Y_\infty - Y_T|^p \mid \mathcal{F}_T] \le C$.

(3) Supposons d'abord que Y vérifie la propriété (P) avec la constante C. Alors, si T est un t.a.

$$\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} |Y_T - Y_\infty|^p] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{T<\infty\}} \mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p \mid \mathcal{F}_T]] \le C\,\mathbb{P}(T < \infty).$$

Inversement, si $\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p] \le C\,\mathbb{P}(T < \infty)$ pour tout t.a. T, alors, en remplaçant T par le t.a. T^A (où $A \in \mathcal{F}_T$, et $T^A(\omega) = T(\omega)$ si $\omega \in A$, $T^A(\omega) = \infty$ si $\omega \notin A$) on trouve

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_A |Y_T - Y_\infty|^p] = \mathbb{E}[|Y_{T^A} - Y_\infty|^p] \le C\,\mathbb{P}(T^A < \infty) \le C\,\mathbb{P}(A).$$

Comme cela est vrai pour tout $A \in \mathcal{F}_T$, cela suffit pour dire que $\mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p \mid \mathcal{F}_T] \le C$.

(4) Soient S, T deux t.a. On observe d'abord que, si $A \in \mathcal{F}_S$, l'événement $A \cap \{S \le T\}$ est dans $\mathcal{F}_{S \wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$. En effet, si $t \ge 0$ (en rappelant que $S \wedge t$ et $T \wedge t$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurables), on obtient que $A \cap \{S \le T\}$ est dans $\mathcal{F}_S$ en écrivant

$$(A \cap \{S \le T\}) \cap \{S \le t\} = (A \cap \{S \le t\}) \cap \{S \wedge t \le T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t,$$

puis que $A \cap \{S \le T\}$ est dans $\mathcal{F}_T$ en écrivant

$$(A \cap \{S \le T\}) \cap \{T \le t\} = (A \cap \{S \le t\}) \cap \{T \le t\} \cap \{S \wedge t \le T \wedge t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Ensuite, si $A \in \mathcal{F}_S$, on a

$$\mathbb{E}[Y_T \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S \le T\}}] + \mathbb{E}[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}] = \mathbb{E}[Y_{S \wedge T} \mathbf{1}_{A \cap \{S \le T\}}] + \mathbb{E}[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}],$$

en utilisant le fait que $Y_{S \wedge T} = \mathbb{E}[Y_T \mid \mathcal{F}_{S \wedge T}]$ (théorème d'arrêt). Puisqu'il est trivial que $\mathbb{E}[Y_T \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}] = \mathbb{E}[Y_{S \wedge T} \mathbf{1}_{A \cap \{S > T\}}]$ on a montré que $\mathbb{E}[Y_T \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[Y_{S \wedge T} \mathbf{1}_A]$ pour tout $A \in \mathcal{F}_S$,

ce qui suffit pour dire que $Y_{S\wedge T} = \mathbb{E}[Y_T \mid \mathcal{F}_S]$.
Fixons alors le t.a. S et considérons la martingale arrêtée $Y_t^S = Y_{S\wedge t}$. Alors, si T est un t.a.,

$$\mathbb{E}[|Y_T^S - Y_\infty^S|^p] = \mathbb{E}[|Y_{S\wedge T} - Y_S|^p] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[Y_T - Y_\infty \mid \mathcal{F}_S]|^p] \leq \mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p] \leq C\mathbb{P}(T < \infty),$$

grâce à l'inégalité de Jensen qui donne $|\mathbb{E}[Y_T - Y_\infty \mid \mathcal{F}_S]|^p \leq \mathbb{E}[|Y_T - Y_\infty|^p \mid \mathcal{F}_S]$. D'après la question (3), cela suffit pour montrer que Y^S vérifie (P) avec la constante C.